

Polynomdivision

W. Kippels

22. April 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Lösungsprinzip	3
1.1	Grundmuster einer Polynomdivision	3
1.2	Spezielle Beispiele, „Fallen“	6
2	Übungsaufgaben	8
2.1	Aufgabe 1	8
2.2	Aufgabe 2	8
2.3	Aufgabe 3	8
2.4	Aufgabe 4	8
2.5	Aufgabe 5	8
2.6	Aufgabe 6	8
2.7	Aufgabe 7	8
2.8	Aufgabe 8	8
2.9	Aufgabe 9	8
2.10	Aufgabe 10	9
3	Ergebnisse der Übungsaufgaben	10
3.1	Aufgabe 1	10
3.2	Aufgabe 2	10
3.3	Aufgabe 3	10
3.4	Aufgabe 4	10
3.5	Aufgabe 5	10
3.6	Aufgabe 6	10
3.7	Aufgabe 7	10
3.8	Aufgabe 8	10
3.9	Aufgabe 9	10
3.10	Aufgabe 10	11
4	Komplette Lösungen der Übungsaufgaben	12
4.1	Aufgabe 1:	12

4.2	Aufgabe 2	12
4.3	Aufgabe 3	12
4.4	Aufgabe 4	12
4.5	Aufgabe 5	13
4.6	Aufgabe 6	13
4.7	Aufgabe 7	13
4.8	Aufgabe 8	13
4.9	Aufgabe 9	14
4.10	Aufgabe 10	14

1 Lösungsprinzip

1.1 Grundmuster einer Polynomdivision

Was ist ein Polynom? Ein Polynom ist ein Term, der sich in folgender Form schreiben lässt:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Dabei wird n **Grad des Polynoms** genannt. n ist die **höchste vorkommende Potenz** von x .

Anschaulicher ist vielleicht ein Beispiel. Nachfolgend ist ein **Polynom 3. Grades** dargestellt.

$$2x^3 - 4x^2 + 5x - 3$$

Auch solche Terme lassen sich – wie Zahlen – durcheinander dividieren. Wie bei Zahlen auch geht die Division aber nicht immer ohne „Rest“ auf. Zunächst wollen wir uns aber nur mit Aufgaben beschäftigen, die „glatt“ aufgehen.

Hier ein Beispiel. Wir wollen dividieren:

$$(2x^2 - 14x + 20) : (x - 2) = ?$$

Um das Verfahren zu verstehen, wollen wir uns an die Grundschulzeit erinnern. Wir haben damals die schriftliche Division mit mehrstelligen Zahlen gelernt. Wir sehen uns das an einem Beispiel an. Wir wollen dividieren:

$$288 : 12 = ?$$

Die zugehörige Rechnung läuft folgendermaßen ab: Man dividiert die erste Ziffer der ersten Zahl (des Dividenden, also die 2 von der 288) durch die erste Ziffer der zweiten Zahl (des Divisors, also die 1 von der 12) und schreibt das Ergebnis hinter das Gleichheitszeichen:

$$288 : 12 = 2$$

Dann multipliziert man das Ergebnis mit dem Divisor (der zweiten Zahl) und schreibt das Ergebnis mit einem Minuszeichen davor unter die erste Zahl.

$$\begin{array}{r} 288 : 12 = 2 \\ -24 \end{array}$$

Anschließend wird dieses Ergebnis vom Dividenden subtrahiert.

$$\begin{array}{r} 288 : 12 = 2 \\ -24 \\ \hline 48 \end{array}$$

Es ist nach der ersten Division ein „Rest“ von 48 übrig geblieben. Mit diesem wird nun die Division fortgesetzt. Wieder wird die erste Ziffer (hier die 4) durch die erste Ziffer

des Dividenden (die 1) geteilt. Das Ergebnis (eine 4) wird hinter das bisherige Ergebnis geschrieben.

$$\begin{array}{r} 288 : 12 = 24 \\ -24 \\ \hline 48 \end{array}$$

Auch diese 4 muss nun mit dem Dividenden multipliziert und unter den Rest geschrieben werden. Man subtrahiert diese Zahl und es bleibt kein Rest, wenn die Division aufgegangen ist.

$$\begin{array}{r} 288 : 12 = 24 \\ -24 \\ \hline 48 \\ -48 \\ \hline 0 \end{array}$$

In dieser Form haben wir es damals in der Grundschule gelernt.

