Gemischte Aufgaben zur Differential- und Integralrechnung

W. Kippels

20. Mai 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgaben

1.1 Aufgabe 1

Gesucht ist ein Polynom 4. Grades. Die Funktion hat einen Wendepunkt W_1 im Koordinantenursprung und einen weiteren W_2 bei $x_{w2} = 2$. Die Wendetangente in W_2 lautet: $f_2(x) = -16x + 16$

1. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung!
2. Untersuchen Sie die Funktion auf Hoch-, Tief- und Sattelpunkte!
3. Berechnen Sie die Fläche, die von der x-Achse und dem Funktionsgraphen eingeschlossen wird!

1.2 Aufgabe 2

Ein Polynom 4. Ordnung stellt einen zur y-Achse spiegelsymmetrischen Funktionsgraphen dar. Bei $W(-1|-32)$ liegt ein Wendepunkt und der Graph schneidet die x-Achse bei $x_0 = 3$.

1. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung!
2. Untersuchen Sie die Funktion auf Hoch-, Tief- und Sattelpunkte!
3. Berechnen Sie die Fläche, die von der Gerade mit der Gleichung $f_1(x) = 9x - 27$ und dem Funktionsgraphen der gesuchten Funktion eingeschlossen wird!

1.3 Aufgabe 3

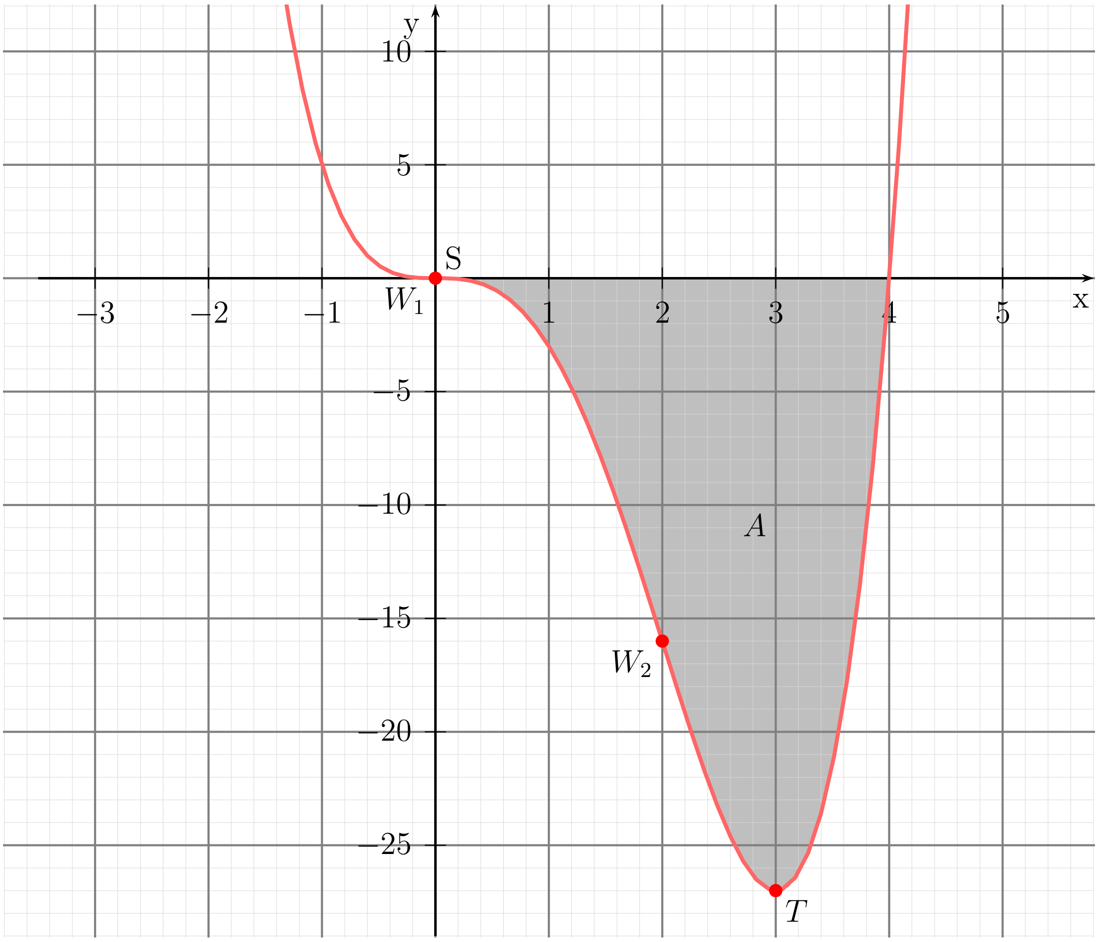
Gesucht ist ein Polynom 3. Grades. Die Funktion hat einen Wendepunkt bei $W(1|1)$ und berührt die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = x - 2$ an der Stelle $x_b = 2$.

1. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung!
2. Untersuchen Sie die Funktion auf Hoch-, Tief- und Sattelpunkte!
3. Berechnen Sie die Fläche, die von der Geraden der Funktion f_1 und dem Graphen der Funktion f ganz eingeschlossen wird!

2 Ergebnisse der Aufgaben

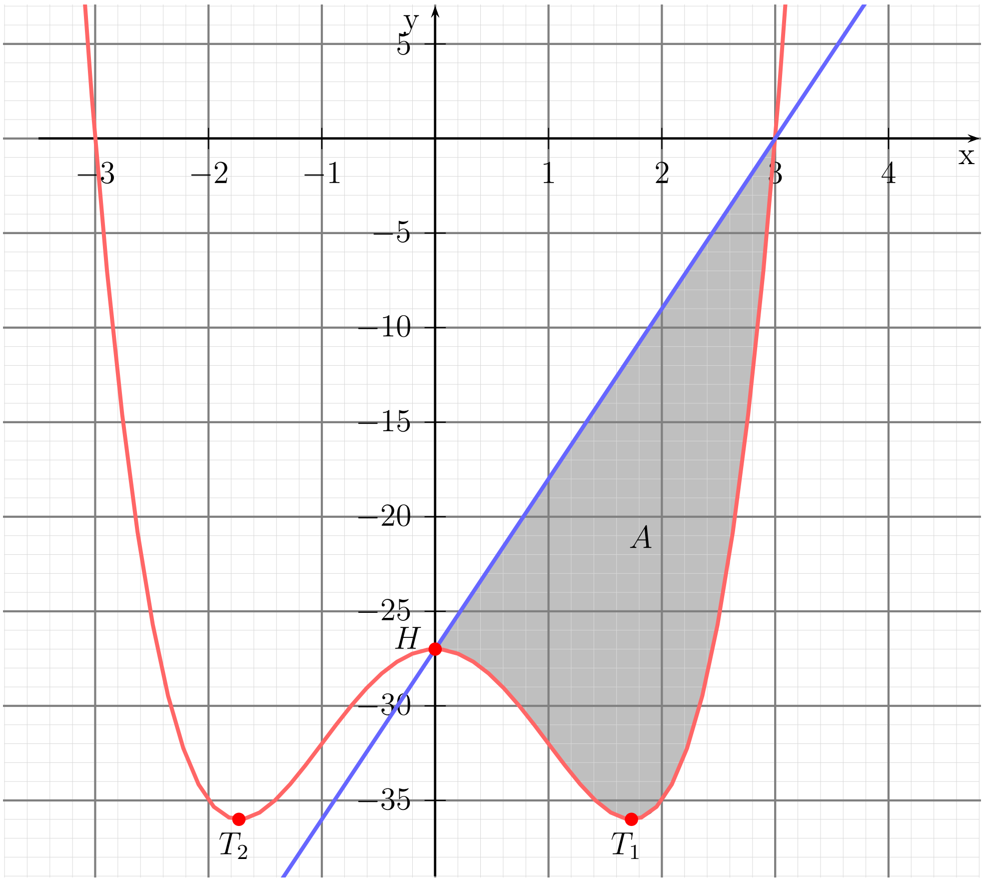
2.1 Aufgabe 1

1. $f(x) = x^4 - 4x^3$
2. Sattelpunkt $S(0|0)$, Tiefpunkt $T(3|-27)$
3. $A = 51{,}2\,\mathrm{FE}$



