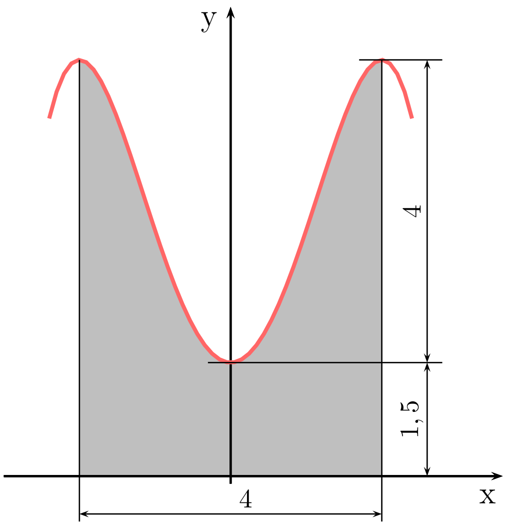
Aufgabe 1

a) Die nebenstehende Skizze zeigt ein Dichtprofil im Querschnitt. Die Maße sind in der Einheit *Zentimeter* angegeben. Die Form des Querschnittes wird durch eine ganzrationale spiegelsymmetrische Funktion beschrieben, die ein Polynom 4. Grades darstellt. Stellen Sie die zugehörige Funktionsgleichung auf!



b) Berechnen Sie das Volumen des Dichtprofils pro laufendem Meter! Gehen Sie dabei von folgender Funktion aus!

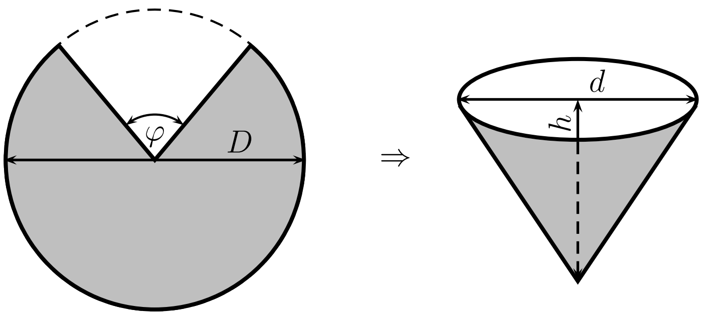
$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + \frac{3}{2}$$

c) Wie groß ist die Neigung (Steigung) des Dichtprofils an der steilsten Stelle?

Die Lösung finden Sie hier: http://www.dk4ek.de/mathematik/aufgabe1.pdf

Aufgabe 2

Aus einem kreisförmigen Blechstück mit dem Durchmesser D wird ein Sektor herausgeschnitten. Die Schnittkanten des verbleibenden Blechstückes werden zusammengefügt, so dass ein oben offener Kegel entsteht.



a) Welche Höhe h und welchen Durchmesser d muss dieser Kegel erhalten, damit das Volumen des Kegels möglichst groß wird?

b) Wie groß ist der Winkel φ des ausgeschnittenen Kreissektors?

Die Lösung finden Sie hier: http://www.dk4ek.de/mathematik/aufgabe2.pdf

Aufgabe 3

An ein bereits errichtetes Haus soll ein Lagerraum mit rechteckigem Grundriss und einem Flachdach angebaut werden. Der Raum soll 2,5 Meter hoch sein und eine Grundfläche von $12\,\mathrm{m}^2$ haben.

Bestimmen Sie die Länge a und die Breite b so, dass möglichst geringe Kosten entstehen.

