Quadratische Funktion

Wolfgang Kippels

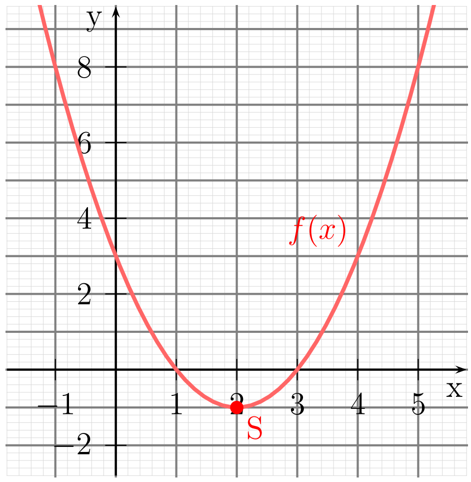
20. Januar 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Zusammenstellung der Grundlagen

Nebenstehend ist eine typische Quadratische Funktion dargestellt. Das Beispiel stellt diese Funktion dar:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$



Der tiefste Punkt der Parabel[1] heißt ***Scheitelpunkt*** der Parabel. Er wird meist mit dem Buchstaben **S** bezeichnet.

Eine Quadratische Funktion ist jede Funktion, die sich in der Normalform schreiben lässt:

Normalform

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

Der Parameter **a** wird **Formfaktor** genannt, weil er die Form der Parabel bestimmt. Ist **a** groß, ist die Parabel schmal, ist **a** negativ, ist die Parabel nach unten geöffnet.

Der Parameter **c** gibt den **Abschnitt auf der y-Achse** an.

Die x-Koordinate $\mathbf{x_s}$ des Scheitelpunktes kann bestimmt werden mit Hilfe der Formel:

Scheitelpunktbestimmung

$$\boxed{x_s = -\frac{b}{2a}}$$

Die Funktionsgleichung kann nicht nur in der Normalform, sondern auch in der Scheitelpunktform angegeben werden:

Scheitelpunktform:

$$\boxed{f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s}$$

Hierin sind $\mathbf{x_s}$ und $\mathbf{y_s}$ die Koordinaten des Scheitelpunktes $S(x_s|y_s)$ und **a** der Formfaktor.

Verschiebt man den Graphen einer beliebige Funktion $f(x)$ (nicht nur einer Quadratischen Funktion) um den Wert x_v nach rechts und y_v nach oben, so hat die verschobene Funktion $f_v(x)$ die Funktionsgleichung:

Verschobene Funktion

$$\boxed{f_v(x) = f(x - x_v) + y_v}$$

[1] Wenn die Parabel nach unten geöffnet ist, ist der Scheitelpunkt der höchste Punkt.

2 Aufgaben

2.1 Aufgabe 1:

Geben Sie Quadratische Funktion $f(x)$ mit dem Formfaktor 1 an, deren Scheitelpunkt $S(4|-7)$ lautet!

2.2 Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion $f_1(x) = 2x^2 - 4x + 3$. Geben Sie die Funktion $f_2(x)$ an, die gegenüber der Funktion $f_1(x)$ um 3 Einheiten nach rechts und 2 Einheiten nach unten verschoben ist!

2.3 Aufgabe 3:

Die Quadratische Funktion hat den Scheitelpunkt $S(4|1)$. Der Graph schneidet die y-Achse bei $y_0 = -7$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

2.4 Aufgabe 4:

Bestimmen Sie den Scheitelpunkt, die Nullstellen und den Wertebereich der Quadratischen Funktion $f(x) = 3x^2 - 12x + 15$!

2.5 Aufgabe 5:

Bestimmen Sie den Scheitelpunkt, die Nullstellen und den Wertebereich der Quadratischen Funktion $f(x) = -16x^2 - 16x + 5$!

2.6 Aufgabe 6:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Parabel mit $f_1(x) = 4x^2 - 9x + 1$ und der Geraden mit $f_2(x) = 3x + 17$!

2.7 Aufgabe 7:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Parabel mit $f_1(x) = 9x^2 + 12x - 4$ und der Geraden mit $f_2(x) = -12x + 5$!

2.8 Aufgabe 8:

Gegeben ist die Quadratische Funktion $f(x) = -2x^2 + 5x - 3$. Geben Sie den Scheitelpunkt an und bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$. Welchen Definitionsbereich hat die Umkehrfunktion?

2.9 Aufgabe 9:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der beiden Parabeln mit den Funktionsgleichungen $f_1(x) = 4x^2 + 3x - 8$ und $f_2(x) = 7x^2 + 9x + 7$.

2.10 Aufgabe 10:

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Quadratischen Funktion, deren Graph durch die Punkte $P_1(-1|8)$, $P_2(2|-1)$ und $P_3(4|3)$ verläuft.

2.11 Aufgabe 11:

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Linearen Funktion $f_2(x)$, deren Graph die Parabel der Quadratischen Funktion $f_1(x) = x^2 - 4x + 4$ bei $x_b = 4$ als Tangente berührt.

2.12 Aufgabe 12:

Der Graph der Quadratischen Funktion $f(x)$ hat den Scheitelpunkt $S(3|2)$ und verläuft durch den Punkt $P(5|10)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von $f(x)$!

3 Lösungen

3.1 Aufgabe 1:

Geben Sie Quadratische Funktion $f(x)$ mit dem Formfaktor 1 an, deren Scheitelpunkt $S(4|-7)$ lautet!

Lösung: Es bietet sich an, die Scheitelpunktform der Funktionsgleichung zu verwenden.

$$f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$

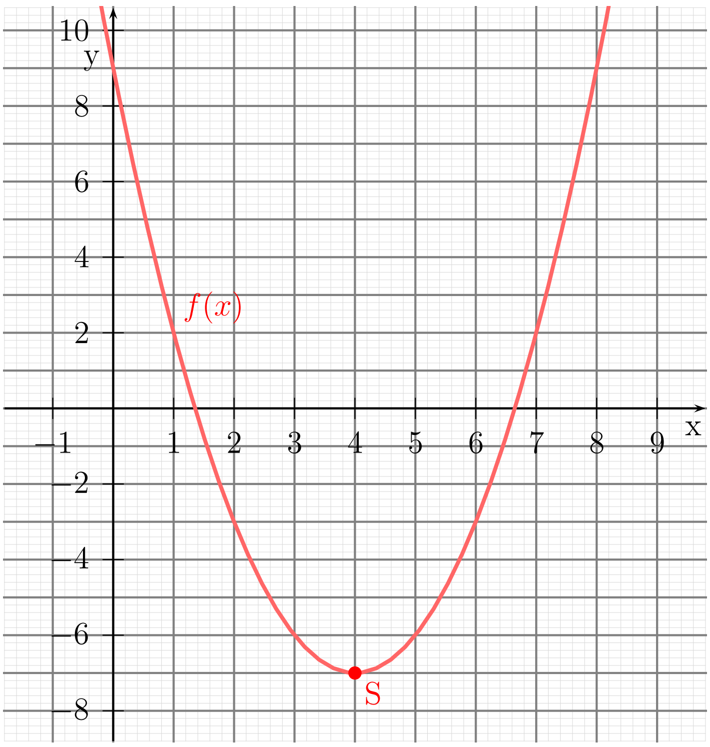
Setzt man die bekannten Koordinaten und den ebenfalls bekannten Formfaktor ein, ist man schon fertig.

