Ungleichungen mit Brüchen

W. Kippels

24. November 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeines zum Lösen von Ungleichungen

Mit Ungleichungen kann ***fast*** genau so gerechnet werden, wie mit Gleichungen. Ohne besondere Bedingungen kann man auf beiden Seiten beliebige Zahlen addieren und subtrahieren. Problematisch wird es beim ***Multiplizieren*** und beim ***Dividieren***. Zu beachten ist:

Beim Multiplizieren oder Dividieren mit einer
negativen Zahl kehrt sich das Ungleichungszeichen um.

Außerdem gilt: ***Beim Multiplizieren mit der Zahl Null wird aus der Ungleichung eine Gleichung.*** Dieser Fall ist allerdings von untergeordneter Bedeutung, in die Versuchung, mit Null zu multiplizieren, gerät man eigentlich nicht.

Was bedeutet das in der Praxis? Dazu ein paar Beispiele.

$$-2x < 4$$

Hier möchte man auf beiden Seiten durch -2 dividieren. Also kehrt sich das Ungleichungszeichen um:

$$x > -2$$

Ein anderes Beispiel:

$$\frac{x}{-4} \leq -3$$

Wir multiplizieren mit -4, also wird aus dem $\leq$ ein $\geq$.

$$x \geq 12$$

Wirklich probematisch wird es erst, wenn man mit einem Term multiplizieren muss, der eine Variable enthält. Auch hierzu ein Beispiel:

$$\frac{x}{x-2} \geq 2$$

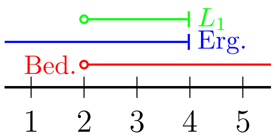
Um den Bruch aufzulösen, müssen wir die Ungleichung mit $(x-2)$ multiplizieren. Das Problem: Niemand weiß, ob $(x-2)$ positiv oder negativ ist, denn das hängt einzig und allein davon ab, welche Werte man für x einsetzt. Deshalb müssen wir eine ***Fallunterscheidung*** machen.

Der erste Fall ist dabei für alle x zuständig, für die $(x-2)$ ***positiv***, der zweite Fall für die x, für die $(x-2)$ ***negativ*** ist. Das ist für $x > 2$ bzw. $x < 2$ der Fall. Der Fall $x = 2$ kann dabei unberücksichtigt bleiben, da dafür der Nenner $x - 2 = 0$ wäre. Der Definitionsbereich lautet daher: $\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{2\}}$

$$\frac{x}{x-2} \geq 2 \quad | \cdot (x-2)$$

$$\begin{array}{rcl}
\multicolumn{3}{c}{\underline{\text{für } x > 2:}} \\
x & \geq & 2(x-2) \\
x & \geq & 2x - 4 \quad | - 2x \\
-x & \geq & -4 \quad | \cdot (-1) \\
x & \leq & 4
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rcl}
\multicolumn{3}{c}{\underline{\text{für } x < 2:}} \\
x & \leq & 2(x-2) \\
x & \leq & 2x - 4 \quad | - 2x \\
-x & \leq & -4 \quad | \cdot (-1) \\
x & \geq & 4
\end{array}$$

Auf den ersten Blick erhält man zwei Lösungen, die sich widersprechen. In Wahrheit gilt aber die Lösung $x \leq 4$ nur für den Fall, dass $x > 2$ ist. Für die zweite Lösung gilt entsprechend, dass sie nur gültig ist im Bereich $x < 2$. Man bekommt also zwei Teillösungsmengen ***für den jeweiligen Gültigkeitsbereich***.

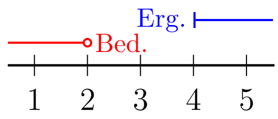


Um die jeweilige Teillösungsmenge zu bestimmen, muss man eine UND-Verknüpfung zwischen dem ***Ergebnisterm*** und der zugehörigen ***Bedingung für den Gültigkeitsbereich*** bilden. Dazu erscheint es mir sinnvoll, die Zusammenhänge graphisch darzustellen. Zur graphischen Ermittlung der ersten Tellösungsmenge L_1 ist links ein Zahlenstrahl dargestellt. Darüber ist in Rot die Bedingung für den untersuchten Bereich $x > 2$ dargestellt. Der kleine Kreis an der linken Begrenzung bei 2 bedeutet, dass alle x oberhalb von 2 zum untersuchten Bereich gehören, die 2 selbst aber nicht. Rechts am roten Strich ist keine Begrenzung eingetragen; das bedeutet, es gibt **keine** obere Begrenzung. In Blau ist darüber der Bereich des Ergebnisterms $x \leq 4$ dargestellt. Hier gibt es nach links keine Begrenzung. Rechts ist ein kleiner senkrechter Strich als obere Begrenzung eingezeichnet. Dadurch wird ausgedrückt, dass die Grenze – hier die Zahl 4 – **nicht** ausgeschlossen ist, sondern ebenfalls zum dargestellten Bereich gehört. Die tatsächliche Lösung für den untersuchten Bereich liegt dann dort, wo die beiden Striche **nebeneinander her** verlaufen. Dieser Lösungs-Bereich ist ebenfalls eingezeichnet und zwar mit grüner Farbe.

Nun muss dieser grüne Bereich noch als Zahlenmenge angegeben werden. Das geht am besten in der ***beschreibenden*** Form einer Lösungsmenge:

$$L_1 = \{x|x \leq 4 \wedge x > 2\} = \{x|2 < x \leq 4\}$$

Zur ersten Teillösungsmenge L_1 gehören also alle x, die zwischen 2 und 4 liegen und zwar ohne die 2, aber mit der 4.



Entsprechend erfolgt die Bestimmung der zweiten Lösungsmenge L_2 für den zweiten untersuchten Bereich. Die Zusammenhänge am Zahlenstrahl sind hier rechts dargestellt. Wieder ist der untersuchte Bereich rot und der Ergebnisterm blau eingezeichnet. Man kann leicht erkennen, dass es hier **keinen** Bereich gibt, in dem beide Linien nebeneinander her verlaufen. Daher kann keine Teillösungsmenge eingezeichnet werden, diese Menge ist eine **leere Menge**. In Mengenschreibweise sieht die zweite Teillösungsmenge L_2 so aus:

$$L_2 = \{x|x \geq 4 \wedge x < 2\} = \{\ \}$$

Da es keine Zahl gibt, die einerseits kleiner als 2, andererseits größer oder gleich 4 sein kann, ist die zweite Teillösungsmenge L_2 eine leere Menge. Damit ist die Gesamtlösungsmenge identisch mit der ersten Teillösungsmenge:

$$\boxed{L = L_1 = \{x|2 < x \leq 4\}}$$

2 Aufgaben

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen der nachfolgenden Ungleichungen!

2.1 Aufgabe 1

$$\frac{3x+1}{x-3} < 5$$

2.2 Aufgabe 2

$$4 \leq \frac{x-4}{x+2}$$

2.3 Aufgabe 3

$$\frac{2x-5}{x+3} \geq \frac{5x+1}{x+3}$$

2.4 Aufgabe 4

$$\frac{x+2}{2x-4} \leq \frac{x+5}{3x-6}$$

2.5 Aufgabe 5

$$\frac{x+1}{x-1} \geq \frac{x-5}{x-3}$$

2.6 Aufgabe 6

$$\frac{1}{x+3} \geq \frac{4}{x+4} - \frac{3}{x+1}$$

2.7 Aufgabe 7

$$\frac{4x^2-5x-13}{4x^2-9} < \frac{5x-3}{2x+3} - \frac{3x-4}{2x-3}$$

2.8 Aufgabe 8

$$\frac{3}{x^2-9} - \frac{1}{x^2-3x} \geq -\frac{1}{x^2+3x}$$

2.9 Aufgabe 9

$$\frac{x}{x-2} > \frac{5}{x-2}$$

2.10 Aufgabe 10

$$\frac{x+1}{3x} \leq \frac{6}{3x}$$

2.11 Aufgabe 11

$$\frac{3}{2x+1} < \frac{4x+1}{2x+1}$$

2.12 Aufgabe 12

$$\frac{x}{x+6} > \frac{x+1}{x+6}$$

2.13 Aufgabe 13

$$\frac{7}{x-3} \leq 2$$

2.14 Aufgabe 14

$$\frac{-3}{2x+5} < -1$$

2.15 Aufgabe 15

$$\frac{1}{x-4} > \frac{1}{2}$$

2.16 Aufgabe 16

$$\frac{5}{6-3x} \leq -\frac{2}{3}$$

2.17 Aufgabe 17

$$\frac{2x}{3x-1} < -5$$

2.18 Aufgabe 18

$$\frac{x+1}{x-1} > 0$$

2.19 Aufgabe 19

$$\frac{3-x}{3+x} \leq 3$$

2.20 Aufgabe 20

$$\frac{2x-5}{4+3x} < 12$$

2.21 Aufgabe 21

$$\frac{5}{1-5x} > \frac{2}{1-2x}$$

2.22 Aufgabe 22

$$\frac{2x}{x+1} \leq \frac{4x-1}{2x}$$

2.23 Aufgabe 23

$$\frac{x}{x+1} < \frac{x}{x-1}$$

2.24 Aufgabe 24

$$\frac{5x}{2-x} > \frac{-5x}{2+x}$$

2.25 Aufgabe 25

$$\frac{2+3x}{4-2x} \leq \frac{2-3x}{4+2x}$$

2.26 Aufgabe 26

$$\frac{6x+3}{4x+8} < \frac{3x-1}{2x+4}$$

2.27 Aufgabe 27

$$\frac{3x-8}{x-2} \geq \frac{3x+2}{x+3}$$

2.28 Aufgabe 28

$$\frac{2x+7}{x+4} + 2 \geq \frac{4x-3}{x-3}$$

2.29 Aufgabe 29

$$\frac{3x-4}{2x+3} - 5 \leq \frac{10-14x}{4x-4}$$

2.30 Aufgabe 30

$$\frac{3}{x+1} + \frac{1}{x+3} \leq \frac{4}{x+4}$$

2.31 Aufgabe 31

$$\frac{x+2}{x^2+x-2} \geq \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

2.32 Aufgabe 32

$$\frac{1}{x-2} > \frac{5x-5}{x^2-4} - \frac{4}{x-1}$$

2.33 Aufgabe 33

$$\frac{4}{1-|2x+1|} \leq \frac{7}{2}$$

3 Lösungen

3.1 Aufgabe 1

$$\frac{3x+1}{x-3} < 5$$

Die Lücken im Definitionsbereich sind dort, wo der Nenner Null wird.

$$x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x=3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{3\}}$$

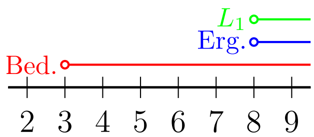
Um die Lösungsmenge zu bestimmen, muss die Ungleichung nach x aufgelöst werden.

$$\frac{3x+1}{x-3} < 5 \quad | \cdot (x-3)$$

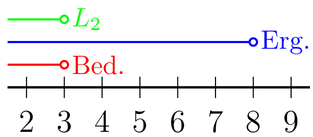
Da man einerseits grundsätzlich nicht weiß, ob $(x-3)$ positiv oder negativ ist, andererseits man aber das Ungleichungszeichen umkehren muss, wenn man die Ungleichung mit einer *negativen* Zahl multipliziert, ist eine ***Fallunterscheidung*** notwendig!