Folgende Kosten entstehen im einzelnen für nachfolgend aufgelistete Posten:

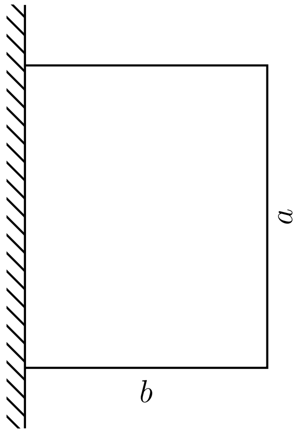


Abbildung 1: *Grundriss des Lagers*

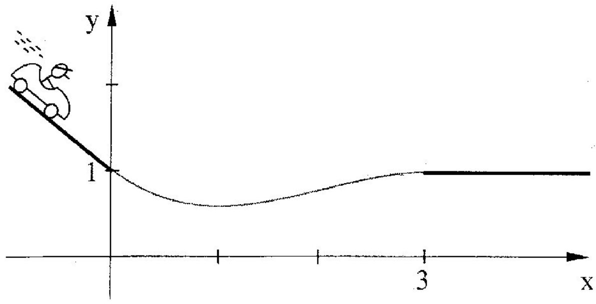
- Dach und Bodenplatte von zusammen für 250,- € je m^2
- Wände mit 76,80 € je m^2
- Befestigung des Daches an der Hauswand einschließlich Abdichtung mit 8,- € je laufendem Meter
- Türdurchbruch einschließlich Tür in der bereits bestehenden Hauswand von 850,- €

Bestimmen Sie die optimalen Werte für die Länge a und die Breite b sowie die Gesamtkosten K.

Die Lösung finden Sie hier: http://www.dk4ek.de/mathematik/aufgabe3.pdf

Aufgabe 5

Das Endstück einer Achterbahn besteht aus zwei graden Gleisstücken, die durch ein Kurvenstück **knickfrei** miteinander verbunden sind. Das erste Geradenstück kommt von links und verläuft mit einer Steigung von $m = -0,9$ bergab. Es endet 1 m über dem Boden. 3 m rechts davon beginnt der waagerechte Auslauf der Bahn 1 m über dem Boden. Das (waagerecht gemessen) 3 m lange Kurvenstück zwischen den beiden graden Teilen stellt ein Polynom dritten Grades dar.



1. Legen Sie ein Koordinatensystem in den Bahnverlauf, so dass die x-Achse auf dem Boden liegt und das linke Geradenstück an der y-Achse endet, wie in der Skizze dargestellt. Bestimmen Sie aus den Angaben das Polynom $f(x)$.

2. Gegeben sei die Funktion:

$$f(x) = -0,1x^3 + 0,6x^2 - 0,9x + 1$$

   Die Längeneinheit *Meter* wurde zur Vereinfachung weggelassen.

   - Wie nah kommt die Bahn dem Erdboden?
   - Wo befindet sich im ansteigen Bereich des Kurvenstückes die **steilste** Stelle? Welche Steigung hat die Kurve dort?

3. Als Unterbau für das Kurvenstück soll eine 40 cm-starke Betonwand gegossen werden. Wieviele Kubikmeter Beton sind erforderlich, wenn die Fundamente nicht mit eingerechnet werden?

Die Lösung finden Sie hier: http://www.dk4ek.de/mathematik/aufgabe5.pdf

Aufgabe 7

Berechnen Sie die Fläche, die von den Graphen der Fuktionen $f_1(x) = -x^2 + 6x - 5$ und $f_2(x) = x^2 - 8x + 7$ eingeschlossen wird. Skizzieren Sie vor Beginn der Rechnung die Fläche in einem geeigneten Koordinatensystem!

Die Lösung finden Sie hier: http://www.dk4ek.de/mathematik/aufgabe7.pdf

Aufgabe 9

Gegeben sind die Funktionen mit den Funktionsgleichungen:

$$f_1(x) = 2x^2 - 8x + 4 \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = 2x - 4$$

Berechnen Sie die Fläche, die zwischen den beiden Funktionsgraphen eingeschlossen wird! Fertigen Sie vor der Rechnung eine Skizze an!