$$f(x) = 1 \cdot (x - 4)^2 - 7$$

Wenn man möchte, kann man die Klammer noch auflösen, um die Gleichung in die Normalform zu bringen.

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \cdot (x - 4)^2 - 7 \\ &= x^2 - 8x + 16 - 7 \\ f(x) &= x^2 - 8x + 9 \end{aligned}$$

Nachfolgend ist der Verlauf des Funktionsgraphen dargestellt.



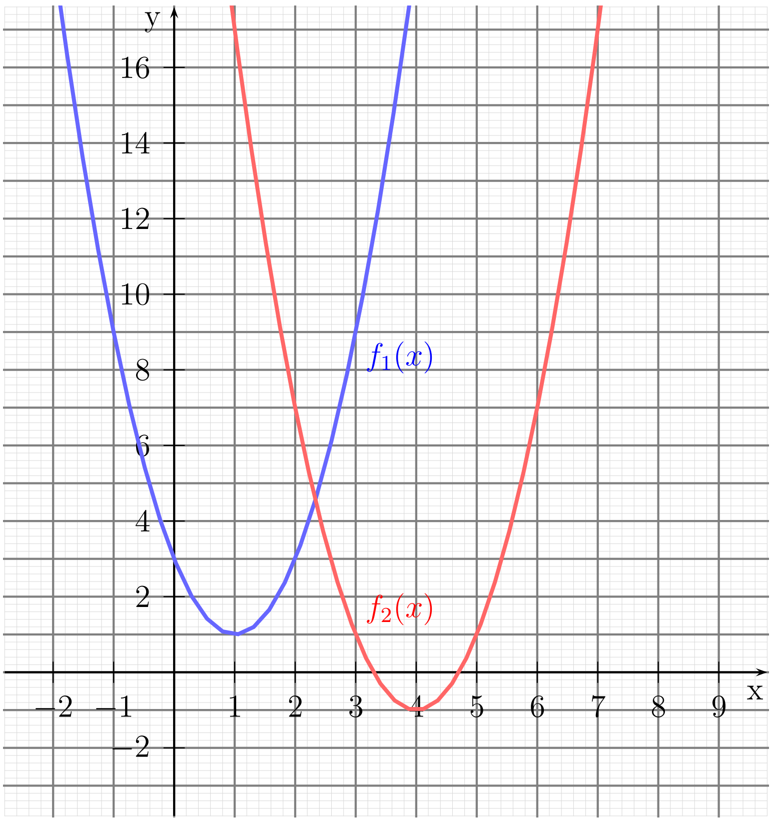
3.2 Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion $f_1(x) = 2x^2 - 4x + 3$. Geben Sie die Funktion $f_2(x)$ an, die gegenüber der Funktion $f_1(x)$ um 3 Einheiten nach rechts und 2 Einheiten nach unten verschoben ist!

Lösung: Für dieses Problem bietet sich die Verschiebeformel an. 2 Einheiten nach unten entsprechen dabei -2 Einheiten nach oben.

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= f_1(x-3) + (-2) \\
&= 2 \cdot (x-3)^2 - 4 \cdot (x-3) + 3 - 2 \\
&= 2 \cdot (x^2 - 6x + 9) - 4x + 12 + 1 \\
&= 2x^2 - 12x + 18 - 4x + 13 \\
f_2(x) &= 2x^2 - 16x + 31
\end{aligned}$$

Nachfolgend ist der Verlauf der Funktionsgraphen dargestellt.



3.3 Aufgabe 3:

Die Quadratische Funktion hat den Scheitelpunkt $S(4|1)$. Der Graph schneidet die y-Achse bei $y_0 = -7$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung: Da der Scheitelpunkt bekannt ist, bietet sich die Scheitelpunktform an. Es muss dann nur noch a berechnet werden.

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot (x - x_s)^2 + y_s \\ f(x) &= a \cdot (x - 4)^2 + 1 \end{aligned}$$

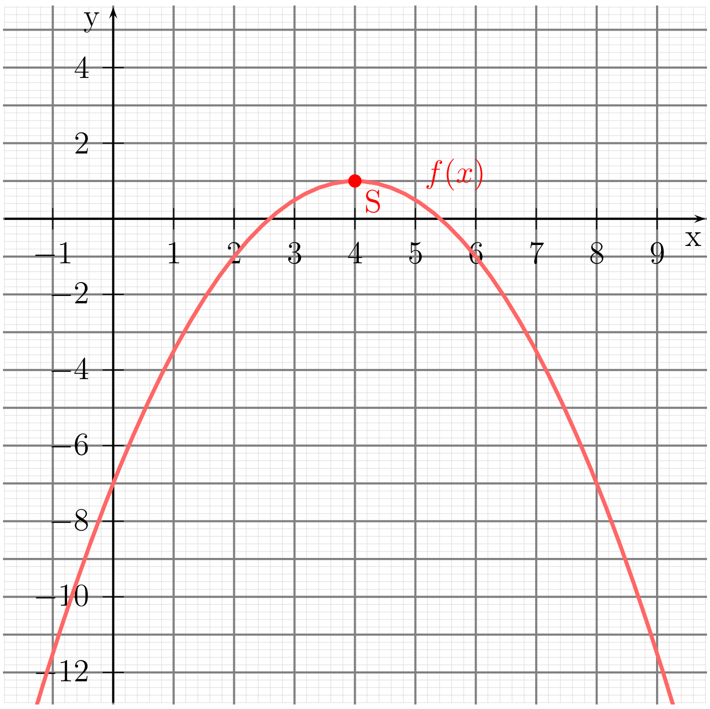
Der Schnittpunkt mit der y-Achse bedeutet: $f(0) = y_s$. Das setzen wir ein.

$$\begin{aligned} -7 &= a \cdot (0 - 4)^2 + 1 \\ -7 &= a \cdot 16 + 1 \quad | - 1 \\ -8 &= 16a \quad | : 16 \\ a &= -\frac{8}{16} \\ a &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Mit diesem Wert für a erhalten wir die gesuchte Funktion:

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x - 4)^2 + 1 = -\frac{1}{2} \cdot (x^2 - 8x + 16) + 1 = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 7$$

Nachfolgend ist der Verlauf des Funktionsgraphen dargestellt.