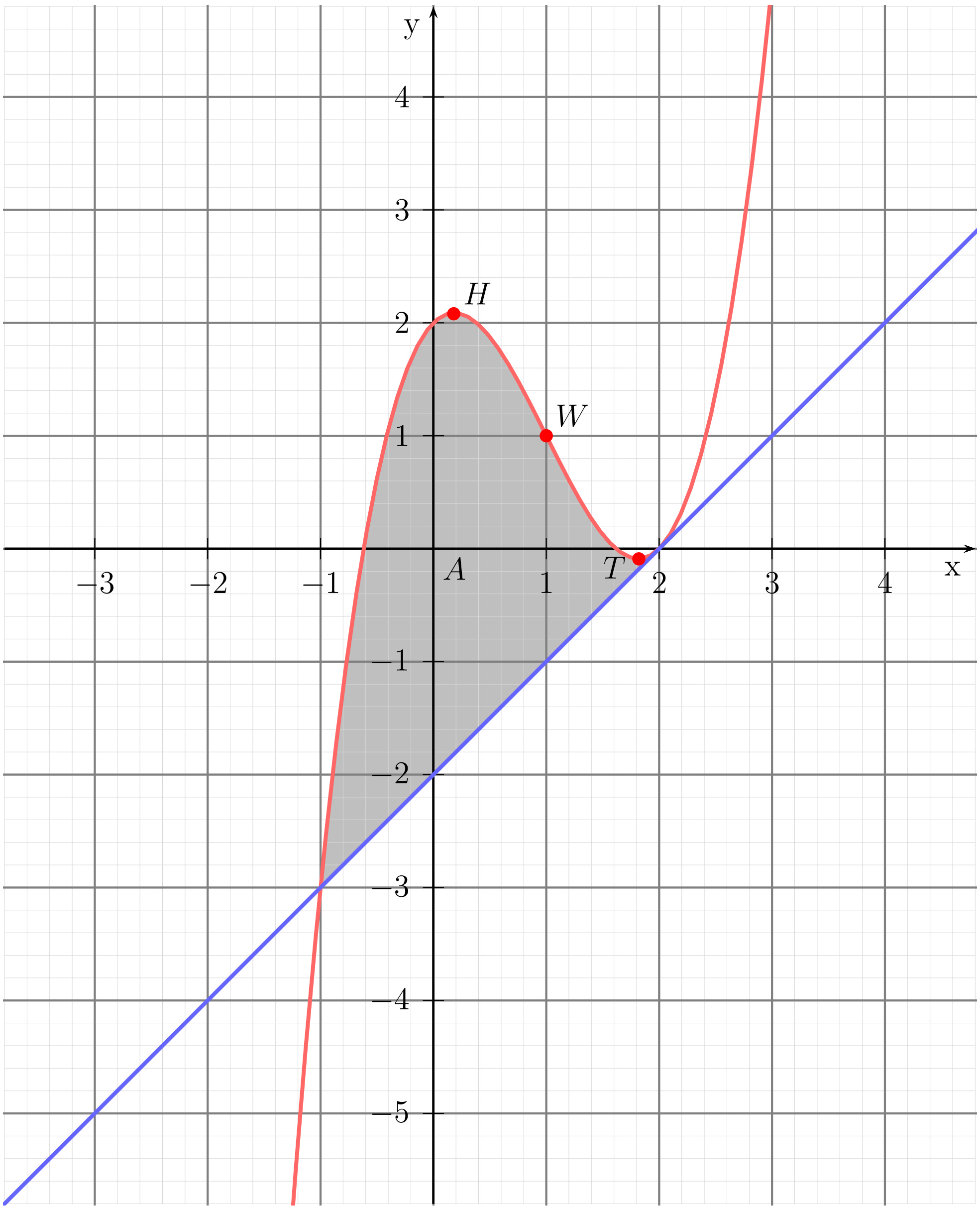
2.2 Aufgabe 2

1. $f(x) = x^4 - 6x^2 - 27$
2. Hochpunkt $H(0|-27)$, Tiefpunkte $T_1(\sqrt{3}|-36)$, $T_2(-\sqrt{3}|-36)$
3. $A = 45{,}9\,\text{FE}$



2.3 Aufgabe 3

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$
2. Tiefpunkt: $T(1{,}8165| - 0{,}0887)$ Hochpunkt: $H(0{,}1835|2{,}0887)$
3. $A = 6{,}75\,\mathrm{FE}$



3 Durchgerechnete Lösungen

3.1 Aufgabe 1

Bestimmung der Funktionsgleichung Zunächst benötigen wir die Funktionsgleichung in allgemeiner Form sowie die beiden Ableitungen.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\ f'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \\ f''(x) &= 12ax^2 + 6bx + 2c \end{aligned}$$

Jetzt müssen die angegebenen Bedingungen in Gleichungen umsetzen.

$$\begin{array}{lcrcrcl} \text{Punkt } W_1(0|0) & \Rightarrow & f(0) = 0 & \Rightarrow & 0a + 0b + 0c + 0d + e & = & 0 \\ \text{Wendep. bei } x_{w1} = 0 & \Rightarrow & f''(0) = 0 & \Rightarrow & 0a + 0b + 2c & = & 0 \\ \text{Wendep. bei } x_{w2} = 2 & \Rightarrow & f''(2) = 0 & \Rightarrow & 48a + 12b + 2c & = & 0 \\ \text{Punkt bei } x_{w2} = 2 & \Rightarrow & f(2) = f_1(2) & \Rightarrow & 16a + 8b + 4c + 2d + e & = & -16 \\ \text{Tangente bei } x_{w2} = 2 & \Rightarrow & f'(2) = f_1'(2) & \Rightarrow & 32a + 12b + 4c + d & = & -16 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem wird mit einem beliebigen Verfahren gelöst. Man erhält:

$$a = 1 \quad b = -4 \quad c = 0 \quad d = 0 \quad e = 0$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $\boxed{f(x) = x^4 - 4x^3}$

Bestimmung der Extrema Notwendige Bedingung für das Auftreten eines Extremwertes ist das Null-Werden der ersten Ableitung. Zum Prüfen benötigen wir zusätzlich auch noch die zweite Ableitung.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 4x^3 \\ f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 \\ f''(x) &= 12x^2 - 24x \end{aligned}$$

Damit können wir in die Berechnung der Kandidaten einsteigen.

$$\begin{array}{rcl} f'(x_E) & = & 0 \\ 4x_E^3 - 12x_E^2 & = & 0 \quad |4x^2 \text{ ausklammern} \\ 4x_E^2 \cdot (x_E - 3) & = & 0 \quad | \text{ Ein Produkt ist 0, wenn ein Faktor 0 ist.} \\ 4x_{E1}^2 = 0 & & x_{E2} - 3 = 0 \\ x_{E1} = 0 & & x_{E2} = 3 \end{array}$$

Demnach gibt es zwei Kandidaten für Extrema.