Die Lösung finden Sie hier: http://www.dk4ek.de/mathematik/aufgabe9.pdf

Aufgabe 10

Ein Polynom dritten Grades $f_1(x)$ hat einen Wendepunkt bei $W(1|1)$. Die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 3x - 4$ berührt im Punkt B bei $x_B = 2$ den Graphen von $f_1(x)$ als Tangente.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms $f_1(x)$!

b) Untersuchen Sie die Funktion $f_1(x)$ auf Hoch-, Tief-, und Sattelpunkte und bestimmen Sie die Achsenabschnitte sowie die Schnittpunkte mit der Tangenten $f_2(x)$! Gehen Sie dabei von $f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ aus.

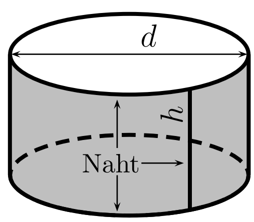
c) Skizzieren Sie die Graphen von Polynoms und Tangente!

d) Die gegebene Tangente mit der oben angegebenen Funktionsgleichung $f_2(x)$, die den Graphen von $f_1(x)$ in B berührt, schneidet diesen Graphen in einem weiteren Punkt P. Berechnen Sie die Fläche, die von den Funktionsgraphen von Polynom und Tangente zwischen P und B eingeschlossen wird!

Die Lösung finden Sie hier: http://www.dk4ek.de/mathematik/aufgabe10.pdf

Aufgabe 11

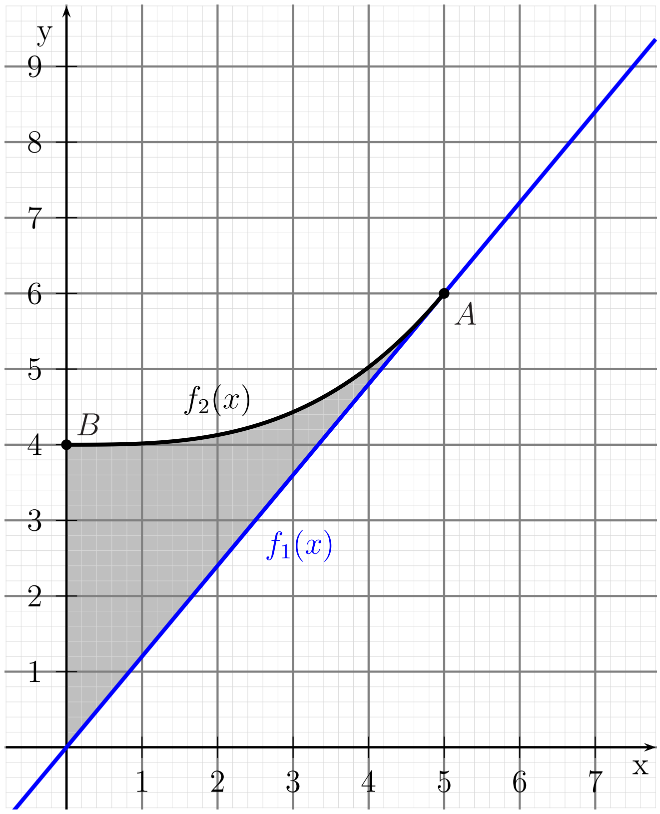
Es sollen zylindrische Dosen mit Boden und Deckel für eine Volumen von $V = 1\,\text{Liter}$ hergestellt werden. (Siehe nebenstehende Skizze.) Wie groß sind der **Durchmesser d** und die **Höhe h** zu wählen, damit die gesamte Nahtlänge – bestehend aus der Bördelnaht an Deckel und Boden sowie einer Naht an der Dosenseite – möglichst klein wird?



Die Lösung finden Sie hier: http://www.dk4ek.de/mathematik/aufgabe11.pdf

Aufgabe 12

An einen Berghang mit linearem Verlauf soll eine Ski-Sprungschanze gebaut werden. Der natürliche Berghang dient dabei als Anlaufstrecke.



Im unteren Teil biegt die Spur im Punkt **A** ohne Knick ab zum Schanzentisch im Punkt **B**. Das Kurvenstück, das den Hang mit dem Schanzentisch verbindet, stellt ein **Polynom dritten Grades** dar, wobei die Kurve auf der Kante des Schanzentisches im Punkt **B** einen Sattelpunkt hat.