3.4 Aufgabe 4:

Bestimmen Sie den Scheitelpunkt, die Nullstellen und den Wertebereich der Quadratischen Funktion $f(x) = 3x^2 - 12x + 15$!

Lösung: An einer Nullstelle ist der Funktionswert = 0. Daher lautet der Ansatz zur Nullstellenbestimmung: $f(x_0) = 0$.

$$\begin{aligned}
3x_0^2 - 12x_0 + 15 &= 0 \quad |:3 \\
x_0^2 - 4x_0 + 5 &= 0 \\
x_{01/2} &= 2 \pm \sqrt{4-5} \\
x_{01/2} &= 2 \pm \sqrt{-1}
\end{aligned}$$

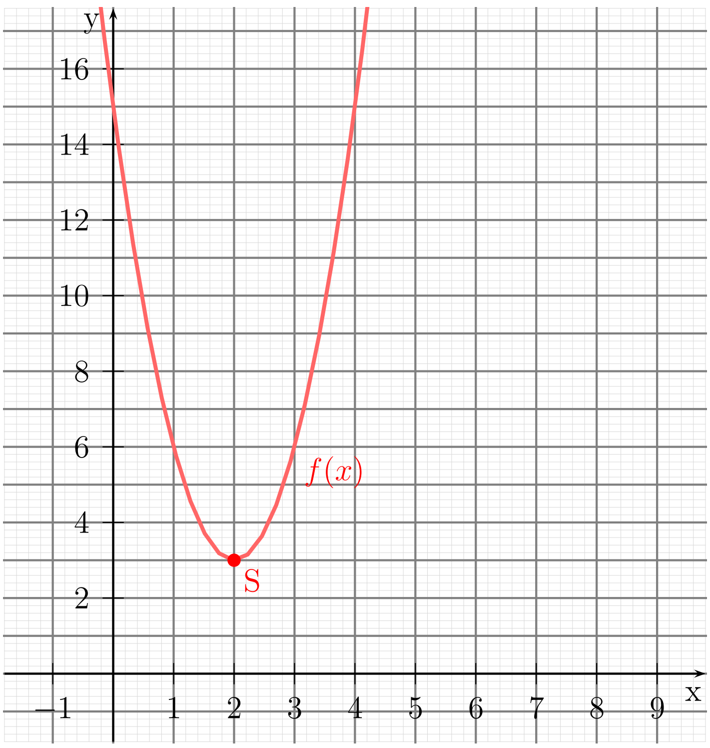
Da es für die Wurzel keine reelle Lösung gibt, gibt es keine Nullstellen. Andererseits kann man an dieser Gleichung schon den x-Wert des Scheitelpunktes ablesen. Es ist immer die Zahl, die vor der Wurzel steht, also $x_s = 2$. Den zugehörigen y-Wert y_s bekommt man durch Einsetzen von x_s in die Funktionsgleichung.

$$\begin{aligned}
y_s &= f(x_s) \\
&= 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 15 \\
y_s &= 3
\end{aligned}$$

Der Formfaktor ist mit $a = 3$ positiv, darum ist die Parabel nach oben geöffnet. Das wiederum bedeutet, dass der Scheitelpunkt der tiefste Punkt der Kurve ist. Also lautet der Wertebereich:

$$W = \{y | y \geq 3\}$$

Nachfolgend ist der Verlauf des Funktionsgraphen dargestellt.



y
16
14
12
10
8
6
4
2
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
x
$f(x)$
S

3.5 Aufgabe 5:

Bestimmen Sie den Scheitelpunkt, die Nullstellen und den Wertebereich der Quadratischen Funktion $f(x) = -16x^2 - 16x + 5$!

Lösung: An einer Nullstelle ist der Funktionswert = 0. Daher lautet der Ansatz zur Nullstellenbestimmung: $f(x_0) = 0$.

$$\begin{aligned}
-16x_0^2 - 16x_0 + 5 &= 0 \quad |:(-16) \\
x_0^2 + x_0 - \frac{5}{16} &= 0 \\
x_{01/2} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{5}{16}} \\
x_{01/2} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4}{16} + \frac{5}{16}} \\
x_{01/2} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} \\
x_{01/2} &= -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{4} \\
x_{01/2} &= -\frac{2}{4} \pm \frac{3}{4} \\
x_{01} &= \frac{1}{4} \\
x_{02} &= -\frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Wie schon bei Aufgabe 4 können wir daraus auch den x-Wert des Scheitelpunktes als die Zahl vor der Wurzel ablesen, also:

$$x_s = -\frac{1}{2}$$

Den zugehörigen y-Wert y_s finden wir wieder durch Einsetzen in die Funktionsgleichung:

$$y_s = f(x_s) = -16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 5 = 9$$

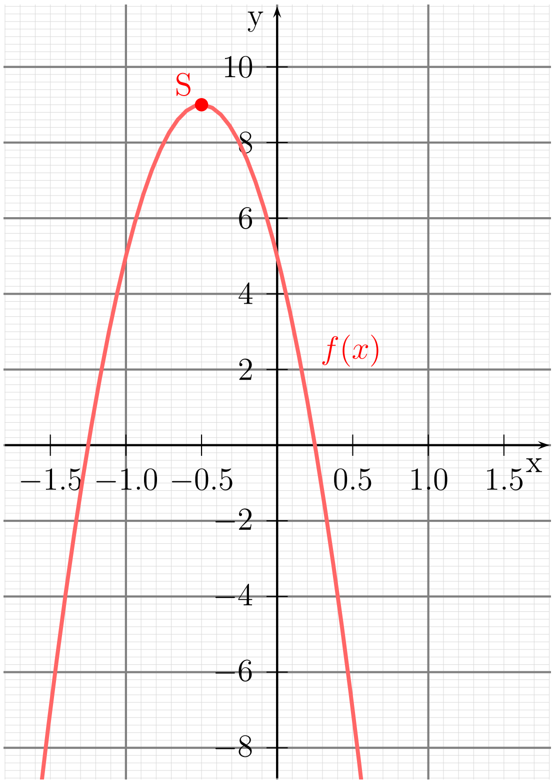
Der Scheitelpunkt lautet demnach:

$$S\left(-\frac{1}{2}|9\right)$$

Da der Formfaktor mit -16 negativ ist, ist die Parabel nach unten geöffnet. Der Wertebereich liegt also **unterhalb** des Scheitelpunktes:

$$W = \{x|x \leq 9\}$$

Nachfolgend ist der Verlauf des Funktionsgraphen dargestellt.