$$\begin{array}{rcl} & \underline{\text{für } x>3:} & \\ 3x+1 & < & 5\cdot(x-3) \\ 3x+1 & < & 5x-15 \quad |-5x-1 \\ -2x & < & -16 \quad |:(-2) \\ x & > & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} & \underline{\text{für } x<3:} & \\ 3x+1 & > & 5\cdot(x-3) \\ 3x+1 & > & 5x-15 \quad |-5x-1 \\ -2x & > & -16 \quad |:(-2) \\ x & < & 8 \end{array}$$

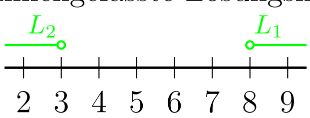


$L_1=\{x|x>8\}$



$L_2=\{x|x<3\}$

Zusammengefasste Lösungsmengen:



$$\boxed{L=L_1\cup L_2=\{x|x<3\vee x>8\}}$$

3.2 Aufgabe 2

$$4 \leq \frac{x-4}{x+2}$$

Die Lücken im Definitionsbereich sind dort, wo der Nenner Null wird.

$$x+2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}}$$

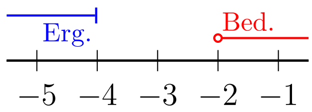
Um die Lösungsmenge zu bestimmen, muss die Ungleichung nach x aufgelöst werden.

$$4 \leq \frac{x-4}{x+2} \quad | \cdot (x+2)$$

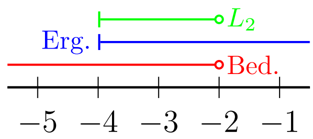
Da man einerseits grundsätzlich nicht weiß, ob $(x+2)$ positiv oder negativ ist, andererseits man aber das Ungleichungszeichen umkehren muss, wenn man die Ungleichung mit einer *negativen* Zahl multipliziert, ist eine ***Fallunterscheidung*** notwendig!

$$\begin{array}{rcll} & \underline{\text{für } x > -2:} & & \\ 4\cdot(x+2) & \leq & x-4 & \\ 4x+8 & \leq & x-4 & |-x-8 \\ 3x & \leq & -12 & |:3 \\ x & \leq & -4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} & \underline{\text{für } x < -2:} & & \\ 4\cdot(x+2) & \geq & x-4 & \\ 4x+8 & \geq & x-4 & |-x-8 \\ 3x & \geq & -12 & |:3 \\ x & \geq & -4 & \end{array}$$



$L_1 = \{\ \}$



$L_2 = \{x| -4 \leq x < -2\}$

$$\boxed{L = L_2 = \{x| -4 \leq x < -2\}}$$

3.3 Aufgabe 3

$$\frac{2x-5}{x+3} \geq \frac{5x+1}{x+3}$$

Die Lücken im Definitionsbereich sind dort, wo die (gleichen) Nenner Null werden.

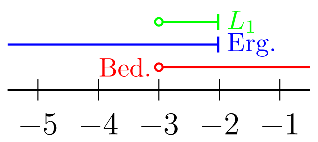
$$x+3=0 \quad \Rightarrow \quad x=-3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{-3\}}$$

Nun wird die Lösungsmenge bestimmt.

$$\frac{2x-5}{x+3} \geq \frac{5x+1}{x+3} \qquad |\cdot(x+3)$$

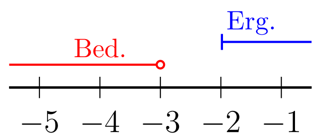
Eine Fallunterscheidung ist notwendig, je nachdem, ob (x+3) positiv oder negativ ist!

$$\underline{\text{für } x>-3:}$$
$$\begin{array}{rcl} 2x-5 & \geq & 5x+1 \quad |-5x+5 \\ -3x & \geq & 6 \quad |:(-3) \\ x & \leq & -2 \end{array}$$



$$L_1=\{x|-3<x\leq-2\}$$

$$\underline{\text{für } x<-3:}$$
$$\begin{array}{rcl} 2x-5 & \leq & 5x+1 \quad |-5x+5 \\ -3x & \leq & 6 \quad |:(-3) \\ x & \geq & -2 \end{array}$$



$$L_2=\{\ \}$$

$$\boxed{L=L_1=\{x|-3<x\leq-2\}}$$

Anmerkung: Da sich beide Fälle bei der Berechnung ausschließlich *durch die Ungleichungszeichen unterscheiden, muss man nicht die komplette Berechnung doppelt aufschreiben. Es reicht daher völlig aus, im zweiten Fall nur den Ergebnisterm mit dem richtigen Ungleichungszeichen hinzuschreiben. Bei den folgenden Lösungen wird das so gemacht.*

3.4 Aufgabe 4

$$\frac{x+2}{2x-4} \le \frac{x+5}{3x-6}$$

Zuerst bestimme ich den Hauptnenner (durch geeignete Zerlegung der einzelnen Nenner) sowie die Erweiterungsfaktoren[1]:

$$\begin{array}{rcccc|l}
2x-4 & = & 2 & & \cdot(x-2) & EF=3 \\
3x-6 & = & & 3 & \cdot(x-2) & EF=2 \\
\hline
HN & = & 2 & \cdot 3 & \cdot(x-2) &
\end{array}$$

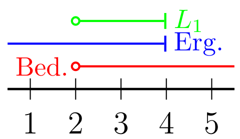
Anhand des Hauptnenners kann man gut den Definitionsereich bestimmen. Der einzige Faktor im Hauptnenner, der Null werden kann, ist der Term $(x-2)$.

$$x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{2\}}$$

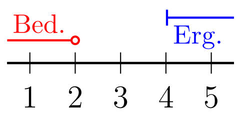
Jetzt wird die Lösungsmenge bestimmt. Ich verwende die abgekürzte Schreibweise für den zweiten Fall, wie bei Aufgabe 2 angesprochen.

$$\frac{x+2}{2x-4} \le \frac{x+5}{3x-6} \qquad |\cdot \text{HN}$$

$$\begin{array}{rcll}
 & \underline{\text{für } x>2:} & & \\
(x+2)\cdot 3 & \le & (x+5) & \\
3x+6 & \le & 2x+10 & |-2x-6 \\
x & \le & 4 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rcl}
 & \underline{\text{für } x<2:} & \\
 & \vdots & \\
 & \vdots & \\
x & \ge & 4
\end{array}$$



$L_1=\{x|2<x\le 4\}$



$L_2=\{\ \}$

$$\boxed{L=L_1=\{x|2<x\le 4\}}$$

[1]Einzelheiten zur Hauptnennerbestimmung und den Erweiterungsfaktoren siehe hier: http://www.dk4ek.de/mathematik/bruchgl1.pdf

3.5 Aufgabe 5

$$\frac{x+1}{x-1} \geq \frac{x-5}{x-3}$$

Wie man leicht sieht, sind die beiden Nenner teilerfremd. Daher ist der Hauptnenner das Produkt der beiden Nenner: $HN = (x-1)\cdot(x-3)$. Die Definitionsmenge ergibt demnach:

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{1;3\}}$$

Zur Bestimmung der Lösungsmenge gibt es grundsätzlich zwei verschiedene Methoden.

1. Man multipliziert die Ungleichung zunächst nur mit dem einen Nenner und erst in einem zweiten Schritt mit dem zweiten. Dabei ist ***jedesmal*** eine Fallunterscheidung notwendig. Wir erhalten also im Prinzip 4 Fälle.

2. Man untersucht ***vor*** der Multiplikation mit dem ***kompletten*** Hauptnenner die Vorzeichenbereiche des Hauptnenners und erhält nur zwei zu unterscheidende Fälle.

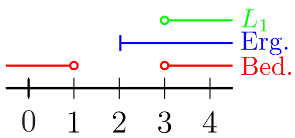
Ich verwende die zweite Methode. Dazu erstelle ich eine Vorzeichentabelle.

		1		3	
$(x-1)$	$-$	|	$+$	|	$+$
$(x-3)$	$-$	|	$-$	|	$+$
HN	$+$	|	$-$	|	$+$

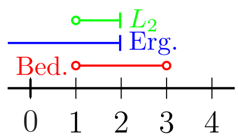
Der Hauptnenner ist also positiv unterhalb von 1 und oberhalb von 3, und negativ in dem Bereich dazwischen. Diese Bereiche sind demnach in der Fallunterscheidung zu verwenden.

$$\frac{x+1}{x-1} \geq \frac{x-5}{x-3} \quad |\cdot HN$$

$$\begin{array}{rcll}
\multicolumn{4}{c}{\underline{\text{für } x<1 \vee x>3:}} \\
(x+1)\cdot(x-3) & \geq & (x-5)\cdot(x-1) & \\
x^2-3x+x-3 & \geq & x^2-x-5x+5 & \\
x^2-2x-3 & \geq & x^2-6x+5 & |-x^2+6x+3 \\
4x & \geq & 8 & |:4 \\
x & \geq & 2 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\multicolumn{3}{c}{\underline{\text{für } 1<x<3:}} \\
& \cdot & \\
& \cdot & \\
& \cdot & \\
& \cdot & \\
x & \leq & 2
\end{array}$$

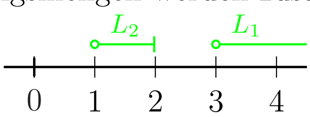


$L_1 = \{x|x>3\}$



$L_2 = \{x|1<x\leq 2\}$

Die Teil-Lösungsmengen werden zusammengefasst:



$$\boxed{L = L_1 \cup L_2 = \{x|1<x\leq 2 \vee x>3\}}$$

3.6 Aufgabe 6

$$\frac{1}{x+3} \geq \frac{4}{x+4} - \frac{3}{x+1}$$

Wie man leicht sieht, sind die drei Nenner teilerfremd. Daher ist der Hauptnenner das Produkt der Nenner: $\mathrm{HN} = (x+3)\cdot(x+4)\cdot(x+1)$. Die Definitionsmenge ergibt demnach:

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-1; -3; -4\}}$$

Um die Ungleichung zu lösen, muss diese mit dem Hauptnenner multipliziert werden. Weil ich feststellen muss, wo der Hauptnenner positiv bzw. negativ ist, erstelle ich eine Vorzeichentabelle. Dort hinein kommen alle Faktoren des Hauptnenners.

		-4		-3		-1	
$(x+3)$	$-$	|	$-$	|	$+$	|	$+$
$(x+4)$	$-$	|	$+$	|	$+$	|	$+$
$(x+1)$	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$+$
HN	$-$	|	$+$	|	$-$	|	$+$

Der Hauptnenner ist also positiv zwischen -4 und -3 sowie oberhalb von -1, und negativ in dem Bereich unterhalb von -4 sowie in dem Bereich zwischen -3 und -1. Diese Bereiche sind demnach in der Fallunterscheidung zu verwenden.