Ein Koordinatensystem ist an den Hang angelegt, so dass der Koordinatenursprung genau senkrecht unter der Kante des Schanzentisches auf dem natürlichen Hang liegt. Der Schanzentisch bei Punkt **B** liegt eine **unbekannte** Höhe darüber. (**Achtung!** Sie können also **nicht** den aus der Skizze ablesbaren Wert als gegeben voraussetzen!)

Der Punkt **A**, bei dem das Kurvenstück ohne Knick in den natürlichen Hang einmündet, liegt bei **A**(**5m**|**6m**).

a): Bestimmen Sie die Lineare Funktion $f_1(x)$, die den Verlauf des Hanges darstellt!

b): Bestimmen Sie das Polynom dritten Grades $f_2(x)$, das den Verlauf des gebogenen Kurvenstückes darstellt!

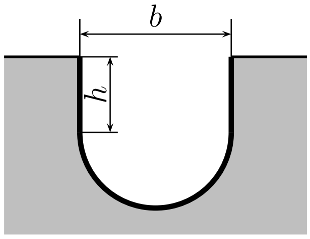
c): Unter dem gebogenen Kurvenstück muss ein Unterbau aus Beton angefertigt werden. Wieviel m^3 Beton ist (ohne Berücksichtigung des Fundamentes) erforderlich, wenn der Unterbau 80 cm breit werden soll?

d): Wie groß ist die Steigung des gebogenen Kurvenstückes genau in seiner Mitte (waagerecht gemessen)?

Die Lösung finden Sie hier: http://www.dk4ek.de/mathematik/aufgabe12.pdf

Aufgabe 15

Ein Kanal soll einen halbkreisförmigen Boden erhalten. Die Kanalwände verlaufen senkrecht.



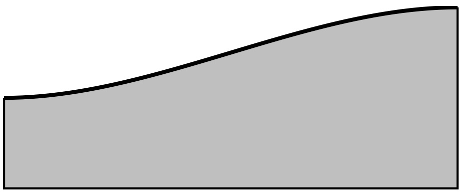
a) Wie groß müssen Breite b und Höhe h (Höhe der geraden Wände) des Kanals sein, damit bei gegebenem Kanal-Querschnitt A die benetzte Fläche des Kanals möglichst klein wird? Lösen Sie das Problem mit Hilfe der Differentialrechnung!

b) Interpretieren Sie das Ergebnis!

Die Lösung finden Sie hier: http://www.dk4ek.de/mathematik/aufgabe15.pdf

Aufgabe 16

Auf dem Lüdenscheider Rathausplatz stehen aneinandergereihte Betonsteine zur Dekoration mit der nebenstehend dargestellten Form. Die Steine sind auf der linken Seite 30 cm und auf der rechten Seite 60 cm hoch. Sie sind 1,5 m lang und 20 cm dick. Die Oberkante der Steine wird mit einem Polynom 3. Grades beschrieben. Dieses Polynom hat am linken Rand des Steines einen Tiefpunkt und am rechten einen Hochpunkt.



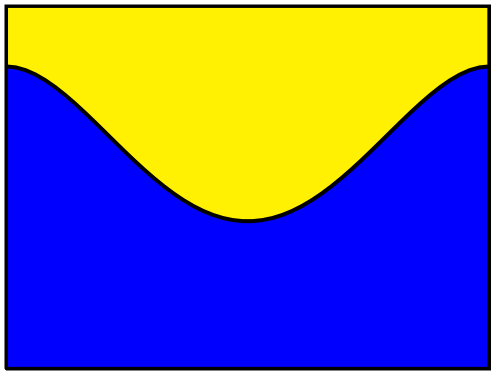
a) Legen Sie in die linke untere Ecke des Betonsteins ein Koordinatenkreuz und bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms. (Verwenden Sie *Dezimeter* als Längeneinheit.)

b) Die Masse des Betonsteins soll mit Hilfe der Integralrechnung bestimmt werden. Die Dichte des Betons beträgt $\varrho = 2{,}0\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}$.