3.6 Aufgabe 6:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Parabel mit $f_1(x) = 4x^2 - 9x + 1$ und der Geraden mit $f_2(x) = 3x + 17$!

Lösung: Die Schnittpunkte sind ja genau die Punkte beider Kurven, bei denen x- und y-Wert übereinstimmen. Ich kann also zur Schnittpunktbestimmung die Funktionsgleichungen gleichsetzen.

$$\begin{aligned}
f_1(x_s) &= f_2(x_s) \\
4x_s^2 - 9x_s + 1 &= 3x_s + 17 \quad | - 3x_s - 17 \\
4x_s^2 - 12x_s - 16 &= 0 \quad | : 4 \\
x_s^2 - 3x_s - 4 &= 0 \\
x_{s1/2} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} \\
&= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \\
&= \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \\
x_{s1} &= \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4 \\
x_{s2} &= \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -1
\end{aligned}$$

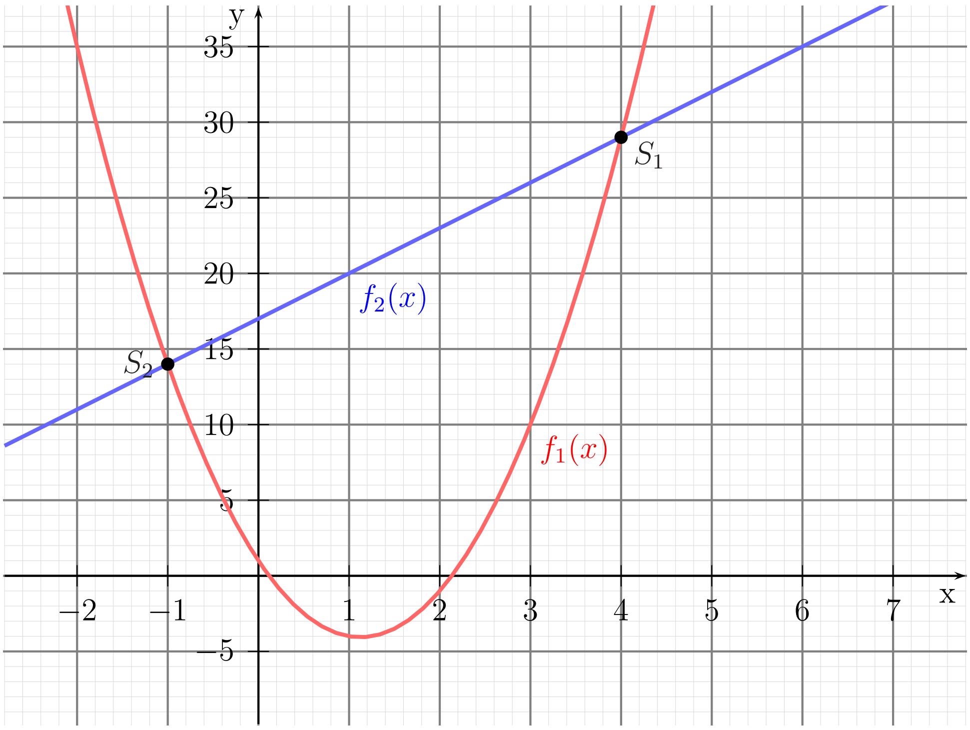
Die zugehörigen y-Werte bekommt man durch Einsetzen in eine der beiden Funktionsgleichungen. Ich wähle dafür f_2 aus, da sie etwas einfacher ist.

$$\begin{aligned}
y_s &= f_2(x_s) \\
y_{s1} &= 3x_{s1} + 17 = 3 \cdot 4 + 17 = 29 \\
y_{s2} &= 3x_{s2} + 17 = 3 \cdot (-1) + 17 = 14
\end{aligned}$$

Damit lauten die Schnittpunkte:

$$S_1(4|29) \text{ und } S_2(-1|14)$$

Nachfolgend ist der Verlauf der Funktionsgraphen dargestellt.



3.7 Aufgabe 7:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Parabel mit $f_1(x) = 9x^2+12x-4$ und der Geraden mit $f_2(x) = -12x + 5$!

Lösung: Die Schnittpunkte sind ja genau die Punkte beider Kurven, bei denen x- und y-Wert übereinstimmen. Ich kann also zur Schnittpunktbestimmung die Funktionsgleichungen gleichsetzen.

$$\begin{aligned}
f_1(x_s) &= f_2(x_s) \\
9x_s^2 + 12x_s - 4 &= -12x_s + 5 \quad | + 12x_s - 5 \\
9x_s^2 + 24x_s - 9 &= 0 \quad | : 9 \\
x_s^2 + \frac{8}{3}x_s - 1 &= 0 \\
x_{s1/2} &= -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{9}{9}} \\
&= -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9}} \\
&= -\frac{4}{3} \pm \frac{5}{3} \\
x_{s1} &= -\frac{4}{3} - \frac{5}{3} = -3 \\
x_{s2} &= -\frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