Nach dem gleichen Muster läuft auch eine Polynomdivision ab. Der Unterschied liegt lediglich darin, dass im einen Fall mit Zahlen und im anderen mit Buchstaben gerechnet wird.

Damit die eben dargestellte Rechnung besser auf ein Polynom übertragen werden kann, zerlege ich die Zahlen nun in Zehnerpotenzen. Die Ziffern der arabischen Zahlen bedeuten ja, dass sie mit 10^0 , 10^1 , 10^2 , ... multipliziert werden sollen – in Abhängigkeit von der Position der Ziffern in der Zahl. Beispielsweise ist 288 eine abgekürzte Schreibweise für:

$$2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

Mit dieser Schreibweise führe ich die Rechnung der vorstehenden Division erneut vor:

$$\begin{array}{r} (2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0) : (1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0) = 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 \\ -(2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1) \\ \hline 4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 \\ -(4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0) \\ \hline 0 \end{array}$$

Zugegeben, es sieht jetzt etwas „aufgebläht“ aus, aber der Zusammenhang ist hoffentlich noch erkennbar.

Ähnlich sieht die Rechnung aus, wenn wir eine **Polynomdivision** durchführen. Auch die Vorgehensweise ist entsprechend. Ich möchte das an dem anfangs vorgestellten Beispiel zeigen. Dividiert werden soll:

$$(2x^2 - 14x + 20) : (x - 2) = ?$$

Man beginnt wie bei der Division mit Zahlen. Man dividiert den ersten Summanden des ersten Polynoms (des Dividenden, also $2x^2$) durch den ersten Summanden des zweiten Polynoms (des Divisors, also x) und schreibt das Ergebnis hinter das Gleichheitszeichen:

$$(2x^2 - 14x + 20) : (x - 2) = 2x$$

Dann multipliziert man das Ergebnis mit dem Divisor (dem zweiten Polynom) und schreibt das Ergebnis mit einem Minuszeichen davor passend unter das erste Polynom, hier: $(x - 2) \cdot 2x = 2x^2 - 4x$

$$\begin{array}{r} (2x^2 - 14x + 20) : (x - 2) = 2x \\ -(2x^2 - 4x) \end{array}$$

Anschließend wird dieses Ergebnis vom Dividenden subtrahiert.

$$\begin{array}{r} (2x^2 - 14x + 20) : (x - 2) = 2x \\ -(2x^2 - 4x) \\ \hline -10x + 20 \end{array}$$

Es ist nach der ersten Division ein „Rest“ von $(-10x + 20)$ übrig geblieben. Mit diesem wird nun die Division fortgesetzt. Wieder wird der erste Summand (hier: $-10x$) durch den ersten Summanden des Dividenden (hier: x) geteilt. Das Ergebnis (hier: -10) wird hinter das bisherige Ergebnis geschrieben.

$$\begin{array}{r} (2x^2 - 14x + 20) : (x - 2) = 2x - 10 \\ -(2x^2 - 4x) \\ \hline -10x + 20 \end{array}$$

Auch dieser Term -10 muss nun mit dem Dividenden multipliziert und unter den Rest geschrieben werden. Man subtrahiert diesen Term $-10 \cdot (x - 2) = -10x + 20$ und es bleibt kein Rest, wenn die Division aufgegangen ist.

$$\begin{array}{r} (2x^2 - 14x + 20) : (x - 2) = 2x - 10 \\ -(2x^2 - 4x) \\ \hline -10x + 20 \\ - (-10x + 20) \\ \hline 0 \end{array}$$

1.2 Spezielle Beispiele, „Fallen“

Das Grundprinzip der Polynomdivision dürfte damit klar sein. Es gibt aber noch ein paar „Fallen“ bei der Rechnung, auf die ich aufmerksam machen möchte. Auch das möchte ich wieder an Beispielen erläutern.