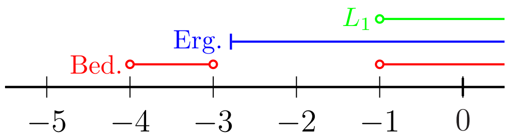
$$\frac{1}{x+3} \geq \frac{4}{x+4} - \frac{3}{x+1} \qquad |\cdot \mathrm{HN}$$

für $-4 < x < -3 \vee x > -1$:

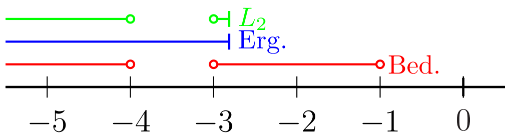
$$\begin{aligned}
1(x+4)(x+1) &\geq 4(x+3)(x+1) - 3(x+3)(x+4)\\
x^2+5x+4 &\geq 4x^2+16x+12-3x^2-21x-36\\
x^2+5x+4 &\geq x^2-5x-24 \quad |-x^2+5x-4\\
10x &\geq -28 \quad |:10\\
x &\geq -2,8
\end{aligned}$$

für $x < -4 \vee -3 < x < -1$:

$$\begin{aligned}
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
x &\leq -2,8
\end{aligned}$$

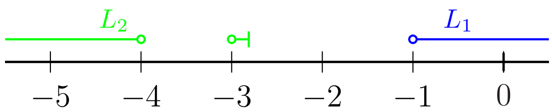


$L_1 = \{x | x > -1\}$



$L_2 = \{x | -4 \vee -3 < x \leq -2,8\}$

Die Teil-Lösungsmengen werden zusammengefasst. Es sind drei unzusammenhängende Einzelbereiche:



$$\boxed{L = L_1 \cup L_2 = \{x | x < -4 \vee -3 < x \leq -2,8 \vee x > -1\}}$$

3.7 Aufgabe 7

$$\frac{4x^2-5x-13}{4x^2-9} < \frac{5x-3}{2x+3} - \frac{3x-4}{2x-3}$$

Da man nicht leicht sieht, ob die Nenner teilerfremd sind, empfiehlt sich die klassische Nenneranalyse zur Hauptnennerbestimmung. Dort hinein kommen alle Faktoren des Hauptnenners.

$$\begin{array}{rcll|lcl}
4x^2-9 & = & (2x+3) & \cdot(2x-3) & \text{EF} & = & 1 \\
2x+3 & = & (2x+3) & & \text{EF} & = & 2x-3 \\
2x-3 & = & & (2x-3) & \text{EF} & = & 2x+3 \\
\hline
\text{HN} & = & (2x+3) & \cdot(2x-3) & & &
\end{array}$$

Unser Hauptnenner besteht aus 2 Faktoren. Damit ergibt sich der Definitionsbereich:

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-1,5; 1,5\}}$$

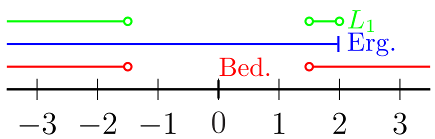
Um die Ungleichung zu lösen, muss diese mit dem Hauptnenner multipliziert werden. Weil ich feststellen muss, wo der Hauptnenner positiv bzw. negativ ist, erstelle ich eine Vorzeichentabelle. Dort hinein kommen alle Faktoren des Hauptnenners.

		$-1,5$		$1,5$	
$(2x+3)$	$-$	|	$+$	|	$+$
$(2x-3)$	$-$	|	$-$	|	$+$
HN	$+$	|	$-$	|	$+$

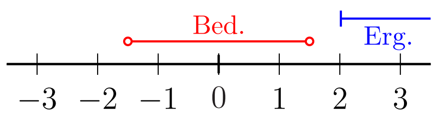
Der Hauptnenner ist also positiv unterhalb von $-1,5$ sowie oberhalb von $1,5$, und negativ in dem Bereich dazwischen. Diese Bereiche sind demnach in der Fallunterscheidung zu verwenden.

$$\frac{4x^2-5x-13}{4x^2-9} < \frac{5x-3}{2x+3} - \frac{3x-4}{2x-3} \quad |\cdot \text{HN}$$

$$\begin{array}{rcl|rcl}
 & & \text{für } x < -1,5 \lor x > 1,5: & \text{für } -1,5 < x < 1,5: & & \\
4x^2-5x-13 & < & (5x-3)\cdot(2x-3)-(3x-4)\cdot(2x+3) & & \cdot & \\
4x^2-5x-13 & < & 10x^2-15x-6x+9-6x^2-9x+8x+12 & & \cdot & \\
4x^2-5x-13 & < & 4x^2-22x+21 \quad |-4x^2+22x+13 & & \cdot & \\
17x & < & 34 \quad |:17 & & \cdot & \\
x & < & 2 & x & > & 2
\end{array}$$



$L_1 = \{x|x < -1,5 \lor 1,5 < x < 2\}$



$L_2 = \{\ \}$

$$\boxed{L = L_1 = \{x|x < -1,5 \lor 1,5 < x < 2\}}$$

3.8 Aufgabe 8

$$\frac{3}{x^2-9} - \frac{1}{x^2-3x} \geq -\frac{1}{x^2+3x}$$

Da man nicht leicht sieht, ob die Nenner teilerfremd sind, empfiehlt sich die klassische Nenneranalyse zur Hauptnennerbestimmung[2].

$$\begin{array}{lcllll|lcl}
x^2-9 & = & & (x+3) & \cdot(x-3) & & \text{EF} & = & x \\
x^2-3x & = & x & & \cdot(x-3) & & \text{EF} & = & x+3 \\
x^2+3x & = & x & \cdot(x+3) & & & \text{EF} & = & x-3 \\
\hline
\text{HN} & = & x & \cdot(x+3) & \cdot(x-3) & & & &
\end{array}$$

Unser Hauptnenner besteht aus 3 Faktoren. Damit ergibt sich der Definitionsbereich:

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 0; 3\}}$$

Um die Ungleichung zu lösen, muss diese mit dem Hauptnenner multipliziert werden. Weil ich feststellen muss, wo der Hauptnenner positiv bzw. negativ ist, erstelle ich eine Vorzeichentabelle. Dort hinein kommen alle Faktoren des Hauptnenners.

		-3		0		3	
x	$-$	|	$-$	|	$+$	|	$+$
$(x-3)$	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$+$
$(x+3)$	$-$	|	$+$	|	$+$	|	$+$
HN	$-$	|	$+$	|	$-$	|	$+$

Der Hauptnenner ist also positiv zwischen -3 und 0 sowie oberhalb von 3, und negativ in dem Bereich unterhalb von -3 sowie in dem Bereich zwischen 0 und 3. Diese Bereiche sind demnach in der Fallunterscheidung zu verwenden.

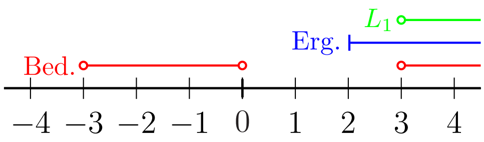
$$\frac{3}{x^2-9} - \frac{1}{x^2-3x} \geq -\frac{1}{x^2+3} \quad |\cdot \text{HN}$$

$\underline{\text{für } -3 < x < 0 \vee x > 3:}$

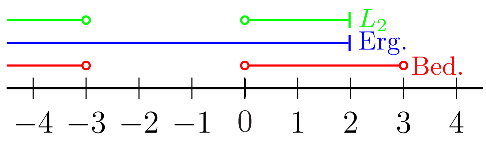
$$\begin{aligned}
3\cdot x - 1\cdot(x+3) &\geq -1\cdot(x-3) \\
3x - x - 3 &\geq -x+3 \\
2x - 3 &\geq x - 3 \quad |+x+3 \\
3x &\geq 6 \quad |:3 \\
x &\geq 2
\end{aligned}$$

$\underline{\text{für } x < -3 \vee 0 < x < 3:}$

$$\begin{aligned}
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
x &\leq 2
\end{aligned}$$

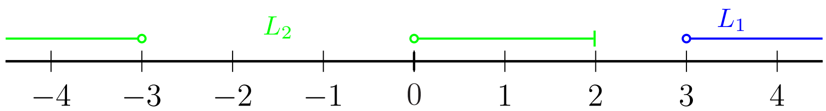


$L_1 = \{x | x > 3\}$



$L_2 = \{x | x < -3 \vee 0 < x \leq 2\}$

Die Teil-Lösungsmengen werden zusammengefasst:



$$\boxed{L = L_1 \cup L_2 = \{x | x < -3 \vee 0 < x \leq 2 \vee x > 3\}}$$

[2]Einzelheiten zur Hauptnennerbestimmung und den Erweiterungsfaktoren siehe hier: http://www.dk4ek.de/mathematik/bruchgl1.pdf

3.9 Aufgabe 9

$$\frac{x}{x-2} > \frac{5}{x-2}$$

Die Lücken im Definitionsbereich sind dort, wo die Nenner Null werden.

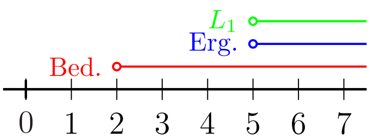
$$x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{2\}}$$

Um die Lösungsmenge zu bestimmen, muss die Ungleichung nach x aufgelöst werden.

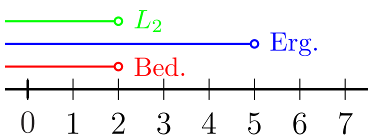
$$\frac{x}{x-2} > \frac{5}{x-2} \qquad | \cdot (x-2)$$

Da man einerseits grundsätzlich nicht weiß, ob $(x-2)$ positiv oder negativ ist, andererseits man aber das Ungleichungszeichen umkehren muss, wenn man die Ungleichung mit einer *negativen* Zahl multipliziert, ist eine ***Fallunterscheidung*** notwendig!

$$\begin{array}{c|c} \underline{\text{für } x > 2:} & \underline{\text{für } x < 2:} \\ x > 5 & x < 5 \end{array}$$

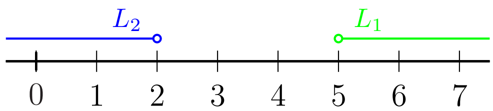


$L_1 = \{x | x > 5\}$



$L_2 = \{x | x < 2\}$

Die Teil-Lösungsmengen werden zusammengefasst:



$$\boxed{L = L_1 \cup L_2 = \{x | x < 2 \lor x > 5\}}$$

3.10 Aufgabe 10

$$\frac{x+1}{3x} \leq \frac{6}{3x}$$

Die Lücken im Definitionsbereich sind dort, wo die Nenner Null werden.

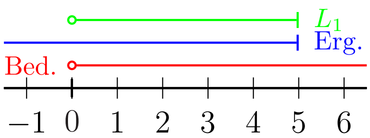
$$3x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

Um die Lösungsmenge zu bestimmen, muss die Ungleichung nach x aufgelöst werden.

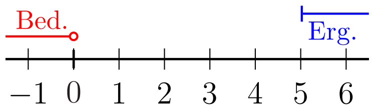
$$\frac{x+1}{3x} \leq \frac{6}{3x} \qquad | \cdot 3x$$

Da man einerseits grundsätzlich nicht weiß, ob der Faktor $3x$ positiv oder negativ ist, andererseits man aber das Ungleichungszeichen umkehren muss, wenn man die Ungleichung mit einer *negativen* Zahl multipliziert, ist eine ***Fallunterscheidung*** notwendig!

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\text{Für } x > 0:} & & \underline{\text{Für } x < 0:} \\
\begin{array}{rcll} x+1 & \leq & 6 & |-1 \\ x & \leq & 5 & \end{array} & & \begin{array}{rcl} & \vdots & \\ x & \geq & 5 \end{array}
\end{array}$$



$L_1 = \{x | 0 < x \leq 5\}$



$L_2 = \{\ \}$

$$\boxed{L = L_1 = \{x | 0 < x \leq 5\}}$$

3.11 Aufgabe 11

$$\frac{3}{2x+1} < \frac{4x+1}{2x+1}$$

Die Lücken im Definitionsbereich sind dort, wo die Nenner Null werden.