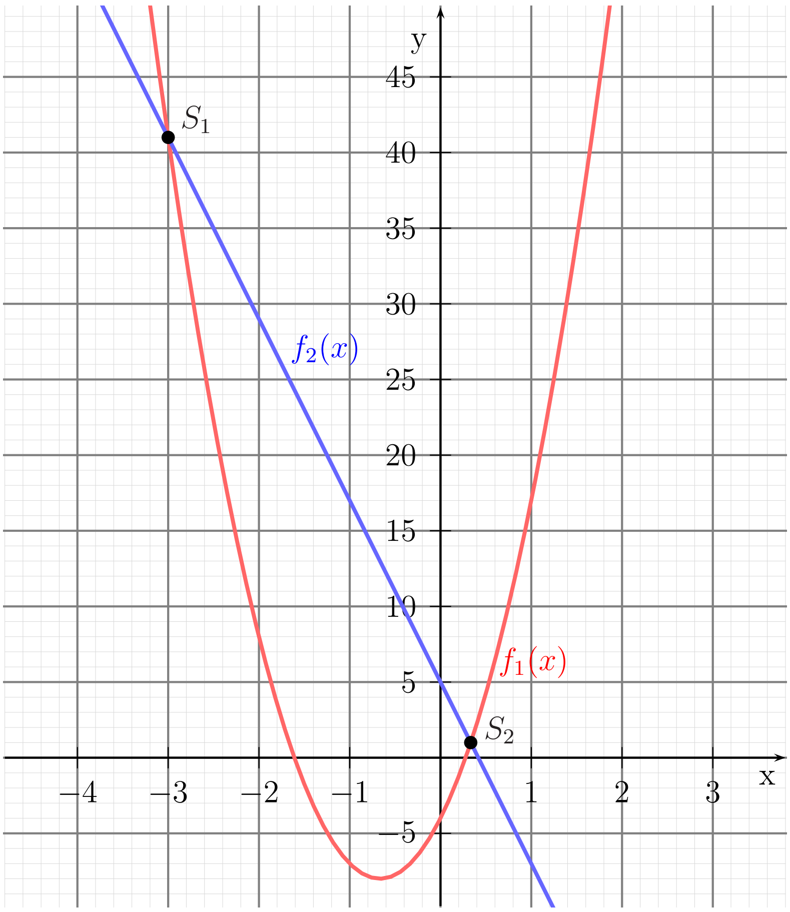
Die zugehörigen y-Werte bekommt man durch Einsetzen in eine der beiden Funktionsgleichungen. Ich wähle dafür f_2 aus, da sie etwas einfacher ist.

$$\begin{aligned}
y_s &= f_2(x_s) \\
y_{s1} &= -12x_{s1} + 5 = -12 \cdot (-3) + 5 = 41 \\
y_{s2} &= -12x_{s2} + 5 = -12 \cdot \frac{1}{3} + 5 = 1
\end{aligned}$$

Damit lauten die Schnittpunkte:

$$S_1(-3|41) \text{ und } S_2\left(\frac{1}{3}|1\right)$$

Nachfolgend ist der Verlauf der Funktionsgraphen dargestellt.



3.8 Aufgabe 8:

Gegeben ist die Quadratische Funktion $f(x) = -2x^2 + 5x - 3$. Geben Sie den Scheitelpunkt an und bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$. Welchen Definitionsbereich hat die Umkehrfunktion?

Lösung: Den Scheitelpunkt bekommt man zweckmäßigerweise mit der Scheitelpunktformel.

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2\cdot(-2)} = \frac{5}{4}$$

$$y_s = f(x_s) = -2x_s^2 + 5x_s - 3 = -2\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 5\cdot\frac{5}{4} - 3 = \frac{1}{8}$$

$$S\left(\frac{5}{4}|\frac{1}{8}\right)$$

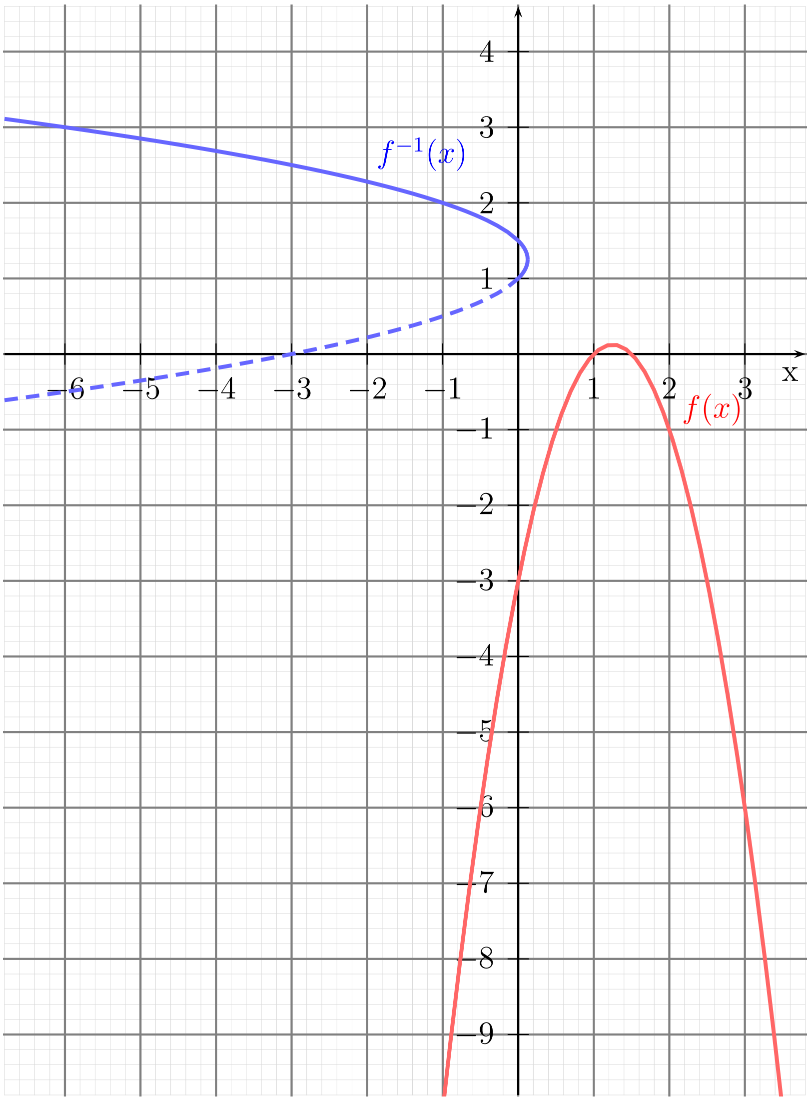
Die Umkehrfunktion wird bestimmt, indem man die Rollen von x und y tauscht und die dadurch entstandene Gleichung wieder nach y auflöst.

$$\begin{aligned}
y &= -2x^2 + 5x - 3 \quad |\ x \text{ und } y \text{ tauschen}\\
x &= -2y^2 + 5y - 3 \quad |+2y^2 - 5y + 3\\
2y^2 - 5y + 3 + x &= 0 \quad |:2\\
y^2 - \frac{5}{2}y + \frac{3}{2} + \frac{x}{2} &= 0 \quad |\ \text{p-q-Formel}\\
y_{1/2} &= \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{24}{16} - \frac{8x}{16}}\\
&= \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{1-8x}{16}}\\
&= \frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{1-8x}}{4}\\
f^{-1}(x) &= \frac{5}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{1-8x}
\end{aligned}$$

Der Definitionsbereich wird dadurch eingeschränkt, dass der Wurzelinhalt (Radikand) nicht kleiner als Null weden darf.

$$\begin{aligned}
1 - 8x &\geq 0 \quad |-1\\
-8x &\geq -1 \quad |:(-8)\\
x &\leq \frac{1}{8}\\
D &= \left\{x | x \leq \frac{1}{8}\right\}
\end{aligned}$$

Nachfolgend ist der Verlauf der Funktionsgraphen dargestellt.



