Rechnen mit Klammern

W. Kippels

28. Juli 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Gesetze und Formeln zum Rechnen mit Klammern

Zum Rechnen mit Klammern gibt es nur wenige Gesetze. Diese werden nachfolgend hier aufgelistet.

1.1 Kommutativgesetze

Auf Deutsch werden die Kommutativgesetze auch **Vertauschungsgesetze** genannt. Sie gelten für **Addition** und **Multiplikation**.

$$\boxed{a + b = b + a}$$
$$\boxed{a \cdot b = b \cdot a}$$

Wie man sieht, kann man die Summanden beim Addieren – bzw. die Faktoren beim Multiplizieren – einfach vertauschen. Die Reihenfolge spielt keine Rolle. Daher werden hier eigentlich nie Fehler gemacht.

Achtung! Kommt die Subtraktion ins Spiel, dann sieht die Sache schon ganz anders aus. So ohne weiteres darf da nicht getauscht werden:

$$a - b \neq b - a$$

Man muss die **Subtraktion** auffassen als **Addition von negativen Zahlen**. Damit sieht die Sache so aus:

$$a - b = a + (-b) = (-b) + a = -b + a$$

Beim Vertauschen muss also das Vorzeichen mitgenommen werden, nur so kann auch bei einer Subtraktion das Vertauschungsgesetz angewendet werden.

Beispiele:

$$2 + 6 + 8 = 2 + 8 + 6 = 10 + 6 = 16$$
$$-7 + 10 = 10 - 7 = 3$$

1.2 Assoziativgesetze

Hierbei kommt jeweils nur **eine einzige Rechnenart** zum Einsatz, also **Addition** oder **Multiplikation**. (Hierbei wird ggf. Subtraktion als Addition einer negativen Zahl angesehen.)

$$\boxed{(a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c}$$
$$\boxed{(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c) = a\cdot b\cdot c}$$

Die Assoziativgesetze besagen nichts anderes, als die Tatsache, dass man sowohl beim Addieren als auch beim Multiplizieren in beliebiger Reihenfolge vorgehen kann. Auch hier passieren eigentlich nie Fehler, so lange keine Minuszeichen auftauchen.

Ähnlich, wie beim Kommutativgesetz muss man auch hier eine Subtraktion als Addition mit negativen Zahlen behandeln. So geht es jedenfalls nicht:

$$(a-b)+c \neq a-(b+c)$$

Man muss das Minuszeichen „fest an die Zahl binden“. Das sieht dann so aus:

$$(a-b)+c = \Big(a+(-b)\Big)+c = a+\Big((-b)+c\Big) = a+(-b+c)$$

Beispiele:

$$4+6+12-2 = (4+6)+(12-2) = 10+10 = 20$$
$$23-31+32+17 = 23+17-31+32 = (23+17)+(-31+32) = 40+1 = 41$$
$$3x+5y-x+2y = 3x-x+5y+2y = 2x+7y$$
$$5u-2w+4v-3w+2v-5u = 5u-5u+4v+2v-2w-3w = 0u+6v-5w = 6v-5w$$

1.3 Distributivgesetz

Hier werden – im Gegensatz zu den Kommutativ- und Assoziativ-Gesetzen – **verschiedene Rechenoperationen** (das **Addieren** und das **Multiplizieren**) auf eine bestimmte Weise miteinander verknüpft.

$$\boxed{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$$

$$\boxed{(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c}$$

Für viele Menschen ist das Gesetz besser in Worten zu merken:

Eine Zahl wird mit einer Summe multipliziert,

indem man die Zahl mit jedem Summanden multipliziert.

Ein Minuszeichen anstelle des Pluszeichens ist beim Distributivgesetz kein Problem. Damit funktioniert das Distributivgesetz auch:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$

Wenn man das Distributivgesetz „rückwärts“ anwendet, dann spricht man auch vom *Ausklammern*. Ist eine Zahl oder ein Term in jedem Summanden als Faktor enthalten, dann kann man ihn aus der Summe „ausklammern“, indem man diese Zahl / diesen Term aus jedem Summanden herausnimmt und als Faktor vor eine Klammer setzt.

$$ab + ac = a \cdot (b + c)$$

Als Sonderfall des Distributivgesetzes kann man noch die Regel auffassen, die beim Auflösen einer Klammer angewendet wird, wenn vor der Klammer ein Minuszeichen steht:

$$-(a + b) = -a - b$$

$$-(a - b) = -a + b$$

Viele Menschen können sich diese Regel besser in Worten merken:

Steht ein Minuszeichen vor einer Klammer,

dann werden beim Auflösen der Klammer alle Vorzeichen umgekehrt.