<u>Was ist bei $x_{E1} = 0$?</u>

$$f''(x_{E1}) = f''(0) = 12 \cdot 0^2 - 24 \cdot 0 = 0$$

Aus diesem Ergebnis können wir nichts erkennen. Daher verwenden wir sinnvollerweise das [1]andere Verfahren zur Überprüfung. Als Nachbarwerte nehme ich ± 1.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} f'(-1) & = & 4 \cdot (-1)^3 - 12 \cdot (-1)^2 & = & -15 \\ f'(1) & = & 4 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1^2 & = & -9 \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \text{Sattelpunkt bei } x_s = 0$$

$$y_s = f(x_s) = x_s^4 - 4x_s^3 = 0^4 - 4 \cdot 0^3 = 0$$

Zusammengefasst: Sattelpunkt $\boxed{S(0|0)}$

<u>Was ist bei $x_{E2} = 3$?</u>

$$f''(x_{E2}) = f''(3) = 12 \cdot 3^2 - 24 \cdot 3 = 36 > 0 \Rightarrow \text{ Tiefpunkt bei } x_T = 3$$
$$y_T = f(x_T) = x_T^4 - 4x_T^3 = 3^4 - 4 \cdot 3^3 = -27$$

Zusammengefasst: Tiefpunkt $\boxed{T(3|-27)}$

[1]siehe Regelheft: Vorzeichenwechseluntersuchung für $f'(x)$

Bestimmung der Fläche Bevor die Fläche berechnet werden kann, müssen die Nullstellen der Funktion bestimmt werden, denn sie stellen die Integrationsgrenzen dar.

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= 0 \\
x_0^4 - 4x_0^3 &= 0 \quad |x_0^3 \text{ ausklammern} \\
x_0^3 \cdot (x_0 - 4) &= 0 \quad | \text{ Ein Produkt ist 0, wenn ein Faktor 0 ist.} \\
x_{01}^3 = 0 & \qquad x_{02} - 4 = 0 \\
x_{01} = 0 & \qquad x_{02} = 4
\end{aligned}$$

Mit diesen Integrationsgrenzen können wir das Integral für die Fläche ansetzen. Da der Funktionsgraph in dem interessanten Bereich **unterhalb** der x-Achse liegt, muss das **negative** Integral als Fläche angesetzt werden.

$$\begin{aligned}
A &= -\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \\
&= -\int_0^4 x^4 - 4x^3 dx \\
&= -\left[\frac{1}{5}x^5 - x^4\right]_0^4 \\
&= -\left(\left[\frac{1}{5} \cdot 4^5 - 4^4\right] - \left[\frac{1}{5} \cdot 0^5 - 0^4\right]\right) \\
&= -\left(\left(\frac{1}{5} \cdot 4^5 - 4^4\right) - 0\right) \\
&= -\frac{1}{5} \cdot 4^5 + 4^4 \\
&= -204{,}8 + 256 \\
A &= 51{,}2
\end{aligned}$$

Die gesuchte Fläche beträgt $\boxed{A = 51{,}2\,\text{FE}}$

3.2 Aufgabe 2

Bestimmung der Funktionsgleichung Die allgemeine Form der Funktionsgleichung lautet:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

Wegen der Symmetrie treten nur gradzahlige Exponenten auf. Das bedeutet, die Parameter b und d sind 0. Man kann diese Teil-Terme dann auch gleich weglassen.

Wir benötigen die zweite Ableitung. Das ganze sieht dann so aus:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^4 + cx^2 + e \\ f'(x) &= 4ax^3 + 2cx \\ f''(x) &= 12ax^2 + 2c \end{aligned}$$

Nun müssen wir die angegebenen Bedingungen in Gleichungen umsetzen.

$$\begin{array}{lcrcrcl} \text{Punkt } (-1|-32) & \Rightarrow & f(-1) = -32 & \Rightarrow & a + c + e & = & -32 \\ \text{Wendepunkt bei } x_w = 1 & \Rightarrow & f''(-1) = 0 & \Rightarrow & 12a + 2c & = & 0 \\ \text{Nullstelle bei } x_0 = 3 & \Rightarrow & f(3) = 0 & \Rightarrow & 81a + 9c + e & = & 0 \end{array}$$