3.9 Aufgabe 9:

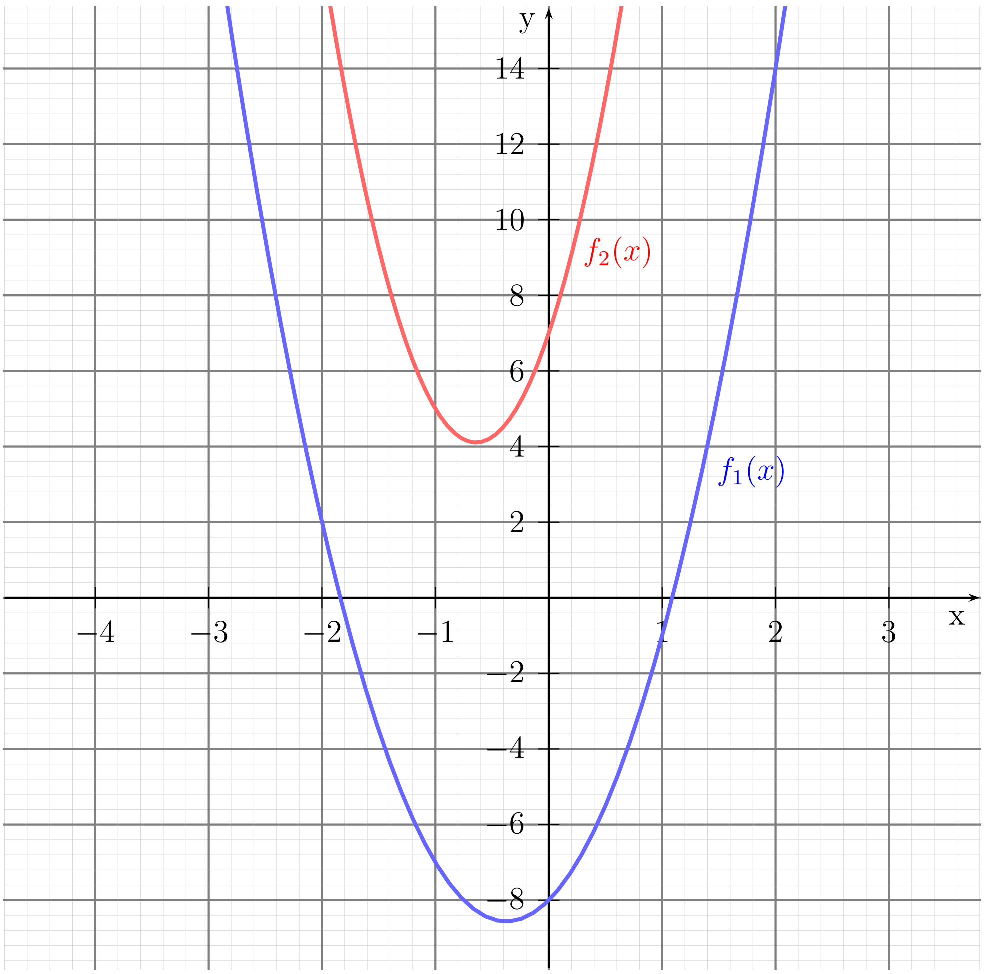
Bestimmen Sie die Schnittpunkte der beiden Parabeln mit den Funktionsgleichungen $f_1(x) = 4x^2 + 3x - 8$ und $f_2(x) = 7x^2 + 9x + 7$.

Lösung: Die Schnittpunkte sind ja genau die Punkte beider Kurven, bei denen x- und y-Wert übereinstimmen. Ich kann also zur Schnittpunktbestimmung die Funktionsgleichungen gleichsetzen.

$$\begin{aligned}
4x_s^2 + 3x_s - 8 &= 7x_s^2 + 9x_s + 7 \quad | - 7x_s^2 - 9x_s - 7 \\
-3x_s^2 - 6x_s - 15 &= 0 \quad | : (-3) \\
x_s^2 + 2x_s + 5 &= 0 \\
x_{s1/2} &= -1 \pm \sqrt{1-5} \\
x_{s1/2} &= -1 \pm \sqrt{-4}
\end{aligned}$$

Da diese Wurzel nicht reell zu lösen ist, gibt es **keine Schnittpunkte**.

Nachfolgend ist der Verlauf der Funktionsgraphen dargestellt.



3.10 Aufgabe 10:

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Quadratischen Funktion, deren Graph durch die Punkte $P_1(-1|8)$, $P_2(2|-1)$ und $P_3(4|3)$ verläuft.

Lösung: Zur Lösung gehen wir von der Normalform der Quadratischen Funktion aus. Wenn wir jeweils die Koordinaten eines Punktes einsetzen, dann erhalten wir drei Gleichungen als Lineargleichungssystem, aus denen wir die Parameter a, b und c berechnen können. Die Normalform lautet:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Wir setzen die Koordinaten der drei Punkte ein.

$$\begin{array}{rcrcrcr} f(-1) & = & 8 & \Rightarrow & a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c & = & 8 \\ f(2) & = & -1 & \Rightarrow & a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c & = & -1 \\ f(4) & = & 3 & \Rightarrow & a\cdot 4^2 + b\cdot 4 + c & = & 3 \end{array}$$

Wenn wir das rechts stehende Lineargleichungssystem zusammenfassen, erhalten wir:

$$\begin{array}{rrrcr} a & -b & +c & = & 8 \\ 4a & +2b & +c & = & -1 \\ 16a & +4b & +c & = & 3 \end{array}$$

Dieses Lineargleichungssystem kann nun mit einem beliebigen Verfahren gelöst werden, also beispielsweise mit dem Einsetzungsverfahren, dem Additions-/Subtraktionsverfahren, der Cramerschen Regel oder dem Gauß-Jordan-Verfahren. Ich verwende hier als Beispiel die Cramersche Regel. Ich bestimme zunächst a:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{16-3-4-6-32-1}{2-16+16-32-4+4} = \frac{-30}{-30} = 1$$