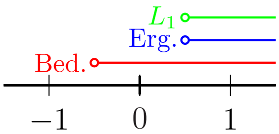
$$2x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=-0,5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{-0,5\}}$$

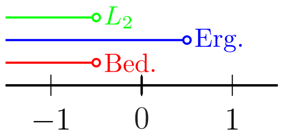
Um die Lösungsmenge zu bestimmen, muss die Ungleichung nach x aufgelöst werden.

$$\frac{3}{2x+1} < \frac{4x+1}{2x+1} \quad |\cdot(2x+1)$$

Da man einerseits grundsätzlich nicht weiß, ob der Faktor $(2x+1)$ positiv oder negativ ist, andererseits man aber das Ungleichungszeichen umkehren muss, wenn man die Ungleichung mit einer *negativen* Zahl multipliziert, ist eine ***Fallunterscheidung*** notwendig! Wenn $x > -0,5$ ist, ist der Faktor positiv, anderenfalls negativ.

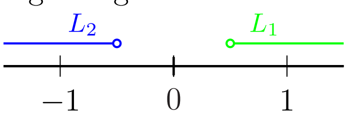
$$\begin{array}{ccc}
\underline{\text{Für } x > -0,5:} & \qquad & \underline{\text{Für } x < -0,5:} \\
\begin{array}{rcll}
3 & < & 4x+1 & |-4x-3 \\
-4x & < & -2 & |:(-4) \\
x & > & 0,5 &
\end{array}
& &
\begin{array}{c}
\vdots \\
\vdots \\
x \;<\; 0,5
\end{array}
\end{array}$$





$L_1 = \{x|x > 0,5\}$ $\qquad$ $L_2 = \{x < -0,5\}$

Die Teil-Lösungsmengen werden zusammengefasst:



$$\boxed{L = L_1 \cup L_2 = \{x|x < -0,5 \vee x > 0,5\}}$$

3.12 Aufgabe 12

$$\frac{x}{x+6} > \frac{x+1}{x+6}$$

Die Lücken im Definitionsbereich sind dort, wo die Nenner Null werden.

$$x+6=0 \quad \Rightarrow \quad x=-6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{-6\}}$$

Um die Lösungsmenge zu bestimmen, muss die Ungleichung nach x aufgelöst werden.

$$\frac{x}{x+6} > \frac{x+1}{x+6} \quad |\cdot(x+6)$$

Da man einerseits grundsätzlich nicht weiß, ob der Faktor $(x+6)$ positiv oder negativ ist, andererseits man aber das Ungleichungszeichen umkehren muss, wenn man die Ungleichung mit einer *negativen* Zahl multipliziert, ist eine ***Fallunterscheidung*** notwendig! Wenn $x > -6$ ist, ist der Faktor positiv, anderenfalls negativ.

Für $x > -6$:

$$\begin{array}{rcll} x & > & x+1 & \mid -x \\ 0 & > & 1 & \text{(falsche Aussage)} \end{array}$$

Für $x < -6$:

$$\begin{array}{rcll} & \vdots & & \\ 0 & < & 1 & \text{(wahre Aussage)} \end{array}$$

Der linke Fall hat zu einer **falschen Aussage** geführt, daher kommt von hier **keine** Lösung. Nur der rechte Fall führt zu einer **wahren Aussage**, daher ist die zugehörige Bedingung in der Überschrift zugleich die Lösungsmenge der Ungleichung. Eine graphische Darstellung der Zusammenhänge erscheint mir hier entbehrlich.

$$\boxed{L=\{x|x<-6\}}$$

3.13 Aufgabe 13

$$\frac{7}{x-3} \leq 2$$

Die Lücken im Definitionsbereich sind dort, wo der Nenner Null wird.

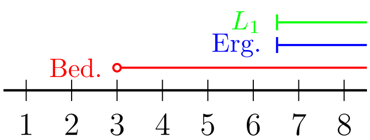
$$x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{3\}}$$

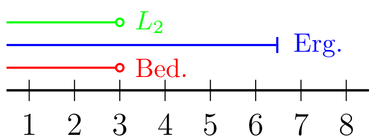
Um die Lösungsmenge zu bestimmen, muss die Ungleichung nach x aufgelöst werden.

$$\frac{7}{x-3} \leq 2 \quad | \cdot (x-3)$$

Da man einerseits grundsätzlich nicht weiß, ob der Faktor $(x-3)$ positiv oder negativ ist, andererseits man aber das Ungleichungszeichen umkehren muss, wenn man die Ungleichung mit einer *negativen* Zahl multipliziert, ist eine ***Fallunterscheidung*** notwendig! Wenn $x > 3$ ist, ist der Faktor positiv, anderenfalls negativ.

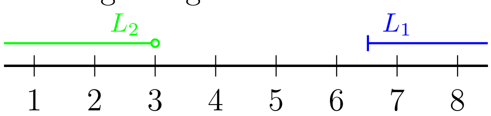
$$\begin{array}{rcll@{\qquad}rcl}
 & & \underline{\text{Für } x > 3:} & & & \underline{\text{Für } x < 3:} & \\
7 & \leq & 2 \cdot (x-3) & & & \cdot & \\
7 & \leq & 2x - 6 & | - 2x - 7 & & \cdot & \\
-2x & \leq & -13 & | : (-2) & & \cdot & \\
x & \geq & 6,5 & & x & \leq & 6,5
\end{array}$$





$L_1 = \{x | x \geq 6,5\}$ $\qquad$ $L_2 = \{x < 3\}$

Die Teil-Lösungsmengen werden zusammengefasst:



$$\boxed{L = L_1 \cup L_2 = \{x | x < 3 \vee x \geq 6,5\}}$$

3.14 Aufgabe 14

$$\frac{-3}{2x+5} < -1$$

Die Lücken im Definitionsbereich sind dort, wo der Nenner Null wird.

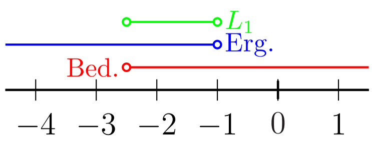
$$2x + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2,5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-2,5\}}$$

Um die Lösungsmenge zu bestimmen, muss die Ungleichung nach x aufgelöst werden.

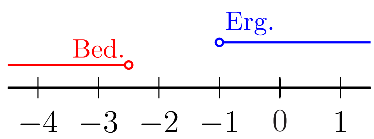
$$\frac{-3}{2x+5} < -1 \quad | \cdot (2x+5)$$

Da man einerseits grundsätzlich nicht weiß, ob der Faktor $(2x + 5)$ positiv oder negativ ist, andererseits man aber das Ungleichungszeichen umkehren muss, wenn man die Ungleichung mit einer *negativen* Zahl multipliziert, ist eine ***Fallunterscheidung*** notwendig! Wenn $x > -2,5$ ist, ist der Faktor positiv, anderenfalls negativ.

$$\begin{array}{rcll@{\qquad}rcl}
 & & \underline{\text{Für } x > -2,5:} & & \multicolumn{3}{c}{\underline{\text{Für } x < -2,5:}} \\
-3 & < & -1 \cdot (2x+5) & & & \cdot & \\
-3 & < & -2x - 5 & | + 2x + 3 & & \cdot & \\
2x & < & -2 & | : 2 & & \cdot & \\
x & < & -1 & & x & > & -1
\end{array}$$



$L_1 = \{x | -2,5 < x < -1\}$



$L_2 = \{\ \}$

$$\boxed{L = L_1 = \{x | -2,5 < x < -1\}}$$

3.15 Aufgabe 15

$$\frac{1}{x-4} > \frac{1}{2}$$

Die Lücken im Definitionsbereich sind dort, wo der Nenner Null wird.

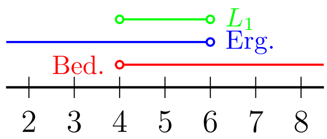
$$x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{4\}}$$

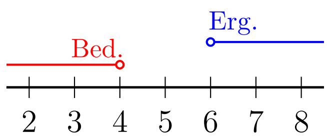
Um die Lösungsmenge zu bestimmen, muss die Ungleichung nach x aufgelöst werden. Dazu muss zuerst mit dem Hauptnenner multipliziert werden.

$$\frac{1}{x-4} > \frac{1}{2} \quad | \cdot (x-4) \cdot 2$$

Da man einerseits grundsätzlich nicht weiß, ob der Faktor $(x-4)$ positiv oder negativ ist, andererseits man aber das Ungleichungszeichen umkehren muss, wenn man die Ungleichung mit einer *negativen* Zahl multipliziert, ist eine ***Fallunterscheidung*** notwendig! Wenn $x > 4$ ist, ist der Faktor positiv, anderenfalls negativ.

$$\begin{array}{rcll@{\qquad}rcl}
\multicolumn{4}{c}{\underline{\text{Für } x > 4:}} & \multicolumn{3}{c}{\underline{\text{Für } x < 4:}} \\
2 & > & x-4 & |+4 & & \cdot & \\
6 & > & x & & & \cdot & \\
x & < & 6 & & x & > & 6
\end{array}$$





$L_1 = \{x | 4 < x < 6\}$ $\qquad$ $L_2 = \{\ \}$

$$\boxed{L = L_1 = \{x | 4 < x < 6\}}$$

3.16 Aufgabe 16

$$\frac{5}{6-3x} \leq -\frac{2}{3}$$

Die Lücken im Definitionsbereich sind dort, wo der Nenner Null wird.

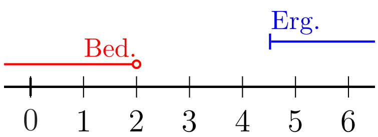
$$6 - 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{2\}}$$

Um die Lösungsmenge zu bestimmen, muss die Ungleichung nach x aufgelöst werden. Dazu muss zuerst mit dem Hauptnenner multipliziert werden.

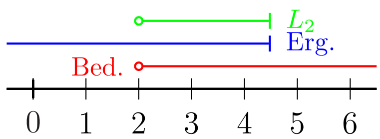
$$\frac{5}{6-3x} \leq -\frac{2}{3} \quad | \cdot (6-3x) \cdot 3$$

Da man einerseits grundsätzlich nicht weiß, ob der Faktor $(6-3x)$ positiv oder negativ ist, andererseits man aber das Ungleichungszeichen umkehren muss, wenn man die Ungleichung mit einer *negativen* Zahl multipliziert, ist eine ***Fallunterscheidung*** notwendig! Wenn $x < 2$ ist, ist der Faktor positiv, anderenfalls negativ.

$$\begin{array}{rclll} & \underline{\text{Für } x < 2:} & & & \underline{\text{Für } x > 2:} \\ 5 \cdot 3 & \leq & -2 \cdot (6-3x) & & \cdot \\ 15 & \leq & -12 + 6x & | - 6x - 15 & \cdot \\ -6x & \leq & -27 & | : (-6) & \cdot \\ x & \geq & 4,5 & & x \leq 4,5 \end{array}$$



$L_1 = \{ \ \}$



$L_2 = \{x | 2 < x \leq 4,5\}$

$$\boxed{L = L_2 = \{x | 2 < x \leq 4,5\}}$$

3.17 Aufgabe 17

$$\frac{2x}{3x-1} < -5$$

Die Lücken im Definitionsbereich sind dort, wo der Nenner Null wird.

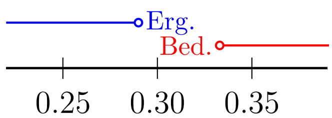
$$3x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \tfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{1}{3}\right\}}$$

Um die Lösungsmenge zu bestimmen, muss die Ungleichung nach x aufgelöst werden. Dazu muss zuerst mit dem Hauptnenner multipliziert werden.