Dieses Lineargleichungssystem kann nun mit einem beliebigen Verfahren gelöst werden. Wir erhalten:

$$a = 1 \quad c = -6 \quad e = -27$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $\boxed{f(x) = x^4 - 6x^2 - 27}$

Bestimmung der Extrema Notwendige Bedingung für das Auftreten eines Extremwertes ist das Null-Werden der ersten Ableitung. Zum Prüfen benötigen wir zusätzlich auch noch die zweite Ableitung.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 6x^2 - 27 \\ f'(x) &= 4x^3 - 12x \\ f''(x) &= 12x^2 - 12 \end{aligned}$$

Damit können wir in die Berechnung der Kandidaten einsteigen.

$$\begin{array}{rcl} f'(x_E) & = & 0 \\ 4x_E^3 - 12x_E & = & 0 \quad |4x_E \text{ ausklammern} \\ 4x_E \cdot (x_E^2 - 3) & = & 0 \quad | \text{ Ein Produkt ist 0, wenn ein Faktor 0 ist.} \\ 4x_{E1} = 0 & & x_{e2/3}^2 - 3 = 0 \\ x_{E1} = 0 & & x_{E2/3}^2 = 3 \\ & & x_{E2} = +\sqrt{3} \\ & & x_{E3} = -\sqrt{3} \end{array}$$

Demnach gibt es drei Kandidaten für Extrema.

<u>Was ist bei $x_{E1} = 0$?</u>

$$f''(x_{E1}) = f''(0) = 12 \cdot 0^2 - 12 = -12 < 0 \Rightarrow \text{ Hochpunkt bei } x_H = 0$$
$$y_H = f(x_H) = 0^4 - 6 \cdot 0^2 - 27 = -27$$

Zusammengefasst: Hochpunkt $\boxed{H(0|-27)}$

<u>Was ist bei $x_{E2} = \sqrt{3}$?</u>

$$f''(x_{E2}) = f''(\sqrt{3}) = 12 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 - 12 = 24 > 0 \Rightarrow \text{ Tiefpunkt bei } x_{T1} = \sqrt{3}$$
$$y_{T1} = f(x_{T1}) = \left(\sqrt{3}\right)^4 - 6 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 - 27 = -36$$

Zusammengefasst: Tiefpunkt $\boxed{T_1(\sqrt{3}|-36)}$

<u>Was ist bei $x_{E3} = -\sqrt{3}$?</u>

Aus Symmetriegründen muss bei $x_{E3} = -\sqrt{3}$ ebenfalls ein Tiefpunkt liegen und zwar mit dem gleichen y-Wert. Da die Symmetrie bekannt ist, können wir das ausnutzen.

Zusammengefasst: Tiefpunkt $\boxed{T_2(-\sqrt{3}|-36)}$

Bestimmung der Fläche Bevor die Fläche berechnet werden kann, müssen die Schnittpunkte der Funktion $f(x)$ mit der Geraden $f_1(x)$ bestimmt werden, denn sie stellen die Integrationsgrenzen dar.

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) \\ x^4 - 6x^2 - 27 &= 9x - 27 \quad |-9x+27 \\ x^4 - 6x^2 - 9x &= 0 \quad |x \text{ ausklammern} \\ x \cdot (x^3 - 6x - 9) &= 0 \end{aligned}$$

Ein Produkt ist 0, wenn einer der Faktoren 0 ist. Dadurch erhalten wir sofort die erste Lösung:

$$x_1 = 0$$

In dem anderen Term $(x^3 - 6x - 9)$ müssen also die restlichen Nullstellen stecken.