Mit der nun bekannten Nennerdeterminante ist auch b schnell bestimmt:

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 16 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-30} = \frac{-1+128+12+16-3-32}{-30} = \frac{120}{-30} = -4$$

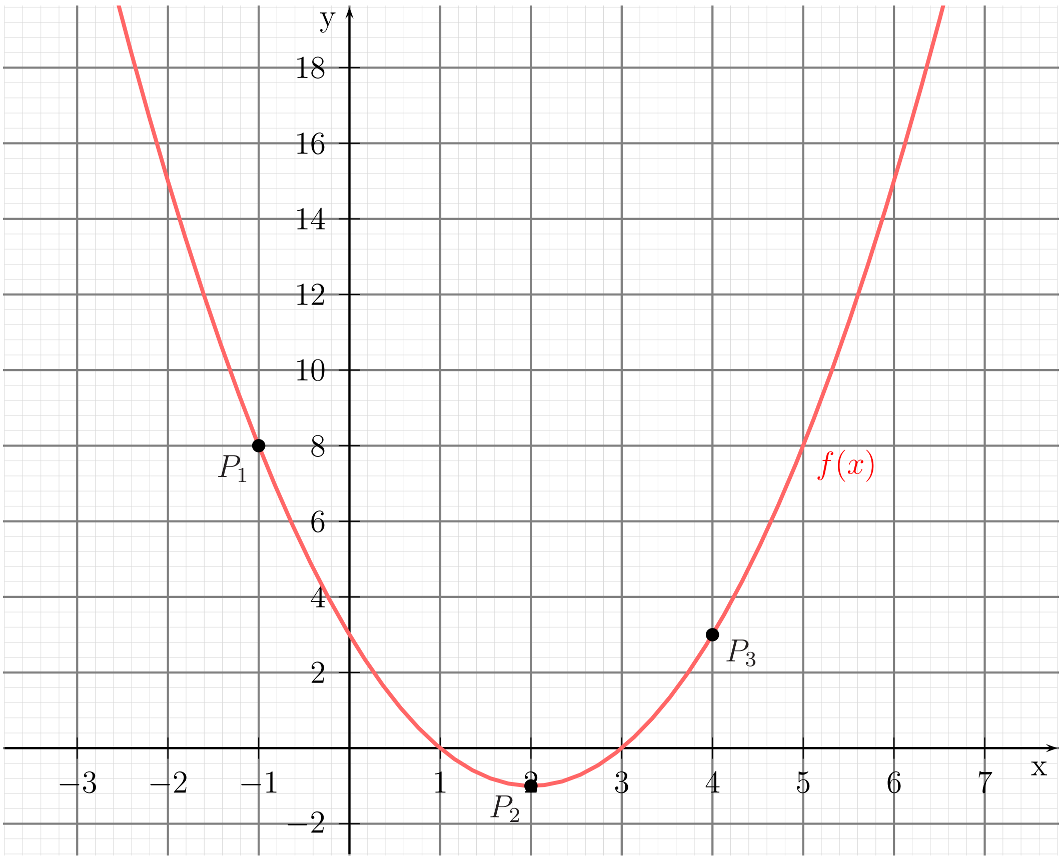
Den Parameter c bestimmt man nun am einfachsten durch Einsetzen der bereits bekannten Parameter in eine der drei Gleichungen. Ich nehme dazu die erste.

$$\begin{array}{rcll} a - b + c & = & 8 & \\ 1 - (-4) + c & = & 8 & \\ 5 + c & = & 8 & |-5 \\ c & = & 3 & \end{array}$$

Setzen wir die Werte in die Ausgangsform ein, erhalten wir die gesuchte Funktionsgleichung.

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

Nachfolgend ist der Verlauf des Funktionsgraphen dargestellt.



3.11 Aufgabe 11:

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Linearen Funktion $f_2(x)$, deren Graph die Parabel der Quadratischen Funktion $f_1(x) = x^2 - 4x + 4$ bei $x_b = 4$ als Tangente berührt.

Lösung: Zunächst einmal können wir von der Normalform der Linearen Funktion ausgehen. Die gesuchte Funktion hat also diese Form:

$$f_2(x) = mx + b$$

Wir müssen nur die beiden Parameter m und b bestimmen. Aus dem x-Wert des Berührpunktes kann der dazugehörige y-Wert mit $y_b = f_1(x_b)$ berechnet werden.

$$y_b = x_b^2 - 4x_b + 4 = 4^2 - 4 \cdot 4 + 4 = 4$$

Damit können wir die erste von zwei notwendigen Gleichungen aufstellen.

$$f_2(x_b) = y_b \quad \Rightarrow \quad m \cdot 4 + b = 4 \tag{1}$$

Die beiden Graphen *berühren* sich, sie *schneiden* sich nicht. Das bedeutet, es gibt nur genau *einen einzigen* gemeinsamen Punkt. Daraus können wir eine weitere Gleichung gewinnen. Wie das geht?
Setzen wir zunächst die beiden Funktionsgleichungen wie zur Schnittpunktbestimmung gleich.

$$\begin{aligned}
f_1(x_b) &= f_2(x_b) \\
x_b^2 - 4x_b + 4 &= mx_b + b \quad | - mx_b - b \\
x_b^2 - 4x_b - mx_b + 4 - b &= 0 \quad | \ x_b \text{ ausklammern} \\
x_b^2 - (4+m)x_b + (4-b) &= 0 \quad | \text{ p-q-Formel} \\
x_{b1/2} &= \frac{4+m}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4+m}{2}\right)^2 - (4-b)}
\end{aligned}$$

Wann gibt es *genau einen* Schnittpunkt? Das kann doch nur dann der Fall sein, wenn der Wert der Wurzel $= 0$ ist. Der „Rest“ vor der Wurzel muss demnach unser $x_b = 4$ sein. Das ergibt dann unsere zweite Gleichung.

$$\frac{4+m}{2} = 4 \tag{2}$$

Aus dieser Gleichung kann ich sofort m berechnen.

$$\begin{aligned}
\frac{4+m}{2} &= 4 \quad | \cdot 2 \\
4+m &= 8 \quad | - 4 \\
m &= 4
\end{aligned}$$

