Gemischte Ungleichungen mit Brüchen und Beträgen

$$\frac{|x+4|}{|x-1|} \leq \frac{|x-1|}{x}$$

Zunächst wir der Definitionsbereich bestimmt. Aus den Nennernullstellen ergibt sich:

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}}$$

Bei einer Ungleichung dieser Art ist es sinnvoll, zunächst alle Grenzen zu bestimmen, bei denen Betragsinhalte und/oder Nenner das Vorzeichen wechseln. Dann können die sich ergebenden Bereiche einzeln untersucht werden. Die Nennernullstellen sind schon in den Definitionslücken erkennbar. Der Nenner des linken Bruches ist gleichzeitig als Betragsinhalt im rechten Zähler enthalten. Bleibt also nur noch der linke Zähler. $(x + 4)$ wird Null für $x = -4$. Wir erhalten also vier zu untersuchende Bereiche:

1. $x < -4$
2. $-4 \leq x < 0$
3. $0 < x < 1$
4. $x > 1$

$$\begin{array}{rcll}
\frac{|x+4|}{|x-1|} & \leq & \frac{|x-1|}{x} & \\
\frac{-(x+4)}{-(x-1)} & \leq & \frac{-(x-1)}{x} & \\
\frac{-x-4}{-x+1} & \leq & \frac{-x+1}{x} & |\cdot(-x+1) \qquad \textit{(positiv)} \\
-x-4 & \leq & \frac{(-x+1)\cdot(-x+1)}{x} & |\cdot x \qquad \textit{(negativ)} \\
(-x-4)\cdot x & \geq & (-x+1)\cdot(-x+1) & \\
-x^2-4x & \geq & x^2-2x+1 & |-x^2+2x-1 \\
-2x^2-2x-1 & \geq & 0 & |\cdot(-2) \qquad \textit{(negativ)} \\
x^2+x+\frac{1}{2} & \leq & 0 & |-\frac{1}{2} \\
x^2+x & \leq & -\frac{1}{2} & |+\left(\frac{1}{2}\right) \\
x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2 & \leq & -\frac{1}{2}+\frac{1}{4} & \\
\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 & \leq & -\frac{1}{4} & \\
x+\frac{1}{2} & \leq & \left|\sqrt{-\frac{1}{4}}\right| & \\
L_1 & = & \{\ \} &
\end{array}$$

Die Lösungsmenge ist leer, da das Ergebnis **nicht reell** ist.

Untersuchung für $-4 \leq x < 0$:

In diesem Bereich sind nur die beiden gleichen Betragsinhalte **negativ**. Beim Auflösen dieser Beträge entsteht daher ein Minuszeichen. Bei einer Multiplikation mit einem Nenner muss man prüfen, ob der Nenner positiv ist oder nicht. Ist er negativ, kehrt sich das Ungleichungszeichen um.

$$\begin{array}{rcll}
\frac{|x+4|}{|x-1|} & \leq & \frac{|x-1|}{x} & \\
\frac{x+4}{-(x-1)} & \leq & \frac{-(x-1)}{x} & \\
\frac{x+4}{-x+1} & \leq & \frac{-x+1}{x} & |\cdot(-x+1) \quad \textit{(positiv)} \\
x+4 & \leq & \frac{(-x+1)\cdot(-x+1)}{x} & |\cdot x \quad \textit{(negativ)} \\
(x+4)\cdot x & \geq & (-x+1)^2 & \\
x^2+4x & \geq & x^2-2x+1 & |-x^2+2x \\
6x & \geq & 1 & |:6 \\
x & \geq & \frac{1}{6} & \\
L_2 & = & \{\,\} &
\end{array}$$

Die Lösungsmenge ist leer, da das Ergebnis **außerhalb** des untersuchten Bereiches liegt.

Untersuchung für $0 < x < 1$:

In diesem Bereich sind nur die beiden gleichen Betragsinhalte **negativ**. Beim Auflösen dieser Beträge entsteht daher ein Minuszeichen. Beide Nenner sind positiv.

$$\begin{array}{rcll}
\frac{|x+4|}{|x-1|} & \leq & \frac{|x-1|}{x} & \\
\frac{x+4}{-(x-1)} & \leq & \frac{-(x-1)}{x} & \\
\frac{x+4}{-x+1} & \leq & \frac{-x+1}{x} & |\cdot(-x+1) \quad \textit{(positiv)} \\
x+4 & \leq & \frac{(-x+1)\cdot(-x+1)}{x} & |\cdot x \quad \textit{(positiv)} \\
(x+4)\cdot x & \leq & (-x+1)^2 & \\
x^2+4x & \leq & x^2-2x+1 & |-x^2+2x \\
6x & \leq & 1 & |:6 \\
x & \leq & \frac{1}{6} & \\
L_3 & = & \{0 < x \leq \frac{1}{6}\} &
\end{array}$$

Das Ergebnis liegt teilweise im untersuchten Bereich; daher liegt hier die Lösungsmenge.

<u>Untersuchung für $x > 1$:</u>

In diesem Bereich sind alle Betragsinhalte **positiv**. Beim Auflösen dieser Beträge entsteht daher kein Minuszeichen. Beide Nenner sind positiv.

$$\begin{array}{rcll}
\frac{|x+4|}{|x-1|} & \leq & \frac{|x-1|}{x} & \\
\frac{x+4}{x-1} & \leq & \frac{x-1}{x} & |\cdot(x-1) \qquad \textit{(positiv)} \\
x+4 & \leq & \frac{(x-1)\cdot(x-1)}{x} & |\cdot x \qquad \textit{(positiv)} \\
(x+4)\cdot x & \leq & (x-1)^2 & \\
x^2+4x & \leq & x^2-2x+1 & |-x^2+2x \\
6x & \leq & 1 & |:6 \\
x & \leq & \frac{1}{6} & \\
L_4 & = & \{\ \} &
\end{array}$$

Die Lösungsmenge ist leer, da das Ergebnis **außerhalb** des untersuchten Bereiches liegt.

Die Gesamtlösungsmenge ist die Teillösungsmenge L_3, da alle anderen Teillösungsmengen leer sind.

$$\boxed{L = \{0 < x \leq \frac{1}{6}\}}$$