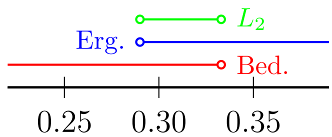
$$\frac{2x}{3x-1} < -5 \quad | \cdot (3x-1)$$

Da man einerseits grundsätzlich nicht weiß, ob der Faktor $(3x-1)$ positiv oder negativ ist, andererseits man aber das Ungleichungszeichen umkehren muss, wenn man die Ungleichung mit einer *negativen* Zahl multipliziert, ist eine ***Fallunterscheidung*** notwendig! Wenn $x > \frac{1}{3}$ ist, ist der Faktor positiv, anderenfalls negativ.

$$\begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{c}{\text{Für } x > \frac{1}{3} \approx 0,33:} \\ \hline 2x & < & -5 \cdot (3x-1) \\ 2x & < & -15x + 5 \quad | + 15 \\ 17x & < & 5 \quad | : 17 \\ x & < & \frac{5}{17} \approx 0,29 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{c}{\text{Für } x < \frac{1}{3} \approx 0,33:} \\ \hline & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ x & > & \frac{5}{17} \approx 0,29 \end{array}$$



$L_1 = \{\ \}$



$L_2 = \left\{x | \frac{5}{17} < x < \frac{1}{3}\right\}$

$$\boxed{L = L_2 = \left\{x | \tfrac{5}{17} < x < \tfrac{1}{3}\right\}}$$

3.18 Aufgabe 18

$$\frac{x+1}{x-1} > 0$$

Die Lücken im Definitionsbereich sind dort, wo der Nenner Null wird.

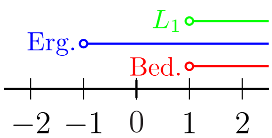
$$x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{1\}}$$

Um die Lösungsmenge zu bestimmen, muss die Ungleichung nach x aufgelöst werden. Dazu muss zuerst mit dem Hauptnenner multipliziert werden.

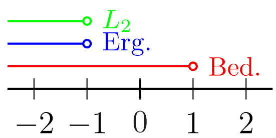
$$\frac{x+1}{x-1} > 0 \quad | \cdot (x-1)$$

Da man einerseits grundsätzlich nicht weiß, ob der Faktor $(x-1)$ positiv oder negativ ist, andererseits man aber das Ungleichungszeichen umkehren muss, wenn man die Ungleichung mit einer *negativen* Zahl multipliziert, ist eine ***Fallunterscheidung*** notwendig! Wenn $x > 1$ ist, ist der Faktor positiv, anderenfalls negativ.

$$\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\underline{\text{Für } x > 1:}} \\ x+1 & > & 0 & |-1 \\ x & > & -1 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\underline{\text{Für } x < 1:}} \\ & \vdots & \\ x & < & -1 \end{array}$$



$$L_1 = \{x | x > 1\}$$



$$L_2 = \{x | x < -1\}$$

$$\boxed{L = L_1 \cup L_2 = \{x | x < -1 \vee x > 1\}}$$

3.19 Aufgabe 19

$$\frac{3-x}{3+x} \leq 3$$

Die Lücken im Definitionsbereich sind dort, wo der Nenner Null wird.

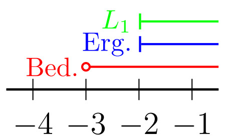
$$3 + x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}}$$

Um die Lösungsmenge zu bestimmen, muss die Ungleichung nach x aufgelöst werden. Dazu muss zuerst mit dem Hauptnenner multipliziert werden.

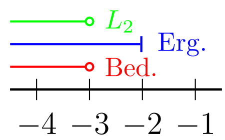
$$\frac{3-x}{3+x} \leq 3 \quad | \cdot (3+x)$$

Da man einerseits grundsätzlich nicht weiß, ob der Faktor $(3+x)$ positiv oder negativ ist, andererseits man aber das Ungleichungszeichen umkehren muss, wenn man die Ungleichung mit einer *negativen* Zahl multipliziert, ist eine ***Fallunterscheidung*** notwendig! Wenn $x > -3$ ist, ist der Faktor positiv, anderenfalls negativ.

$$\begin{array}{rcl} & \underline{\text{Für } x > -3:} & \\ 3-x & \leq & 3\cdot(3+x) \\ 3-x & \leq & 9+3x \quad | -2x-3 \\ -3x & \leq & 6 \quad | : (-3) \\ x & \geq & -2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} & \underline{\text{Für } x < -3:} & \\ & \vdots & \\ x & \leq & -2 \end{array}$$



$L_1 = \{x | x \geq -2\}$



$L_2 = \{x | x < -3\}$

$$\boxed{L = L_1 \cup L_2 = \{x | x < -3 \vee x \geq -2\}}$$

3.20 Aufgabe 20

$$\frac{2x-5}{4+3x} < 12$$

Die Lücken im Definitionsbereich sind dort, wo der Nenner Null wird.

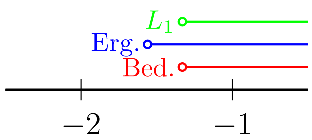
$$4+3x=0 \quad\Rightarrow\quad x=-\tfrac{4}{3}\approx -1,33 \quad\Rightarrow\quad \boxed{D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\tfrac{4}{3}\right\}}$$

Um die Lösungsmenge zu bestimmen, muss die Ungleichung nach x aufgelöst werden. Dazu muss zuerst mit dem Hauptnenner multipliziert werden.

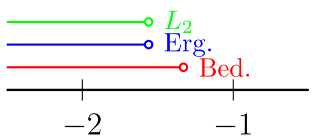
$$\frac{2x-5}{4+3x} < 12 \quad |\cdot(4+3x)$$

Da man einerseits grundsätzlich nicht weiß, ob der Faktor $(4+3x)$ positiv oder negativ ist, andererseits man aber das Ungleichungszeichen umkehren muss, wenn man die Ungleichung mit einer *negativen* Zahl multipliziert, ist eine ***Fallunterscheidung*** notwendig! Wenn $x > -\frac{4}{3}$ ist, ist der Faktor positiv, anderenfalls negativ.

$$\begin{array}{rcl}
 & \multicolumn{2}{l}{\underline{\text{Für } x > -\tfrac{4}{3}:}} \\
2x-5 & < & 12\cdot(4+3x) \\
2x-5 & < & 48+36x \quad |-36x+5 \\
-34x & < & 53 \quad |:(-34) \\
x & > & -\tfrac{53}{34}\approx -1,56
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rcl}
\multicolumn{3}{l}{\underline{\text{Für } x < -\tfrac{4}{3}:}} \\
 & & \\
 & \vdots & \\
x & < & -\tfrac{53}{34}
\end{array}$$



$L_1=\{x|x>-\frac{4}{3}\}$



$L_2=\{x|x<-\frac{53}{34}\}$

$$\boxed{L=L_1\cup L_2=\left\{x|x<-\tfrac{53}{34}\vee x\geq -\tfrac{4}{3}\right\}}$$

3.21 Aufgabe 21

$$\frac{5}{1-5x} > \frac{2}{1-2x}$$

Die Lücken im Definitionsbereich sind dort, wo einer der Nenner Null wird.

$$1-5x=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{5}=0,2$$

$$1-2x=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{2}=0,5$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{D=\mathbb{R}\setminus\left\{\tfrac{1}{5};\tfrac{1}{2}\right\}}$$

Um die Lösungsmenge zu bestimmen, muss die Ungleichung nach x aufgelöst werden. Dazu muss zuerst mit dem Hauptnenner multipliziert werden. Wie man leicht sieht, sind die beiden Nenner teilerfremd. Daher ist der Hauptnenner das Produkt der beiden Nenner:

$$\text{HN}=(1-5x)\cdot(1-2x)$$

Zur Bestimmung der Lösungsmenge gibt es grundsätzlich zwei verschiedene Methoden.

1. Man multipliziert die Ungleichung zunächst nur mit dem einen Nenner und erst in einem zweiten Schritt mit dem zweiten. Dabei ist ***jedesmal*** eine Fallunterscheidung notwendig. Wir erhalten also im Prinzip 4 Fälle.

2. Man untersucht ***vor*** der Multiplikation mit dem ***kompletten*** Hauptnenner die Vorzeichenbereiche des Hauptnenners und erhält nur zwei zu unterscheidende Fälle.

Ich verwende die zweite Methode. Dazu erstelle ich eine Vorzeichentabelle.

		0,2		0,5	
$(1-5x)$	+	|	−	|	−
$(1-2x)$	+	|	+	|	−
HN	+	|	−	|	+

Der Hauptnenner ist also positiv unterhalb von 0,2 sowie oberhalb von 0,5, und negativ in dem Bereich dazwischen. Diese Bereiche sind demnach in der Fallunterscheidung zu verwenden.

$$\frac{5}{1-5x} > \frac{2}{1-2x} \qquad |\cdot \text{HN}$$

$$\begin{array}{rcl|rcl}
\multicolumn{3}{c}{\underline{\text{für } x<0,2\vee x>0,5:}} & \multicolumn{3}{c}{\underline{\text{für } 0,2<x<0,5:}} \\
5\cdot(1-2x) & > & 2\cdot(1-5x) & & \cdot & \\
5-10x & > & 2-10x \quad |+10x & & \cdot & \\
5 & > & 2 \quad \text{(wahre Aussage)} & 5 & < & 2 \quad \text{(falsche Aussage)} \\
L_1 & = & \{x<0,2\vee x>0,5\} & L_2 & = & \{\,\}
\end{array}$$

$$\boxed{L=L_1=\{x|x<0,2\vee x>0,5\}}$$

3.22 Aufgabe 22

$$\frac{2x}{x+1} \leq \frac{4x-1}{2x}$$

Wie man leicht sieht, sind die beiden Nenner teilerfremd. Daher ist der Hauptnenner das Produkt der beiden Nenner:

$$\text{HN} = (x+1)\cdot 2x$$

Der Hauptnenner ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Die Definitionsmenge ergibt demnach:

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}}$$

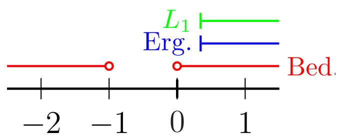
Ich erstelle ich eine Vorzeichentabelle, denn ich möchte mit dem Hauptnenner multiplizieren.

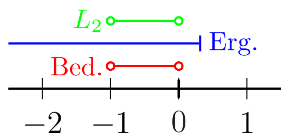
		-1		0	
$(x+1)$	$-$	|	$+$	|	$+$
$2x$	$-$	|	$-$	|	$+$
HN	$+$	|	$-$	|	$+$

Der Hauptnenner ist also positiv unterhalb von -1 sowie oberhalb von 0, und negativ in dem Bereich dazwischen. Diese Bereiche sind demnach in der nachfolgenden Fallunterscheidung zu verwenden.

$$\frac{2x}{x+1} \leq \frac{4x-1}{2x} \qquad |\cdot \text{HN}$$

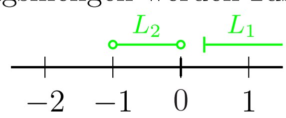
$$\begin{array}{rcl}
& & \underline{\text{für } x < -1 \vee x > 0:} \\
2x\cdot 2x & \leq & (4x-1)\cdot(x+1) \\
4x^2 & \leq & 4x^2+4x-x-1 \quad |-4x^2 \\
0 & \leq & 3x-1 \quad |-3x \\
-3x & \leq & -1 \quad |:(-3) \\
x & \geq & \frac{1}{3}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
& & \underline{\text{für } -1 < x < 0:} \\
& \cdot & \\
& \cdot & \\
& \cdot & \\
& \cdot & \\
x & \leq & \frac{1}{3}
\end{array}$$





$L_1 = \{x | x \geq \frac{1}{3}\}$ $\qquad$ $L_2 = \{x | -1 < x < 0\}$

Die Teil-Lösungsmengen werden zusammengefasst:



$$\boxed{L = L_1 \cup L_2 = \left\{x \middle| -1 < x < 0 \vee x \geq \tfrac{1}{3}\right\}}$$

3.23 Aufgabe 23

$$\frac{x}{x+1} < \frac{x}{x-1}$$

Wie man leicht sieht, sind die beiden Nenner teilerfremd. Daher ist der Hauptnenner das Produkt der Nenner:

$$\mathrm{HN} = (x+1) \cdot (x-1)$$

Die Definitionsmenge ergibt demnach:

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}}$$

Um die Ungleichung zu lösen, muss diese mit dem Hauptnenner multipliziert werden. Weil ich feststellen muss, wo der Hauptnenner positiv bzw. negativ ist, erstelle ich eine Vorzeichentabelle. Dort hinein kommen alle Faktoren des Hauptnenners.