$$x^3 - 6x - 9 = 0$$

Diese Gleichung dritten Grades können wir nicht analytisch lösen. Wir können jedoch durch **planvolles** Probieren eine Lösung erraten und dann den Term mit Hilfe einer Polynomdivision faktorisieren. *Wenn es **ganzzahlige** Nullstellen gibt, sind sie Teiler des absoluten Gliedes.* So kommt man sehr schnell auf die Lösung $x_2 = 3$. Wir führen eine Polynomdivision durch und erhalten:

$$(x^3 - 6x - 9) : (x - 3) = x^2 + 3x + 3$$

Der „Restterm“ $x^2 + 3x + 3$ ergibt eine Quadratische Gleichung, die wir mit Hilfe der p-q-Formel lösen können.

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 3 &= 0 \\ x_{1/2} &= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 3} \\ &= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{12}{4}} \\ x_{1/2} &= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

Da der Radikand der Wurzel negativ ist, gibt es keine weiteren (reellen) Nullstellen. Die Integrationsgrenzen stehen also mit $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$ fest.

Fertigt man eine Skizze der Funktionsgraphen an, dann kann man erkennen, dass in dem Bereich der Fläche die Funktion $f_1(x)$ oberhalb der Funktion $f(x)$ liegt. Damit können wir die gesuchte Fläche als Integral ansetzen.

$$
\begin{aligned}
A &= \int\limits_{x_1}^{x_2} f_1(x) - f(x) dx \\
&= \int\limits_{0}^{3} (9x - 27) - (x^4 - 6x^2 - 27) dx \\
&= \int\limits_{0}^{3} (9x - 27 - x^4 + 6x^2 + 27) dx \\
&= \int\limits_{0}^{3} (9x - x^4 + 6x^2) dx \\
&= \left[\frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5 + 2x^3 \right]_0^3 \\
&= \left(\frac{9}{2} \cdot 3^2 - \frac{1}{5} \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^3 \right) - \left(\frac{9}{2} \cdot 0^2 - \frac{1}{5} \cdot 0^5 + 2 \cdot x^3 \right) \\
A &= 45{,}9
\end{aligned}
$$

Die gesuchte Fläche beträgt $\boxed{A = 45{,}9\,\mathrm{FE}}$

3.3 Aufgabe 3

Bestimmung der Funktionsgleichung Die allgemeine Form der Funktionsgleichung lautet:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Wegen des Wendepunktes benötigen wir auch die erste und zweite Ableitung.

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\
f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\
f''(x) &= 6ax + 2b
\end{aligned}$$

Bekannt ist der x-Wert $x_b = 2$, wo sich die beiden Graphen berühren. Wir benötigen auch den zugehörigen y-Wert y_b.

$$y_b = f_1(x_b) = x_b - 2 = 2 - 2 = 0$$

Nun müssen wir die angegebenen Bedingungen in Gleichungen umsetzen.

$$\begin{array}{lcrcrcl}
\text{Wendepunkt } W(1|1) & \Rightarrow & f(1) = 1 & \Rightarrow & a + b + c + d & = & 1 \\
\text{Wendepunkt bei } x_w = 1 & \Rightarrow & f''(1) = 0 & \Rightarrow & 6a + 2b & = & 0 \\
\text{Berührpunkt } B(2|0) & \Rightarrow & f(2) = 0 & \Rightarrow & 8a + 4b + 2c + d & = & 0 \\
\text{Berühren bei } x_b = 2 & \Rightarrow & f'(2) = f_1'(2) & \Rightarrow & 12a + 4b + c & = & 1
\end{array}$$

Dieses Lineargleichungssystem kann nun mit einem beliebigen Verfahren gelöst werden. Wir erhalten:

$$a = 1 \quad b = -3 \quad c = 1 \quad d = 2$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $\boxed{f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2}$

