Mathematik 1, Blatt 2, Aufgabe 2b

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = ?$$

Zur Lösung wird der Bruch zunächst mit einer Partialbruchzerlegung[1] in die Summe zweier Brüche umgewandelt.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} &= \frac{a}{2k-1} + \frac{b}{2k+1} && \mid \cdot \text{HN} \\
1 &= (2k+1)\cdot a + (2k-1)\cdot b \\
1 &= 2ak + a + 2bk - b \\
1 &= (2a+2b)\cdot k + a - b
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man zwei Gleichungen zur Bestimmung der Parameter a und b:

$$\boxed{\begin{array}{cccc} (1) & 2a & +2b & = & 0 \\ (2) & a & -b & = & 1 \end{array}}$$

Dieses Gleichungssystem kann mit jedem beliebigen Verfahren[2] gelöst werden. Man erhält die Werte:

$$a = \frac{1}{2} \qquad b = -\frac{1}{2}$$

Mit diesen Werten kann die Aufgabenstellung umgeformt werden.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\cdot(2k-1)} - \frac{1}{2\cdot(2k+1)} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k+2} \right)
\end{aligned}$$

Mit dieser Umformung kann die unendliche Summe als Grenzwert einer Folge von Teilsummen aufgelöst werden.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k+2} \right)
\end{aligned}$$

Berechnen wir zunächst die endliche Teilsumme von $k = 1$ bis n.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k+2} \right) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10} \right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{14} \right) + \ldots \\
& \quad \ldots + \left(\frac{1}{4n-6} - \frac{1}{4n-2} \right) + \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2} \right)
\end{aligned}$$

[1] Einzelheiten zur Partialbruchzerlegung siehe hier: http://www.dk4ek.de/mathematik/partial.pdf
[2] Lösungsverfahren findet man z.B. hier: http://www.dk4ek.de/mathematik/lingl.pdf

Man sieht, dass sich jeweils zwei benachbarte Brüche gegeneinander aufheben. Lediglich der erste und der letzte Bruch bleiben übrig. Man kann das Ergebnis also wie folgt zusammenfassen.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k+2}\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{4n+2}$$

Damit kann jetzt die gesuchte Summe als Grenzwert der Teilsummenfolge gebildet werden.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4n+2}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n+2} \\
&= \frac{1}{2}-0 \\
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$