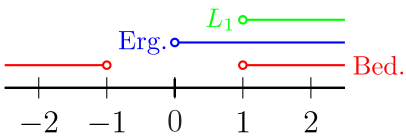
		-1		1	
$(x+1)$	$-$	|	$+$	|	$+$
$(x-1)$	$-$	|	$-$	|	$+$
HN	$+$	|	$-$	|	$+$

Der Hauptnenner ist also positiv unterhalb von -1 sowie oberhalb von 1, und negativ in dem Bereich dazwischen. Diese Bereiche sind demnach in der nachfolgenden Fallunterscheidung zu verwenden.

$$\frac{x}{x+1} < \frac{x}{x-1} \quad | \cdot \mathrm{HN}$$

<u>für $x < -1 \vee x > 1$:</u>

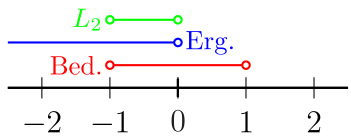
$$\begin{aligned} x \cdot (x-1) &< x \cdot (x+1) \\ x^2 - x &< x^2 + x \quad | - x^2 - x \\ -2x &< 0 \quad | : (-2) \\ x &> 0 \end{aligned}$$



$$L_1 = \{x | x > 1\}$$

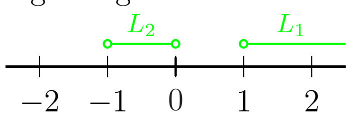
<u>für $-1 < x < 1$:</u>

$$\begin{aligned} &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x &< 0 \end{aligned}$$



$$L_2 = \{x | -1 < x < 0\}$$

Die Teil-Lösungsmengen werden zusammengefasst:



$$\boxed{L = L_1 \cup L_2 = \{x | -1 < x < 0 \vee x > 1\}}$$

3.24 Aufgabe 24

$$\frac{5x}{2-x} > \frac{-5x}{2+x}$$

Wie man leicht sieht, sind die beiden Nenner teilerfremd. Daher ist der Hauptnenner das Produkt der Nenner:

$$\text{HN} = (2-x)\cdot(2+x)$$

Die Definitionsmenge ergibt demnach:

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}}$$

Um die Ungleichung zu lösen, muss diese mit dem Hauptnenner multipliziert werden. Weil ich feststellen muss, wo der Hauptnenner positiv bzw. negativ ist, erstelle ich eine Vorzeichentabelle. Dort hinein kommen alle Faktoren des Hauptnenners.

		-2		2	
$(2-x)$	$+$	|	$+$	|	$-$
$(2+x)$	$-$	|	$+$	|	$+$
HN	$-$	|	$+$	|	$-$

Der Hauptnenner ist also positiv im Bereich zwischen -2 und 2, unterhalb von -2 und oberhalb von 2 ist er negativ. Diese Bereiche sind demnach in der nachfolgenden Fallunterscheidung zu verwenden.

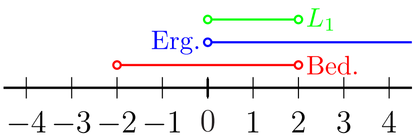
$$\frac{5x}{2-x} > \frac{-5x}{2+x} \quad |\cdot \text{HN}$$

für $-2 < x < 2$:

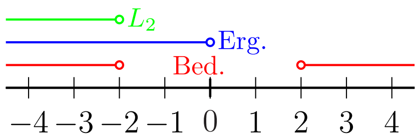
$$\begin{array}{rcl} 5x\cdot(2+x) & > & -5x\cdot(2-x) \\ 10x+5x^2 & > & -10x+5x^2 \quad |-5x^2+10x \\ 20x & > & 0 \quad |:20 \\ x & > & 0 \end{array}$$

für $x < -2 \vee x > 2$:

$$\begin{array}{rcl} & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ x & < & 0 \end{array}$$

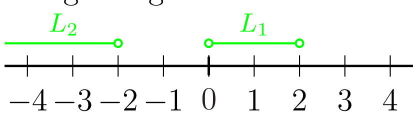


$L_1 = \{x | 0 < x < 2\}$



$L_2 = \{x | x < -2\}$

Die Teil-Lösungsmengen werden zusammengefasst:



$$\boxed{L = L_1 \cup L_2 = \{x | x < -2 \vee 0 < x < 2\}}$$

3.25 Aufgabe 25

$$\frac{2+3x}{4-2x} \leq \frac{2-3x}{4+2x}$$

Wie man leicht sieht, sind die beiden Nenner teilerfremd. Daher ist der Hauptnenner das Produkt der Nenner:

$$\mathrm{HN} = (4-2x)\cdot(4+2x)$$

Die Definitionsmenge ergibt demnach:

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}}$$

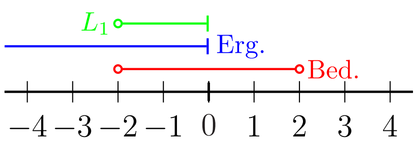
Um die Ungleichung zu lösen, muss diese mit dem Hauptnenner multipliziert werden. Weil ich feststellen muss, wo der Hauptnenner positiv bzw. negativ ist, erstelle ich eine Vorzeichentabelle. Dort hinein kommen alle Faktoren des Hauptnenners.

		-2		2	
$(4-2x)$	$+$	|	$+$	|	$-$
$(4+2x)$	$-$	|	$+$	|	$+$
HN	$-$	|	$+$	|	$-$

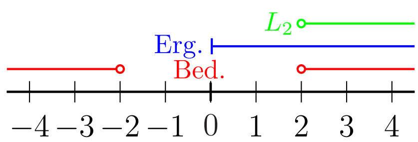
Der Hauptnenner ist also positiv im Bereich zwischen -2 und 2, unterhalb von -2 und oberhalb von 2 ist er negativ. Diese Bereiche sind demnach in der nachfolgenden Fallunterscheidung zu verwenden.

$$\frac{2+3x}{4-2x} \leq \frac{2-3x}{4+2x} \quad |\cdot \mathrm{HN}$$

$$\begin{array}{rcll} & & \underline{\text{für } -2 < x < 2:} & \qquad \underline{\text{für } x < -2 \vee x > 2:} \\ (2+3x)\cdot(4+2x) & \leq & (2-3x)\cdot(4-2x) & \qquad \cdot \\ 8+16x+6x^2 & \leq & 8-16x+6x^2 \quad |-6x^2+16x-8 & \qquad \cdot \\ 32x & \leq & 0 \quad |:32 & \qquad \cdot \\ x & \leq & 0 & \qquad x \geq 0 \end{array}$$

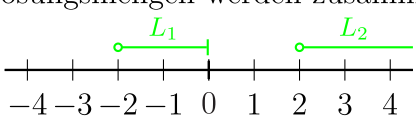


$L_1 = \{x | -2 < x \leq 0\}$



$L_2 = \{x | x > 2\}$

Die Teil-Lösungsmengen werden zusammengefasst:



$$\boxed{L = L_1 \cup L_2 = \{-2 < x \leq 0 \vee x > 2\}}$$

3.26 Aufgabe 26

$$\frac{6x+3}{4x+8} < \frac{3x-1}{2x+4}$$

Zuerst bestimme ich den Hauptnenner (durch geeignete Zerlegung der einzelnen Nenner) sowie die Erweiterungsfaktoren[3]:

$$\begin{array}{rcll|l}
(4x+8) & = & 2^2 & \cdot(x+2) & \text{EF} = 1 \\
(2x+4) & = & 2 & \cdot(x+2) & \text{EF} = 2 \\
\hline
\text{HN} & = & 2^2 & \cdot(x+2) &
\end{array}$$

Einschränkungen im Definitionsbereich gibt es dort, wo der Hauptnenner Null wird. Daraus ergibt sich:

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}}$$

Um die Ungleichung zu lösen, muss diese mit dem Hauptnenner multipliziert werden.

$$\frac{6x+3}{4x+8} < \frac{3x-1}{2x+4} \quad | \cdot \text{HN}$$

Da man einerseits grundsätzlich nicht weiß, ob der Hauptnenner positiv oder negativ ist, andererseits man aber das Ungleichungszeichen umkehren muss, wenn man die Ungleichung mit einer *negativen* Zahl multipliziert, ist eine ***Fallunterscheidung*** notwendig! Wenn $x > -2$ ist, ist der HN positiv, anderenfalls negativ.

$$\begin{array}{rcl|rcl}
\multicolumn{3}{c}{\underline{\text{Für } x > -2:}} & \multicolumn{3}{c}{\underline{\text{Für } x < -2:}} \\
6x+3 & < & 2\cdot(3x-1) & & \vdots & \\
6x+3 & < & 6x-2 \quad | -6x & & \vdots & \\
3 & < & -2 \quad \text{(falsche Aussage)} & 3 & > & -2 \quad \text{(wahre Aussage)}
\end{array}$$

Im rechts untersuchten Bereich ist das Ergebnis **immer wahr**, im linken **immer falsch**. Darum stellt der rechts untersuchte Bereich direkt die Lösungsmenge dar.

$$\boxed{L = \{x | x < -2\}}$$

[3]Einzelheiten zur Hauptnennerbestimmung und den Erweiterungsfaktoren siehe hier: http://www.dk4ek.de/mathematik/bruchgl1.pdf

3.27 Aufgabe 27

$$\frac{3x-8}{x-2} \geq \frac{3x+2}{x+3}$$

Wie man leicht sieht, sind die beiden Nenner teilerfremd. Daher ist der Hauptnenner das Produkt der Nenner:

$$\mathrm{HN} = (x-2)\cdot(x+3)$$

Die Definitionsmenge ergibt demnach:

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}}$$

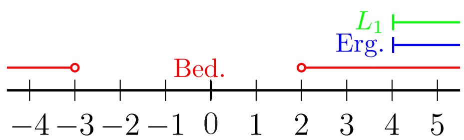
Um die Ungleichung zu lösen, muss diese mit dem Hauptnenner multipliziert werden. Weil ich feststellen muss, wo der Hauptnenner positiv bzw. negativ ist, erstelle ich eine Vorzeichentabelle. Dort hinein kommen alle Faktoren des Hauptnenners.