Bestimmung der Extrema Notwendige Bedingung für das Auftreten eines Extremwertes ist das Null-Werden der ersten Ableitung. Zum Prüfen benötigen wir zusätzlich auch noch die zweite Ableitung.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x^2 + x + 2 \\ f'(x) &= 3x^2 - 6x + 1 \\ f''(x) &= 6x - 6 \end{aligned}$$

Damit können wir in die Berechnung der Kandidaten einsteigen.

$$\begin{aligned} f'(x_E) &= 0 \\ 3x_E^2 - 6x_E + 1 &= 0 \quad |:3 \\ x_E^2 - 2x_E + \frac{1}{3} &= 0 \\ x_{E1/2} &= 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$x_{E1} = 1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \qquad x_{E2} = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$x_{E1} \approx 1{,}8165 \qquad x_{E2} \approx 0{,}1835$$

Demnach gibt es zwei Kandidaten für Extrema.

<u>Was ist bei $x_{E1} = 1 + \sqrt{\frac{2}{3}}$?</u>

$$f''(x_{E1}) = f''\left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 6 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right) - 6 \approx 4,899 > 0 \Rightarrow \text{ Tiefpunkt bei } x_T = 1 + \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$y_T = f(x_T) = \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 - 3 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right) + 2 \approx -0{,}08866$$

Zusammengefasst: Tiefpunkt $\boxed{T(1{,}8165| - 0{,}08866)}$

<u>Was ist bei $x_{E2} = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$?</u>

$$f''(x_{E1}) = f''\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 6 \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) - 6 \approx -4,899 < 0 \Rightarrow \text{ Hochpunkt bei } x_H = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$y_H = f(x_H) = \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 - 3 \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) + 2 \approx 2{,}0887$$

Zusammengefasst: Hochpunkt $\boxed{H(0{,}1835|2{,}0887)}$

Bestimmung der Fläche Bevor die Fläche berechnet werden kann, müssen die Schnittpunkte der Funktion $f(x)$ mit der Geraden $f_1(x)$ bestimmt werden, denn sie stellen die Integrationsgrenzen dar.

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) \\ x^3 - 3x^2 + x + 2 &= x - 2 \quad | - x + 2 \\ x^3 - 3x^2 + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Bekannt ist bereits der Berührpunkt bei $x_b = 2$ und damit $x_1 = 2$. Daher muss man keine Nullstelle dieser Gleichung mehr durch planvolles Raten suchen. Wir können sofort eine Polynomdivision durchführen. Wir erhalten als Ergebnis:

$$\left(x^3 - 3x^2 + 4\right) : (x - 2) = x^2 - x - 2$$

Mit Hilfe der p-q-Formel lassen sich nun die weiteren Nullstellen dieses Terms beestimmen.

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 \\ x_{2/3} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \\ &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \\ x_2 = -1 & \qquad x_3 = 2 \end{aligned}$$

Die Lösung $x_3 = 2$ ist identisch mit $x_1 = 2$. Die Integrationsgrenzen sind also:

$$x_1 = -1 \text{ und } x_2 = 2$$

Fertigt man eine Skizze der beiden Funktionsgraphen in dem Bereich zwischen $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$ an, so kann man feststellen, dass die Gerade f_1 **unterhalb** von f liegt. Damit kann die Fläche als Integral angesetzt werden:

$$
\begin{aligned}
A &= \int\limits_{-1}^{2} f(x) - f_1(x)dx \\
&= \int\limits_{-1}^{2} \left(x^3 - 3x^2 + x + 2\right) - (x-2)dx \\
&= \int\limits_{-1}^{2} \left(x^3 - 3x^2 + 4\right) dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x\right]_{-1}^{2} \\
&= \left(\frac{1}{4}2^4 - 2^3 + 4\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{4}(-1)^4 - (-1)^3 + 4\cdot(-1)\right) \\
&= 4 - (-2{,}75) \\
A &= 6{,}75
\end{aligned}
$$

Die gesuchte Fläche beträgt $\boxed{A = 6{,}75\,\mathrm{FE}}$