Die Lösung finden Sie hier: http://www.dk4ek.de/mathematik/aufgabe16.pdf

Aufgabe 17

Auf einem Bildschirm mit der Auflösung $1\,600 \times 1\,200$ Bildpunkten soll eine Hintergrundgrafik entsprechend nebenstehendem Aufbau dargestellt werden. Der untere Bildbereich ist blau, der obere gelb. Die Trennlinie wird durch ein Polynom vierten Grades dargestellt. An beiden Bildrändern hat die Funktion einen Hochpunkt, der jeweils $1\,000$ Pixel hoch liegt. In der Mitte verläuft die Funktion in einer Höhe von 488 Pixeln über dem unteren Bildrand.

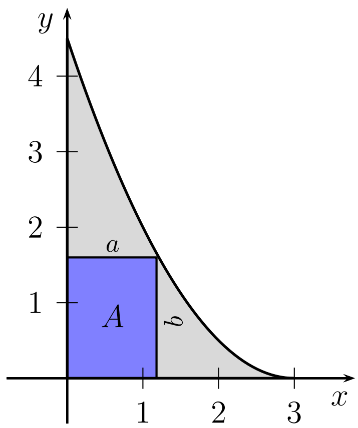


a) Zur Programmierung wird die zugehörige Funktionsgleichung benötigt. Legen Sie in die linke untere Bildecke den Ursprung eines Koordinatensystems. Als Einheit verwenden Sie zweckmäßigerweise nicht 1 Pixel, sondern 1 kPi (1 Kilopixel=1000 Pixel).

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Integralrechnung die Anzahl der blauen und gelben Pixel!
Die Lösung finden Sie hier: http://www.dk4ek.de/mathematik/aufgabe17.pdf

Aufgabe 19

Eine Glasscherbe mit einem rechten Winkel hat eine parabelförmige Bruchkante. Die Parabel hat bei $x_0 = 3$ ihren Scheitelpunkt und schneidet bei $y_0 = 4{,}5$ die y-Achse. Die Einheit ist dabei Dezimeter. Aus dieser Scherbe soll eine **möglichst große rechteckige Fläche *A*** herausgeschnitten werden, wie nebenstehend dargestellt.



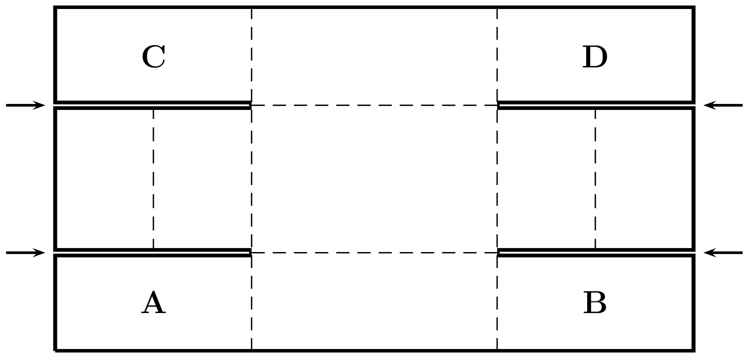
a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Parabel!

b) Bestimmen Sie die Seitenlängen a und b des optimalen Rechtecks! Gehen Sie dabei von der Funktion $f(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 4{,}5$ aus.

c) Wieviel Prozent des Glases fällt dabei als ungenutzter Verschnitt an?

Die Lösung finden Sie hier: http://www.dk4ek.de/mathematik/aufgabe19.pdf

Aufgabe 20 (60 P.)