Sehen wir uns nachfolgende Aufgabe an:

$$(10x + 6x^2 - 4) : (3x - 1) = 2x + 4$$

Versuchen wir einmal, die Division zu beginnen.

$$\begin{array}{r} (10x + 6x^2 - 4) : (3x - 1) = \frac{10}{3} \\ -(10x - \frac{10}{3}) \\ \hline 6x^2 - \frac{2}{3} \end{array}$$

Brechen wir die Rechnung an dieser Stelle lieber ab. Hier ist der Dividend – der erste Klammerterm – nicht ordentlich sortiert. **Wenn man das in dieser Reihenfolge belässt, bekommt man große Probleme!** Es ist daher **zwingend erforderlich**, beide Polynome nach dem gleichen Kriterium zu sortieren. Im Prinzip ist es dabei gleichgültig, ob man nach fallenden oder steigenden Potenzen von x sortiert. Führen wir das an unserem Beispiel durch.

$$\begin{array}{r} (6x^2 + 10x - 4) : (3x - 1) = 2x + 4 \\ -(6x^2 - 2x) \\ \hline 12x - 4 \\ - (12x - 4) \\ \hline 0 \end{array}$$

Na also, es geht doch!

Ein anderes Problem tritt auf, wenn im Dividenten (dem ersten Polynom) eine Potenz von x nicht vorkommt. In diesem Fall findet der zu subtrahierende Term eventuell keinen „Partner“ von dem er subtrahiert werden kann. Auch hierzu ein Beispiel. Es soll berechnet werden:

$$(6x^2 - 24) : (2x - 4)$$

Ein Glied mit x (ohne Quadrat) kommt im Dividenten nicht vor. Man lässt dann beim Ansatz der Division einfach etwas Platz frei. Dann sieht das ganze so aus:

$$\begin{array}{r} (6x^2 - 24) : (2x - 4) = 3x + 6 \\ -(6x^2 - 12x) \\ \hline 12x - 24 \\ - (12x - 24) \\ \hline 0 \end{array}$$

Natürlich können die Polynome auch höheren Grades als nur 2 sein. Das Lösungsverfahren ändert sich dadurch nicht. Auch dazu ein Beispiel:

$$(x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 14x + 15) : (x^2 - 3x + 5) = \dots$$

Wir lösen die Division nach dem gleichen Muster:

$$\begin{array}{r}
 (x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 14x + 15) : (x^2 - 3x + 5) = x^2 - x + 3 \\
 -(x^4 - 3x^3 + 5x^2) \\
 \hline
 -x^3 + 6x^2 - 14x + 15 \\
 - (-x^3 + 3x^2 - 5x) \\
 \hline
 3x^2 - 9x + 15 \\
 - (3x^2 - 9x + 15) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

2 Übungsaufgaben

2.1 Aufgabe 1

$$(x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = \dots$$

2.2 Aufgabe 2

$$(2x^2 - 18x + 40) : (2x - 10) = \dots$$

2.3 Aufgabe 3

$$(-6x^2 + 17x - 5) : (-2x + 5) = \dots$$

2.4 Aufgabe 4

$$(4x^3 + 4x^2 - 33x + 7) : (2x + 7) = \dots$$

2.5 Aufgabe 5

$$(3x^3 - 18x^2 - 78x + 9) : (x^2 - 9x + 1) = \dots$$

2.6 Aufgabe 6

$$(8x^4 - 12x^3 - 18x^2 + 27x) : (9x - 4x^3) = \dots$$

2.7 Aufgabe 7

$$(6x^4 - 48x^2 + 96) : (2x^2 - 8) = \dots$$

2.8 Aufgabe 8

$$(5x^4 - 80) : (x^2 - 4) = \dots$$

2.9 Aufgabe 9

$$(2x^6 - 5x^5 - x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 18x - 8) : (x^3 - 2x^2 - 3x + 4) = \dots$$

2.10 Aufgabe 10

$$(6x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 6x + 3) : (2x^2 - 3) = \dots$$

3 Ergebnisse der Übungsaufgaben

3.1 Aufgabe 1

$$(x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = x - 3$$

3.2 Aufgabe 2

$$(2x^2 - 18x + 40) : (2x - 10) = x - 4$$

3.3 Aufgabe 3

$$(-6x^2 + 17x - 5) : (-2x + 5) = 3x - 1$$

3.4 Aufgabe 4

$$(4x^3 + 4x^2 - 33x + 7) : (2x + 7) = 2x^2 - 5x + 1$$

3.5 Aufgabe 5

$$(3x^3 - 18x^2 - 78x + 9) : (x^2 - 9x + 1) = 3x + 9$$

3.6 Aufgabe 6

$$(8x^4 - 12x^3 - 18x^2 + 27x) : (9x - 4x^3) = -2x + 3$$

3.7 Aufgabe 7

$$(6x^4 - 48x^2 + 96) : (2x^2 - 8) = 3x^2 - 12$$

3.8 Aufgabe 8

$$(5x^4 - 80) : (x^2 - 4) = 5x^2 + 20$$

3.9 Aufgabe 9

$$(2x^6 - 5x^5 - x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 18x - 8) : (x^3 - 2x^2 - 3x + 4) = 2x^3 - x^2 + 3x - 2$$