Beispiele:

$$3 \cdot (2x + 3y) = 6x + 9y$$

$$x \cdot (5a - 2b) = 5ax - 2bx$$

$$15u - 20v = 5 \cdot (3u - 4v)$$

$$-(5a - 4b + 3c) = -5a + 4b - 3c$$

$$(2x - 3) - (4x + 5) = 2x - 3 - 4x - 5 = -2x - 8$$

$$x - 3 \cdot (-2x - 4) = x - 3 \cdot (-2x) - 3 \cdot (-4) = x + 6x + 12 = 7x + 12$$

1.4 Gemischte Beispiele zur Anwendung der Gesetze

$$-(x-y) = -x+y$$

$$-(-a-b) = a+b$$

$$-(a+b) = -a-b$$

$$\begin{aligned} 2a-(a-2b) &= 2a-a+2b \\ &= a+2b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3a+(2a-4b) &= 3a+2a-4b \\ &= 5a-4b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2a+3b)-(a-2b) &= 2a+3b-a+2b \\ &= 2a-a+3b+2b \\ &= a+5b \end{aligned}$$

$$5 \cdot (3a-2b) = 15a-10b$$

$$(-7x+3y)\cdot(-2x) = 14x^2-6xy$$

$$-3b\cdot(-5a-4c) = 15ab+12bc$$

$$-(2a-3b+5c-8d) = -2a+3b-5c+8d$$

$$-(5x-2y-z)\cdot(-7) = 35x-14y-7z$$

1.5 Produktformel

Aus dem Distributivgesetz ergibt sich auch eine Formel, mit deren Hilfe man das Produkt zweier Summen bestimmen kann:

$$\boxed{(a+b)\cdot(c+d) = ac + ad + bc + bd}$$

Diese Formel kann entsprechend auch erweitert werden auf Faktoten mit mehr als zwei Summanden. Hier einige Beispiele dazu:

$$(a+b+c)\cdot(d+e) = ad + bd + cd + ae + be + ce$$
$$(a+b+c)\cdot(d+e+f) = ad + bd + cd + ae + be + ce + af + bf + cf$$
$$(a+b+c+d)\cdot(e+f) = ae + be + ce + de + af + bf + cf + df$$

Verallgemeinert lässt sich das besser in Worten ausdrücken:

Jedes Glied der ersten Summe wird mit jedem Glied der zweiten Summe multipliziert.

1.6 Beispiele zur Produktformel

$$\begin{aligned}
(2x-7)\cdot(3x+2) &= 6x^2 + 4x - 21x - 14 \\
&= 6x^2 - 17x - 14
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2a+3b-c)\cdot(a-2b+3c) &= 2a^2 - 4ab + 6ac + 3ab - 6b^2 + 9bc - ac + 2bc - 3c^2 \\
&= 2a^2 - 6b^2 - 3c^2 - ab + 5ac + 11bc
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2x+3y)\cdot(3x-4y)\cdot(-5x+2y) &= (6x^2 - 8xy + 9xy - 12y^2)\cdot(-5x+2y) \\
&= (6x^2 + xy - 12y^2)\cdot(-5x+2y) \\
&= -30x^3 + 12x^2y - 5x^2y + 2xy^2 + 60xy^2 - 24y^3 \\
&= -30x^3 + 7x^2y + 62xy^2 - 24y^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-(x-1)\cdot(-2x+3) &= (-x+1)\cdot(-2x+3) \\
&= 2x^2 - 3x - 2x + 3 \\
&= 2x^2 - 5x + 3
\end{aligned}$$

2 Übungsaufgaben

Fassen Sie die Terme so weit wie möglich zusammen!