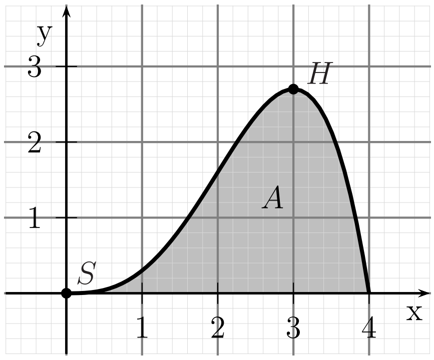
Aus einem rechteckigen Stück Pappe mit den Abmessungen 30 mal 60 Zentimeter soll ein oben offener quaderförmiger Karton hergestellt werden. Dazu wird die Pappe an den vier mit Pfeil gekennzeichneten Stellen eingeschnitten. Danach werden die vier dabei entstandenden Laschen **A**, **B**, **C** und **D** rechtwinklig nach oben hochgebogen. Anschließend wird die Pappe entlang der gestrichelten Linien in der Verlängerung der Einschnitte rechtwinklig hochgebogen. Dadurch kommt Lasche **A** auf Lasche **C** und Lasche **B** auf Lasche **D** zu liegen. Falls die Laschen zu lang sind, werden sie zuvor noch ein Stück gekürzt, dass es passt. Zum Schluss werden noch die Seitenteile rechts und links hochgebogen und um die Laschen **A**/**C** bzw. **B**/**D** zur Innenseite des dabei entstehenden Kartons herumgefaltet. Das jeweilige Seitenteil bedeckt dadurch die beiden zugehörigen Eck-Laschen sowohl von außen als auch von innen genau ganz ohne irgendwo „überzustehen“ oder eine Lücke zu lassen. Die Seitenteile sind also genau doppelt so lang, wie die Breite der Eck-Laschen.

Wie tief müssen die Einschnitte gemacht werden, damit ein Behälter mit **möglichst großem Volumen** entsteht? Geben Sie auch die **Abmessungen** des Behälters (Länge, Breite und Höhe) sowie sein **Volumen** an! Müssen die Laschen **A** bis **D** tatsächlich gekürzt werden?

Die Lösung finden Sie hier: http://www.dk4ek.de/mathematik/aufgabe20.pdf

Aufgabe 21 (60 P.)

Eine Kinderrutschbahn hat die Form eines Polynoms 4. Grades. Die Rutschbahn hat links am unteren Endpunkt S im Koordinatenursprung einen Sattelpunkt und oben am Startpunkt H einen Hochpunkt. Dieser Hochpunkt liegt 2,70 m über dem Erdboden und waagerecht gemessen 3,00 m vom Endpunkt S entfernt. Rechts vom Hochpunkt sind Treppenstufen eingebaut, damit die Kinder zum Startpunkt hochklettern können. Es wird also auf der rechten Seite nach H hinaufgeklettert, und gerutscht wird dann von H nach S hinunter.



a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Rutsche. Während der Berechnungen können Sie die Einheit *Meter* zur Vereinfachung weglassen.

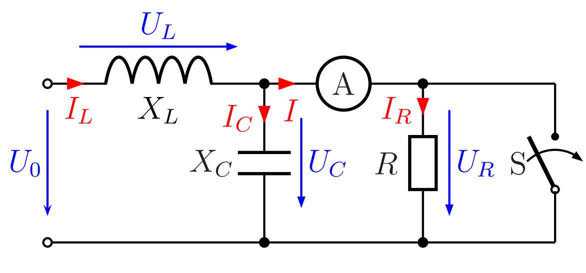
b) An welcher Stelle (horizontale Entfernung vom Endpunkt S und Höhe über dem Erdboden) hat die Rutschbahn ihre steilste Stelle? Wie groß ist dort ihre Steigung? Gehen Sie dabei von der Funktionsgleichung $f(x) = -0{,}1x^4 + 0{,}4x^3$ aus.

c) Berechnen Sie die markierte Fläche A, die unter der kompletten Rutsche liegt. Hier soll eine Stützmauer errichtet werden, die die Rutsche trägt.
Anmerkung: Die rechte Begrenzung der Fläche kann nicht aus der Skizze **abgelesen** werden, sie muss **berechnet** werden!

Die Lösung finden Sie hier: http://www.dk4ek.de/mathematik/aufgabe21.pdf

Aufgabe 22 (60 P.)