		-3		2	
$(x-2)$	$-$	|	$-$	|	$+$
$(x+3)$	$-$	|	$+$	|	$+$
HN	$+$	|	$-$	|	$+$

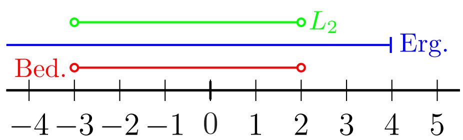
Der Hauptnenner ist also positiv unterhalb von -3 sowie oberhalb von 2, und negativ in dem Bereich dazwischen. Diese Bereiche sind demnach in der nachfolgenden Fallunterscheidung zu verwenden.

$$\frac{3x-8}{x-2} \geq \frac{3x+2}{x+3} \qquad |\cdot \mathrm{HN}$$

$$\begin{array}{rcll|rcl}
 & \multicolumn{3}{l}{\underline{\text{für } x < -3 \vee x > 2:}} & \multicolumn{3}{r}{\underline{\text{für } -3 < x < 2:}} \\
(3x-8)\cdot(x+3) & \geq & (3x+2)\cdot(x-2) & & & \cdot & \\
3x^2+9x-8x-24 & \geq & 3x^2-6x+2x-4 & |-3x^2+4x+24 & & \cdot & \\
5x & \geq & 20 \quad |:5 & & & \cdot & \\
x & \geq & 4 & & x & \leq & 4
\end{array}$$

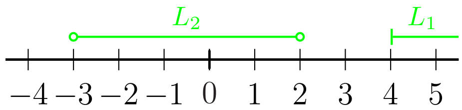


$L_1 = \{x | x \geq 4\}$



$L_2 = \{x | -3 < x < 2\}$

Die Teil-Lösungsmengen werden zusammengefasst:



$$\boxed{L = L_1 \cup L_2 = \{x | -3 < x < 2 \vee x \geq 4\}}$$

3.28 Aufgabe 28

$$\frac{2x+7}{x+4} + 2 \geq \frac{4x-3}{x-3}$$

Wie man leicht sieht, sind die beiden Nenner teilerfremd. Daher ist der Hauptnenner das Produkt der Nenner:

$$\text{HN} = (x+4)\cdot(x-3)$$

Die Definitionsmenge ergibt demnach:

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-4; 3\}}$$

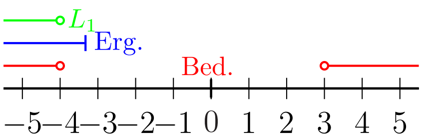
Um die Ungleichung zu lösen, muss diese mit dem Hauptnenner multipliziert werden. Weil ich feststellen muss, wo der Hauptnenner positiv bzw. negativ ist, erstelle ich eine Vorzeichentabelle. Dort hinein kommen alle Faktoren des Hauptnenners.

		-4		3	
$(x+4)$	$-$	|	$+$	|	$+$
$(x-3)$	$-$	|	$-$	|	$+$
HN	$+$	|	$-$	|	$+$

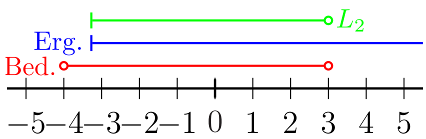
Der Hauptnenner ist also positiv unterhalb von -4 sowie oberhalb von 3, und negativ in dem Bereich dazwischen. Diese Bereiche sind demnach in der nachfolgenden Fallunterscheidung zu verwenden.

$$\frac{2x+7}{x+4} + 2 \geq \frac{4x-3}{x-3} \qquad |\cdot \text{HN}$$

$$\begin{array}{rcl|ccc}
\multicolumn{3}{c}{\underline{\text{für } x < -4 \vee x > 3:}} & \multicolumn{3}{c}{\underline{\text{für } -4 < x < 3:}} \\
(2x+7)\cdot(x-3) + 2\cdot(x+4)\cdot(x-3) & \geq & (4x-3)\cdot(x+4) & & \cdot & \\
2x^2 - 6x + 7x - 21 + 2x^2 - 6x + 8x - 24 & \geq & 4x^2 + 16x - 3x - 12 & & \cdot & \\
4x^2 + 3x - 45 & \geq & 4x^2 + 13x - 12 & & \cdot & \\
-10x & \geq & 33 \quad |:(-10) & & \cdot & \\
x & \leq & -3,3 & x & \geq & -3,3
\end{array}$$

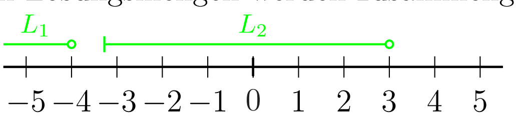


$L_1 = \{x | x < -4\}$



$L_2 = \{x | -3,3 \leq x < 3\}$

Die Teil-Lösungsmengen werden zusammengefasst:



$$\boxed{L = L_1 \cup L_2 = \{x | x < -4 \vee -3,3 \leq x < 3\}}$$

3.29 Aufgabe 29

$$\frac{3x-4}{2x+3} - 5 \leq \frac{10-14x}{4x-4}$$

Wie man leicht sieht, sind die beiden Nenner teilerfremd. Daher ist der Hauptnenner das Produkt der Nenner:

$$\text{HN} = (2x+3) \cdot (4x-4)$$

Die Definitionsmenge ergibt demnach:

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-1,5; 1\}}$$

Um die Ungleichung zu lösen, muss diese mit dem Hauptnenner multipliziert werden. Weil ich feststellen muss, wo der Hauptnenner positiv bzw. negativ ist, erstelle ich eine Vorzeichentabelle. Dort hinein kommen alle Faktoren des Hauptnenners.

		$-1,5$		1	
$(2x+3)$	$-$	|	$+$	|	$+$
$(4x-4)$	$-$	|	$-$	|	$+$
HN	$+$	|	$-$	|	$+$

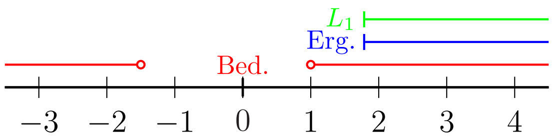
Der Hauptnenner ist also positiv unterhalb von $-1,5$ sowie oberhalb von 1, und negativ in dem Bereich dazwischen. Diese Bereiche sind demnach in der nachfolgenden Fallunterscheidung zu verwenden.

$$\frac{3x-4}{2x+3} - 5 \leq \frac{10-14x}{4x-4} \quad | \cdot \text{HN}$$

Aus Platzgründen bearbeite ich die beiden sich ergebenden Fälle nicht neben- sondern nacheinander.

$$\underline{\text{für } x < -1,5 \vee x > 1:}$$

$$\begin{aligned}
(3x-4)\cdot(4x-4) - 5\cdot(2x+3)\cdot(4x-4) &\leq (10-14x)\cdot(2x+3) \\
12x^2 - 12x - 16x + 16 - 40x^2 + 40x - 60x + 60 &\leq 20x + 30 - 28x^2 - 42x \\
-28x^2 - 48x + 76 &\leq -28x^2 - 22x + 30 \quad | + 28x^2 + 22x - 76 \\
-26x &\leq -46 \quad | : (-26) \\
x &\geq \frac{23}{13} \approx 1,77
\end{aligned}$$

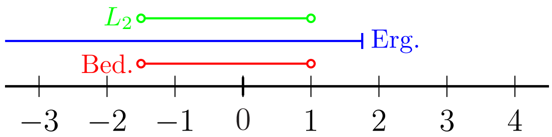


$$L_1 = \left\{ x | x \geq \frac{23}{13} \right\}$$

$$\underline{\text{für } -1,5 < x < 1:}$$

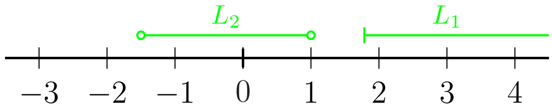
$$\vdots$$

$$x \leq \frac{23}{13} \approx 1,77$$



$$L_2 = \{x | -1,5 < x < 1\}$$

Die Teil-Lösungsmengen werden zusammengefasst:



$$\boxed{L = L_1 \cup L_2 = \left\{x | -1,5 < x < 1 \vee x \geq \tfrac{23}{13}\right\}}$$

3.30 Aufgabe 30

$$\frac{3}{x+1} + \frac{1}{x+3} \leq \frac{4}{x+4}$$

Wie man leicht sieht, sind die drei Nenner teilerfremd. Daher ist der Hauptnenner das Produkt der Nenner:

$$\text{HN} = (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x+4)$$

Die Definitionsmenge ergibt demnach:

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-4; -3; -1\}}$$

Um die Ungleichung zu lösen, muss diese mit dem Hauptnenner multipliziert werden. Weil ich feststellen muss, wo der Hauptnenner positiv bzw. negativ ist, erstelle ich eine Vorzeichentabelle. Dort hinein kommen alle Faktoren des Hauptnenners.

		-4		-3		-1	
$(x+1)$	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$+$
$(x+3)$	$-$	|	$-$	|	$+$	|	$+$
$(x+4)$	$-$	|	$+$	|	$+$	|	$+$
HN	$-$	|	$+$	|	$-$	|	$+$

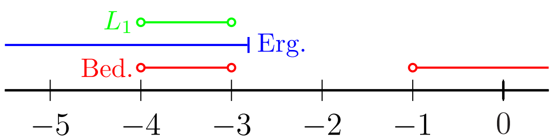
Der Hauptnenner ist also positiv zwischen -4 und -3 sowie oberhalb von -1, und negativ unterhalb von -4 sowie zwischen -3 und -1. Diese Bereiche sind demnach in der nachfolgenden Fallunterscheidung zu verwenden.

$$\frac{3}{x+1} + \frac{1}{x+3} \leq \frac{4}{x+4} \quad | \cdot \text{HN}$$

Aus Platzgründen bearbeite ich die beiden sich ergebenden Fälle nicht neben- sondern nacheinander.

$$\underline{\text{für } -4 < x < -3 \lor x > -1:}$$

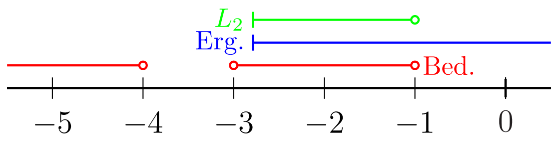
$$\begin{aligned}
3 \cdot (x+3) \cdot (x+4) + 1 \cdot (x+1) \cdot (x+4) &\leq 4 \cdot (x+1) \cdot (x+3) \\
3x^2 + 12x + 9x + 36 + x^2 + 4x + x + 4 &\leq 4x^2 + 12x + 4x + 12 \\
4x^2 + 26x + 40 &\leq 4x^2 + 16x + 12 \quad | - 4x^2 - 16x - 40 \\
10x &\leq -28 \quad | : 10 \\
x &\leq -2,8
\end{aligned}$$



$$L_1 = \{x | -4 < x < -3\}$$

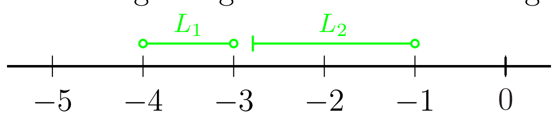
$$\underline{\text{für } x < -4 \lor -3 < x < -1:}$$

$$\vdots$$
$$x \geq -2,8$$



$$L_2 = \{x| -2,8 \leq x < -1\}$$

Die Teil-Lösungsmengen werden zusammengefasst:



$$\boxed{L = L_1 \cup L_2 = \{x| -4 < x < -3 \vee -2,8 \leq x < -1\}}$$

3.31 Aufgabe 31

$$\frac{x+2}{x^2+x-2} \geq \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

Da man nicht leicht sieht, ob die Nenner teilerfremd sind, empfiehlt sich die klassische Nenneranalyse zur Hauptnennerbestimmung[4].