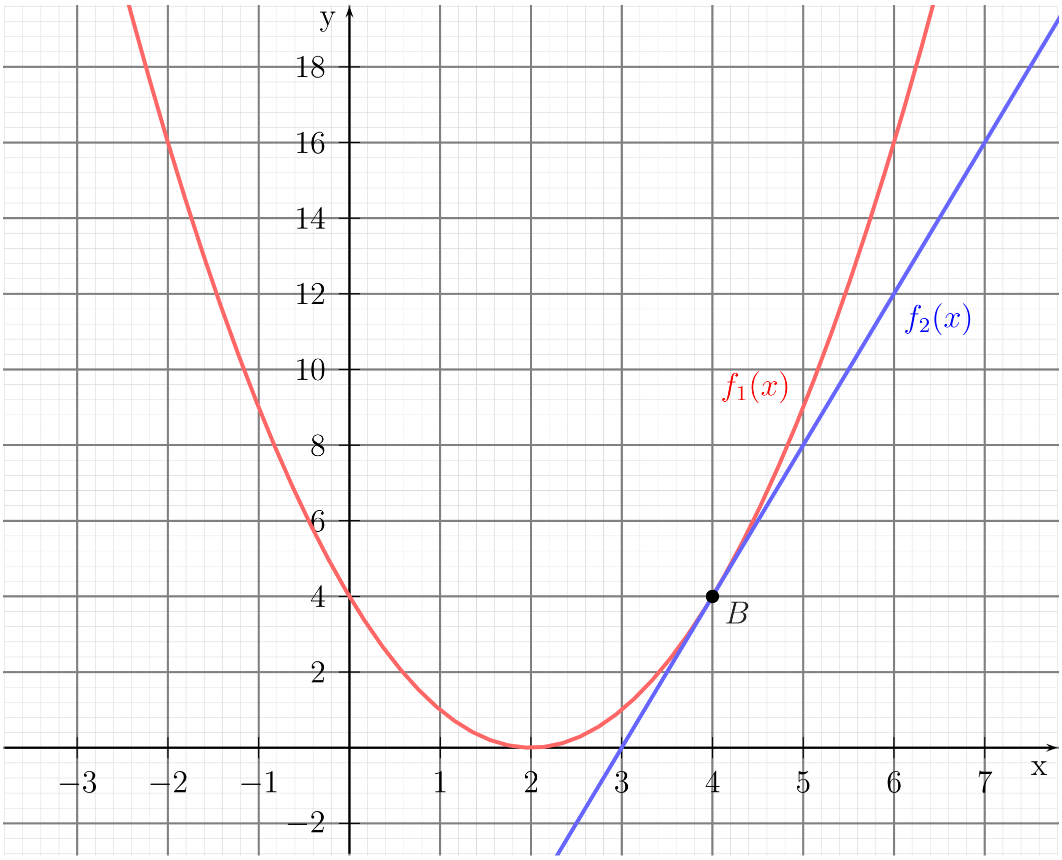
Das setzen wir in Gleichung (1) ein.

$$\begin{aligned} 4m + b &= 4 \quad | \, 4 \text{ für } m \text{ einsetzen} \\ 4 \cdot 4 + b &= 4 \\ 16 + b &= 4 \quad | - 16 \\ b &= -12 \end{aligned}$$

Die gesuchte Gleichung lautet also:

$$f_2(x) = 4x - 12$$

Nachfolgend ist der Verlauf der Funktionsgraphen dargestellt.



3.12 Aufgabe 12:

Der Graph der Quadratischen Funktion $f(x)$ hat den Scheitelpunkt $S(3|2)$ und verläuft durch den Punkt $P(5|10)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von $f(x)$!

Lösung: Da der Scheitelpunkt bekannt ist, bietet sich die Scheitelpunktform an. Es muss dann nur noch a berechnet werden.

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot (x - x_s)^2 + y_s \\ f(x) &= a \cdot (x - 3)^2 + 2 \end{aligned}$$

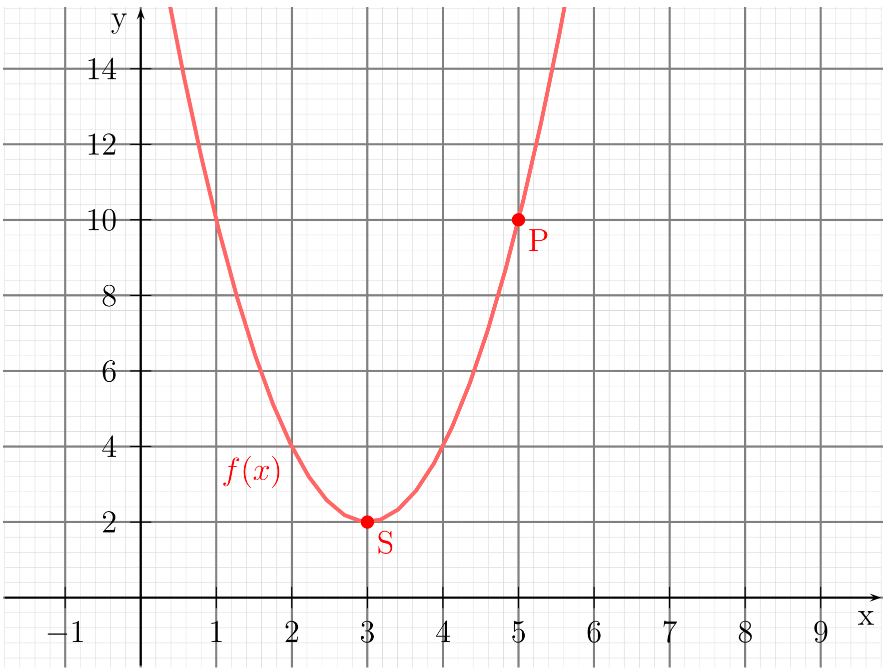
Neben S ist auch noch der Punkt P auf dem Graphen bekannt. Seine Koordinaten müssen auch die Funktionsgleichung erfüllen.

$$\begin{aligned} f(x_p) &= y_p \\ a \cdot (x_p - 3)^2 + 2 &= y_p \\ a \cdot (5 - 3)^2 + 2 &= 10 \\ a \cdot 2^2 + 2 &= 10 \quad | - 2 \\ a \cdot 4 &= 8 \quad | : 4 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Diesen Wert für a setze ich ein und erhalte die gesuchte Funktionsgleichung.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \cdot (x - 3)^2 + 2 \\ &= 2 \cdot (x^2 - 6x + 9) + 2 \\ &= 2x^2 - 12x + 18 + 2 \\ f(x) &= 2x^2 - 12x + 20 \end{aligned}$$

Nachfolgend ist der Verlauf des Funktionsgraphen dargestellt.



y
14
12
10
8
6
4
2
x
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
P
S
$f(x)$