Diverse Übungsaufgaben zur Vektorrechnung

Aufgabe 1

Gegeben sind die drei Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} u \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ v \\ -8 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ w \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Parameter u, v und w so, dass die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ paarweise aufeinander senkrecht stehen!

Ein Quader hat die Eckpunkte D, E, F, G, H, I, J und K. Die Kanten $\vec{ED}$, $\vec{EI}$ und $\vec{EF}$ entsprechen den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Der Punkt E hat die Koordinaten $(6|20|15)$.

Das Kantenmodell des Quaders soll auf einem Bildschirm dargestellt werden. Die Koordinaten x, y und z des dreidimensionalen Quaders werden auf den zweidimensionalen Bildschirm mit den Koordinaten x_b und y_b abgebildet durch die Zuordnung $x_b = x + 0,5z$ und $y_b = y + 0,5z$. Berechnen Sie die Bildschirmkoordinaten aller 8 Eckpunkte des Quaders!

Aufgabe 2

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Sind die Vektoren komplanar?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$. Berechnen Sie die Beträge der Vektoren!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 24 \\ -30 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -21 \\ -12 \\ 28 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} -64 \\ 48 \\ 39 \end{pmatrix}$$

Lösung Aufgabe 1:

Wir können 3 Skalarprodukte von je zwei Vektoren aufstellen. Diese sind jeweils gleich Null, da die Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

$$\begin{array}{lclcl}
\vec{a} \circ \vec{b} & \Rightarrow & 4u + 10v + 40 = 0 & \Rightarrow & 4u + 10v = -40 \\
\vec{a} \circ \vec{c} & \Rightarrow & 11u - 20 - 5w = 0 & \Rightarrow & 11u - 5w = 20 \\
\vec{b} \circ \vec{c} & \Rightarrow & 44 - 2v - 8w = 0 & \Rightarrow & -2v - 8w = -44
\end{array}$$

Dieses Lineargleichungssystem kann mit einem beliebigen Verfahren aufgelöst werden. Man erhält dann:

$$u = 5 \qquad v = -6 \qquad w = 7$$

Die gesuchten Vektoren lauten damit:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Nun müssen noch die Eckpunkte des Quaders bestimmt werden. Gegeben ist der Punkt E. Wir stellen ihn dar durch den Vektor $\vec{E}$, der vom Koordinatenursprung zum Punkt E verläuft. Den zugehörigen zweidimensionalen Punkt auf dem Bildschirm nennen wir E^*. Entsprechend ordnen wir ihm den Vektor $\vec{E}^*$ zu.

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}^* = \begin{pmatrix} 6 + 7,5 \\ 20 + 7,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13,5 \\ 27,5 \end{pmatrix}$$

Durch die Bildung geeigneter Vektorsummen können wir nun die entsprechenden dreidimensionalen Vektoren $\vec{D}$ bis $\vec{K}$ und die zugehörigen zweidimensionalen Vektoren $\vec{D}^*$ bis $\vec{K}^*$ bestimmen. Damit ist die Aufgabe gelöst.

$$\vec{D} = \vec{E} + \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{D}^* = \begin{pmatrix} 11 + 5 \\ 30 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 35 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = \vec{E} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 18 \\ 22 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}^* = \begin{pmatrix} 17 + 11 \\ 18 + 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 29 \end{pmatrix}$$

$$\vec{G} = \vec{D} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 11 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 28 \\ 17 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{G}^* = \begin{pmatrix} 22 + 8,5 \\ 28 + 8,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30,5 \\ 36,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{H} = \vec{D} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{H}^* = \begin{pmatrix} 15+1 \\ 24+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$\vec{I} = \vec{E} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{I}^* = \begin{pmatrix} 10+3,5 \\ 14+3,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13,5 \\ 17,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{J} = \vec{F} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 17 \\ 18 \\ 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{J}^* = \begin{pmatrix} 21+7 \\ 12+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$\vec{K} = \vec{G} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 22 \\ 28 \\ 17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 22 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{K}^* = \begin{pmatrix} 26+4,5 \\ 22+4,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30,5 \\ 26,5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Sind die Vektoren komplanar?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Komplanarität wird am einfachsten mit der Determinante aus $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gebildet.

$$\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & -7 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Die Determinante löse ich mit Hilfe des Satzes von Sarrus[1] auf. Dazu schreibe ich die ersten beiden Spalten als Hilfe dahinter.

$$\begin{aligned} \det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) &= \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & -7 & -2 & 5 & -7 \\ -3 & 4 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right. \\ &= -14 + 18 + 100 - 105 + 16 - 15 \\ \det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) &= 0 \end{aligned}$$

Die Determinante ist $= 0 \Rightarrow$ die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind **komplanar**.

[1] Weiteres zum Satz von Sarrus finden sie hier: http://www.dk4ek.de/mathematik/lingl.pdf

Aufgabe 3

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$. Berechnen Sie die Beträge der Vektoren!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 24 \\ -30 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -21 \\ -12 \\ 28 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} -64 \\ 48 \\ 39 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-12)^2} = 13$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} = \sqrt{9^2 + 24^2 + (-30)^2} = 41$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = \sqrt{(-21)^2 + (-12)^2 + 28^2} = 37$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2} = \sqrt{(-64)^2 + 48^2 + 39^2} = 89$$