3.10 Aufgabe 10

$$(6x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 6x + 3) : (2x^2 - 3) = 3x^2 + 2x - 1$$

4 Komplette Lösungen der Übungsaufgaben

4.1 Aufgabe 1:

$$\begin{array}{r} (x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = x - 3 \\ -(x^2 - 3x) \\ \hline -2x + 6 \\ - (-2x + 6) \\ \hline 0 \end{array}$$

4.2 Aufgabe 2

$$\begin{array}{r} (2x^2 - 18x + 40) : (2x - 10) = x - 4 \\ -(2x^2 - 10x) \\ \hline -8x + 40 \\ - (-8x + 40) \\ \hline 0 \end{array}$$

4.3 Aufgabe 3

$$\begin{array}{r} (-6x^2 + 17x - 5) : (-2x + 5) = 3x - 1 \\ -(-6x^2 + 15x) \\ \hline 2x - 5 \\ -(2x - 5) \\ \hline 0 \end{array}$$

4.4 Aufgabe 4

$$\begin{array}{r} (4x^3 + 4x^2 - 33x + 7) : (2x + 7) = 2x^2 - 5x + 1 \\ -(4x^3 + 14x^2) \\ \hline -10x^2 - 33x + 7 \\ - (-10x^2 - 35x) \\ \hline 2x + 7 \\ -(2x + 7) \\ \hline 0 \end{array}$$

4.5 Aufgabe 5

$$\begin{array}{r} (3x^3 - 18x^2 - 78x + 9) : (x^2 - 9x + 1) = 3x + 9 \\ -(3x^3 - 27x^2 + 3x) \\ \hline 9x^2 - 81x + 9 \\ -(9x^2 - 81x + 9) \\ \hline 0 \end{array}$$

4.6 Aufgabe 6

$$(8x^4 - 12x^3 - 18x^2 + 27x) : (9x - 4x^3) = \dots$$

Hier muss noch der Divisor nach fallender Potenz von x sortiert werden, bevor die Polynomdivision vorgenommen werden kann.

$$\begin{array}{r} (8x^4 - 12x^3 - 18x^2 + 27x) : (-4x^3 + 9x) = -2x + 3 \\ -(8x^4 - 18x^2) \\ \hline -12x^3 + 27x \\ -(-12x^3 + 27x) \\ \hline 0 \end{array}$$

4.7 Aufgabe 7

$$\begin{array}{r} (6x^4 - 48x^2 + 96) : (2x^2 - 8) = 3x^2 - 12 \\ -(6x^4 - 24x^2) \\ \hline -24x^2 + 96 \\ -(-24x^2 + 96) \\ \hline 0 \end{array}$$

4.8 Aufgabe 8

$$\begin{array}{r} (5x^4 - 80) : (x^2 - 4) = 5x^2 + 20 \\ -(5x^4 - 20x^2) \\ \hline 20x^2 - 80 \\ -(20x^2 - 80) \\ \hline 0 \end{array}$$

4.9 Aufgabe 9

$$\begin{array}{r}
 (2x^6 - 5x^5 - x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 18x - 8) : (x^3 - 2x^2 - 3x + 4) = 2x^3 - x^2 + 3x - 2 \\
 -(2x^6 - 4x^5 - 6x^4 + 8x^3) \\
 \hline
 -x^5 + 5x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 18x - 8 \\
 -(-x^5 + 2x^4 + 3x^3 - 4x^2) \\
 \hline
 3x^4 - 8x^3 - 5x^2 + 18x - 8 \\
 -(3x^4 - 6x^3 - 9x^2 + 12x) \\
 \hline
 -2x^3 + 4x^2 + 6x - 8 \\
 -(-2x^3 + 4x^2 + 6x - 8) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

4.10 Aufgabe 10

$$\begin{array}{r}
 (6x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 6x + 3) : (2x^2 - 3) = 3x^2 + 2x - 1 \\
 -(6x^4 - 9x^2) \\
 \hline
 4x^3 - 2x^2 - 6x + 3 \\
 -(4x^3 - 6x) \\
 \hline
 -2x^2 + 3 \\
 -(-2x^2 + 3) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$