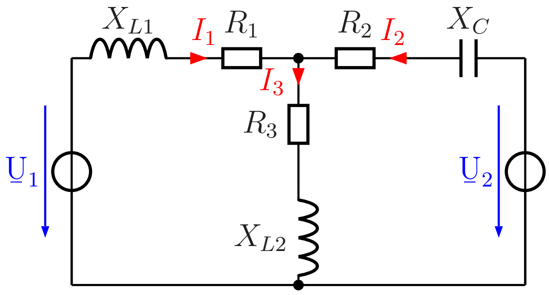
Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Sie wird an einer sinusförmigen Wechselspannung mit $U_0 = 12\,\mathrm{V}$ betrieben. Mit dieser Wechselspannung ergeben sich folgende Werte:
$X_L = 80\,\Omega$
$X_C = 80\,\Omega$
Auch der Widerstand ist bekannt:
$R = 240\,\Omega$



Wie verändert sich der Strom I, der am Strommesser abgelesen werden kann, wenn der Schalter geschlossen wird? Geben Sie dazu den Strom I bei geöffnetem und bei geschlossenen Schalter an. Interpretieren Sie das Ergebnis!
Die Lösung finden Sie hier: http://www.dk4ek.de/mathematik/aufgabe22.pdf

Aufgabe 24

In nebenstehender Wechselstrom-Schaltung sind folgende Werte bekannt:
$\underline{R}_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$
$\underline{R}_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$
$\underline{R}_3 = 2\,\mathrm{k\Omega}$
$\underline{X}_{L1} = j4\,\mathrm{k\Omega}$
$\underline{X}_{L2} = j1\,\mathrm{k\Omega}$
$\underline{X}_C = -j3\,\mathrm{k\Omega}$
$\underline{U}_1 = 22\,\mathrm{V}$
$\underline{U}_2 = 15\,\mathrm{V}$



Die Schaltung kann zur Berechnung der Ströme $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_3$ mit diesem Komplexen Gleichungssystem beschrieben werden:

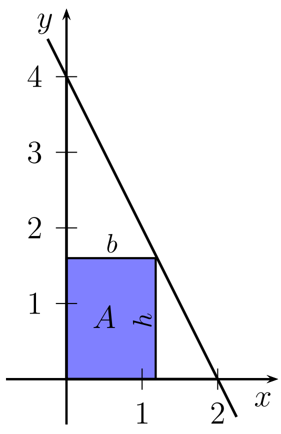
$$\boxed{\begin{array}{llcl} (1) & (\underline{X}_{L1} + \underline{R}_1 + \underline{R}_3 + \underline{X}_{L2}) \cdot \underline{I}_1 & +(\underline{R}_3 + \underline{X}_{L2}) \cdot \underline{I}_2 & = \underline{U}_1 \\ (2) & (\underline{R}_3 + \underline{X}_{L2}) \cdot \underline{I}_1 & +(\underline{X}_C + \underline{R}_2 + \underline{R}_3 + \underline{X}_{L2}) \cdot \underline{I}_2 & = \underline{U}_2 \end{array}}$$

a) Berechnen Sie damit die Ströme $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_3$!
b) Bestimmen Sie die Beträge der Ströme I_1, I_2 und I_3!

Die Lösung finden Sie hier: http://www.dk4ek.de/mathematik/aufgabe24.pdf

Aufgabe 25

Die Gerade der Linearen Funktion $f(x)$ schneidet die x-Achse bei $x_0 = 2$ und die y-Achse bei $y_0 = 4$. Unter der Geraden soll ein möglichst großes Rechteck mit der Breite b und der Höhe h angelegt werden, wie in der Skizze nebenstehend dargestellt.



a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ der Geraden!

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Differenzialrechnung die Breite b und die Höhe h des optimalen Rechteckes.

c) Wie groß wird damit die gesuchte Rechteckfläche?

Die Lösung finden Sie hier: http://www.dk4ek.de/mathematik/aufgabe25.pdf