$$\begin{array}{lcll|lcl}
x^2+x-2 & = & (x-1) & \cdot(x+2) & \text{EF} & = & 1 \\
x-1 & = & (x-1) & & \text{EF} & = & x+2 \\
x+2 & = & & (x+2) & \text{EF} & = & x-1 \\
\hline
\text{HN} & = & (x+3) & \cdot(x-3) & & &
\end{array}$$

Unser Hauptnenner besteht aus zwei Faktoren. Damit ergibt sich der Definitionsbereich:

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}}$$

Um die Ungleichung zu lösen, muss diese mit dem Hauptnenner multipliziert werden. Weil ich feststellen muss, wo der Hauptnenner positiv bzw. negativ ist, erstelle ich eine Vorzeichentabelle. Dort hinein kommen alle Faktoren des Hauptnenners.

$$\begin{array}{r|ccccc}
 & & -2 & & 1 & \\
\hline
(x-1) & - & | & - & | & + \\
(x+2) & - & | & + & | & + \\
\hline
\text{HN} & + & | & - & | & +
\end{array}$$

Der Hauptnenner ist also positiv unterhalb von -2 sowie oberhalb von 1, und negativ in dem Bereich dazwischen. Diese Bereiche sind demnach in der Fallunterscheidung zu verwenden.

$$\frac{x+2}{x^2+x-2} \geq \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} \quad | \cdot \text{HN}$$

Aus Platzgründen bearbeite ich die beiden sich ergebenden Fälle nicht neben- sondern nacheinander.

$$\underline{\text{für } x < -2 \vee x > 1:}$$

$$\begin{aligned}
x+2 &\geq 2\cdot(x+2) - 1\cdot(x-1) \\
x+2 &\geq 2x+4-x+1 \\
x+2 &\geq x+5 \\
2 &\geq 5
\end{aligned}$$

Dies ist eine **falsche Aussage**. Da sie im untersuchten Bereich immer falsch ist, ist die Teillösungsmenge L_1 leer.

$$L_1 = \{\ \}$$

[4]Einzelheiten zur Hauptnennerbestimmung und den Erweiterungsfaktoren siehe hier: http://www.dk4ek.de/mathematik/bruchgl1.pdf

$$\underline{\text{für } -2 < x < 1:}$$

$$\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ 2 & \leq & 5 \end{array}$$

Dies ist eine **wahre Aussage**. Da sie im untersuchten Bereich immer wahr ist, ist der untersuchte Bereich gleichzeitig die Teillösungsmenge L_2.

$$L_1 = \{x| -2 < x < 1\}$$

Damit ist auch die Gesamtlösungsmenge durch L_2 gegeben.

$$\boxed{L = L_2 = \{x| -2 < x < 1\}}$$

3.32 Aufgabe 32

$$\frac{1}{x-2} > \frac{5x-5}{x^2-4} - \frac{4}{x-1}$$

Da man nicht leicht sieht, ob die Nenner teilerfremd sind, empfiehlt sich die klassische Nenneranalyse zur Hauptnennerbestimmung[5].

$$\begin{array}{lcllr|lcl} x-2 & = & (x-2) & & & \text{EF} & = & (x+2)\cdot(x-1) = x^2+x-2 \\ x^2-4 & = & (x-2) & \cdot(x+2) & & \text{EF} & = & x-1 \\ x-1 & = & & & (x-1) & \text{EF} & = & (x+2)\cdot(x-2) = x^2-4 \\ \hline \text{HN} & = & (x-2) & \cdot(x+2) & \cdot(x-1) & & & \end{array}$$

Die Definitionsmenge ergibt demnach:

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1; 2\}}$$

Um die Ungleichung zu lösen, muss diese mit dem Hauptnenner multipliziert werden. Weil ich feststellen muss, wo der Hauptnenner positiv bzw. negativ ist, erstelle ich eine Vorzeichentabelle. Dort hinein kommen alle Faktoren des Hauptnenners.

		-2		1		2	
$(x-2)$	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$+$
$(x+2)$	$-$	|	$+$	|	$+$	|	$+$
$(x-1)$	$-$	|	$-$	|	$+$	|	$+$
HN	$-$	|	$+$	|	$-$	|	$+$

Der Hauptnenner ist also positiv zwischen -2 und 1 sowie oberhalb von 2, und negativ unterhalb von -2 sowie zwischen 1 und 2. Diese Bereiche sind demnach in der nachfolgenden Fallunterscheidung zu verwenden.

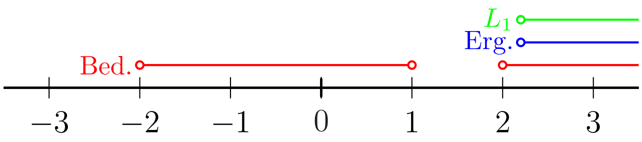
$$\frac{1}{x-2} > \frac{5x-5}{x^2-4} - \frac{4}{x-1} \quad | \cdot \text{HN}$$

Aus Platzgründen bearbeite ich die beiden sich ergebenden Fälle nicht neben- sondern nacheinander.

$$\underline{\text{für } -2 < x < 1 \lor x > 2:}$$

$$\begin{aligned} 1\cdot(x^2+x-2) &> (5x-5)\cdot(x-1) - 4\cdot(x^2-4) \\ x^2+x-2 &> 5x^2-5x-5x+5-4x^2+16 \\ x^2+x-2 &> x^2-10x+21 \quad | -x^2+10x+2 \\ 11x &> 23 \quad | :11 \\ x &> \frac{23}{11} \approx 2,09 \end{aligned}$$

[5] Einzelheiten zur Hauptnennerbestimmung und den Erweiterungsfaktoren siehe hier: http://www.dk4ek.de/mathematik/bruchgl1.pdf

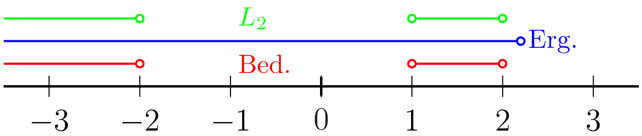


$$L_1 = \left\{x|x > \frac{23}{11}\right\}$$

<u>für $x < -2 \vee 1 < x < 2$:</u>

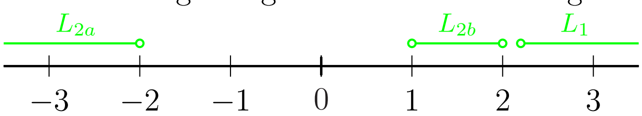
$$\vdots$$

$$x \quad < \quad \frac{23}{11} \approx 2,09$$



$$L_2 = \{x|x < -2 \vee 1 < x < 2\}$$

Die Teil-Lösungsmengen werden zusammengefasst:



$$\boxed{L = L_1 \cup L_2 = \left\{x|x < -2 \vee 1 < x < 2 \vee x > \tfrac{23}{11}\right\}}$$

3.33 Aufgabe 33

$$\frac{4}{1-|2x+1|} \leq \frac{7}{2}$$

Hier haben wir nicht nur einen Bruch, sondern zusätzlich auch einen Betrag. Wie man mit Beträgen umgeht, habe ich hier beschrieben:

http://www.dk4ek.de/mathematik/betrag.pdf

Zweckmäßigerweise löst man im ersten Schritt den Betrag auf. Man erhält dadurch zwei zu untersuchende Fälle, nämlich mit $2x+1 \geq 0$ und mit $2x+1<0$. Im nächsten Schritt wird dann mit dem (Haupt-) Nenner multipliziert, wodurch eine erneute Fallunterscheidung notwendig wird. Man erhält also insgesamt vier Fälle.

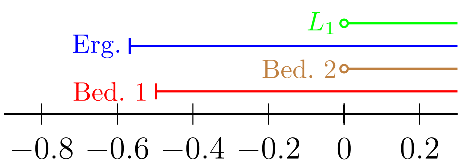
Aus Platzgründen werden die Fälle beim Auflösen des Betrages hintereinander dargestellt. Beginnen wir mit dem Fall, für den der Betragsinhalt positiv ist.

$$\underline{\text{für } x \geq -0{,}5:}$$

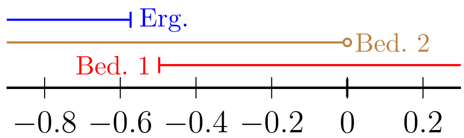
$$\begin{aligned}
\frac{4}{1-(2x+1)} &\leq \frac{7}{2} \\
\frac{4}{1-2x-1} &\leq \frac{7}{2} \\
\frac{4}{-2x} &\leq \frac{7}{2} \quad | \cdot 2 \\
-\frac{4}{x} &\leq 7 \quad | \cdot x
\end{aligned}$$

Für $x=0$ ist der linke Term nicht definiert. Daher muss dieser Fall nicht untersucht werden. Wir kommen daher zu nachfolgender Fallunterscheidung:

$$\begin{array}{ll}
\underline{\text{für } x > 0:} & \underline{\text{für } x < 0:} \\
-4 \leq 7x \quad | : 7 & \\
-\frac{4}{7} \leq x & -\frac{4}{7} \geq x
\end{array}$$



$L_1 = \{x | x > 0\}$



$L_2 = \{\ \}$

Es folgt der zweite Fall vom Auflösen des Betrages:

$$\underline{\text{für } x < -0{,}5:}$$

$$\begin{aligned}
\frac{4}{1+(2x+1)} &\leq \frac{7}{2} \\
\frac{4}{1+2x+1} &\leq \frac{7}{2} \\
\frac{4}{2x+2} &\leq \frac{7}{2} \quad | \cdot 2 \\
\frac{4}{x+1} &\leq 7 \quad | \cdot (x+1)
\end{aligned}$$

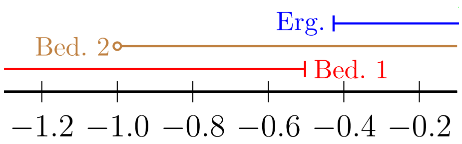
Für $x = -1$ ist der linke Term nicht definiert. Daher muss dieser Fall nicht untersucht werden. Wir kommen daher zu nachfolgender Fallunterscheidung:

$$\underline{\text{für } x > -1:}$$

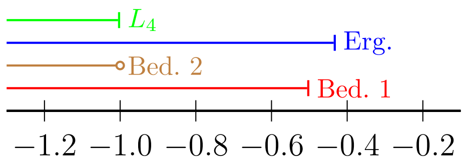
$$\begin{aligned}
4 &\leq 7 \cdot (x+1) \\
4 &\leq 7x + 7 \quad | -7 \\
-3 &\leq 7x \quad | : 7 \\
-\frac{3}{7} &\leq x
\end{aligned}$$

$$\underline{\text{für } x < -1:}$$

$$-\frac{3}{7} \geq x$$

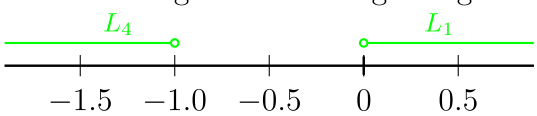


$L_3 = \{\ \}$



$L_4 = \{x | x < -1\}$

Zusammengefasste Lösungsmengen:



$$\boxed{L = L_1 \cup L_4 = \{x | x < -1 \vee x > 0\}}$$

Bleibt noch die Definitionsmenge nachzutragen. Die Lücken im Definitionsbereich sind dort, wo der Nenner Null wird. Das ist der Fall bei $x = 0$ und $x = -1$.

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}}$$