2.1 Aufgabe 1

$$2 \cdot (x - 5) =$$

2.2 Aufgabe 2

$$(5p - 2q) \cdot (-3r) =$$

2.3 Aufgabe 3

$$-2b(5a - c) =$$

2.4 Aufgabe 4

$$(x + 2y) \cdot (2x - 4y) =$$

2.5 Aufgabe 5

$$4 - [2x - (3x - 5)] =$$

2.6 Aufgabe 6

$$a - [2a - 2b - \langle 3b - (-2a + 5b)\rangle] =$$

2.7 Aufgabe 7

$$(1 - a) \cdot (a + b - 2) =$$

2.8 Aufgabe 8

$$(2u - 3v) \cdot (-x - 2y + 5z) =$$

2.9 Aufgabe 9

$$(x + 1)(x + 2)(x - 3) =$$

2.10 Aufgabe 10

$$(a - b)(-2a - b)(-a - 2b) =$$

2.11 Aufgabe 11

$$(2x-5)\cdot(4x-3)=$$

2.12 Aufgabe 12

$$2x-5\cdot(4x-3)=$$

2.13 Aufgabe 13

$$(2x-5)\cdot 4x-3=$$

2.14 Aufgabe 14

$$2x-5\cdot 4x-3=$$

2.15 Aufgabe 15

$$2x-(5\cdot 4x-3)=$$

2.16 Aufgabe 16

$$(3x+5)\cdot(-4x+2)-(5x-1)=$$

2.17 Aufgabe 17

$$(3x+5)-(-4x+2)\cdot(5x-1)=$$

2.18 Aufgabe 18

$$(3x+5)-(-4x+2)-3(5x-1)=$$

2.19 Aufgabe 19

$$\Big((3x+5)-(-4x+2)-3\Big)\cdot(5x-1)=$$

2.20 Aufgabe 20

$$\Big(-(3x+5)\cdot(-4x+2)\Big)-3\cdot(5x-1)=$$

3 Lösungen der Übungsaufgaben

3.1 Aufgabe 1

$$2 \cdot (x - 5) = 2x - 10$$

3.2 Aufgabe 2

$$(5p - 2q) \cdot (-3r) = -15pr + 6qr$$

3.3 Aufgabe 3

$$-2b(5a - c) = -10ab + 2bc$$

3.4 Aufgabe 4

$$\begin{aligned}(x + 2y) \cdot (2x - 4y) &= 2x^2 - 4xy + 4xy - 8y^2 \\ &= 2x^2 - 8y^2\end{aligned}$$

3.5 Aufgabe 5

$$\begin{aligned}4 - [2x - (3x - 5)] &= 4 - (2x - 3x + 5) \\ &= 4 - 2x + 3x - 5 \\ &= x - 1\end{aligned}$$

3.6 Aufgabe 6

$$\begin{aligned}a - [2a - 2b - \langle 3b - (-2a + 5b)\rangle] &= a - [2a - 2b - \langle 3b + 2a - 5b\rangle] \\ &= a - [2a - 2b - 3b - 2a + 5b] \\ &= a - 2a + 2b + 3b + 2a - 5b \\ &= a\end{aligned}$$

3.7 Aufgabe 7

$$\begin{aligned}(1 - a) \cdot (a + b - 2) &= a + b - 2 - a^2 - ab + 2a \\ &= 3a + b - 2 - a^2 - ab\end{aligned}$$

3.8 Aufgabe 8

$$(2u-3v)\cdot(-x-2y+5z) = -2ux-4uy+10uz+3vx+6vy-15vz$$

3.9 Aufgabe 9

$$\begin{aligned}(x+1)(x+2)(x-3) &= \left(x^2+2x+x+2\right)(x-3)\\ &= \left(x^2+3x+2\right)(x-3)\\ &= x^3-3x^2+3x^2-9x+2x-6\\ &= x^3-7x-6\end{aligned}$$

3.10 Aufgabe 10

$$\begin{aligned}(a-b)(-2a-b)(-a-2b) &= \left(-2a^2-ab+2ab+b^2\right)(-a-2b)\\ &= \left(-2a^2+ab+b^2\right)(-a-2b)\\ &= 2a^3+4a^2b-a^2b-2ab^2-ab^2-2b^3\\ &= 2a^3+3a^2b-3ab^2-2b^3\end{aligned}$$

3.11 Aufgabe 11

$$\begin{aligned}(2x-5)\cdot(4x-3) &= 8x^2-6x-20x+15\\ &= 8x^2-26x+15\end{aligned}$$

3.12 Aufgabe 12

$$\begin{aligned}2x-5\cdot(4x-3) &= 2x-20x+15\\ &= -18x+15\end{aligned}$$

3.13 Aufgabe 13

$$(2x-5)\cdot 4x-3 = 8x^2-20x-3$$

3.14 Aufgabe 14

$$\begin{aligned}2x-5\cdot 4x-3 &= 2x-20x-3\\ &= -18x-3\end{aligned}$$

3.15 Aufgabe 15

$$\begin{aligned} 2x-(5\cdot 4x-3) &= 2x-(20x-3) \\ &= 2x-20x+3 \\ &= -18x+3 \end{aligned}$$

3.16 Aufgabe 16

$$\begin{aligned} (3x+5)\cdot(-4x+2)-(5x-1) &= -12x^2+6x-20x+10-5x+1 \\ &= -12x^2-19x+11 \end{aligned}$$

3.17 Aufgabe 17

$$\begin{aligned} (3x+5)-(-4x+2)\cdot(5x-1) &= 3x+5-(-20x^2+4x+10x-2) \\ &= 3x+5+20x^2-4x-10x+2 \\ &= 20x^2-11x+7 \end{aligned}$$

3.18 Aufgabe 18

$$\begin{aligned} (3x+5)-(-4x+2)-3(5x-1) &= 3x+5+4x-2-15x+3 \\ &= -8x+6 \end{aligned}$$

3.19 Aufgabe 19

$$\begin{aligned} \Big((3x+5)-(-4x+2)-3\Big)\cdot(5x-1) &= \Big(3x+5+4x-2-3\Big)\cdot(5x-1) \\ &= 7x\cdot(5x-1) \\ &= 35x^2-7x \end{aligned}$$

3.20 Aufgabe 20

$$\begin{aligned} \Big(-(3x+5)\cdot(-4x+2)\Big)-3\cdot(5x-1) &= (-3x-5)\cdot(-4x+2)-3\cdot(5x-1) \\ &= (12x^2-6x+20x-10)-15x+3 \\ &= 12x^2+14x-10-15x+3 \\ &= 12x^2-x-7 \end{aligned}$$