Flächenberechnung mit Integralen

W. Kippels

30. April 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Übungsaufgaben

1.1 Aufgabe 1

Der Graph der Funktion $f_1(x) = 0,5(x-2)^2 + 3,5$ wird vom Graphen der Funktion $f_2(x) = x + 3$ geschnitten. Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen!

1.2 Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - x - 12$. Bestimmen Sie die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse!

1.3 Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x^2 + 18x + 24$. Bestimmen Sie die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen, der x-Achse und der y-Achse!

1.4 Aufgabe 4

Der Graph der Funktion $f_1(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 3$ wird vom Graphen der Funktion $f_2(x) = 2x^2 - 4x + 1$ geschnitten. Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen!

1.5 Aufgabe 5

Der Graph der Funktion $f_1(x) = x^4 - 4x^2 + 3$ wird vom Graphen der Funktion $f_2(x) = -x^2 + 7$ geschnitten. Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen!

1.6 Aufgabe 6

Der Graph der Funktion $f_1(x) = 2x^2 - 3x + 3$ wird vom Graphen der Funktion $f_2(x) = x^2 + 2x - 1$ geschnitten. Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen!

1.7 Aufgabe 7

Ein Polynom 4. Grades hat zwei Tiefpunkte auf der x-Achse bei $T_1(0|0)$ und $T_2(4|0)$. Der Funktionsgraph verläuft außerdem noch durch den Punkt $P(2|240)$. Berechnen Sie die Fläche, die zwischen den beiden Tiefpunkten von dem Graphen von $f(x)$ und der x-Achse eingeschlossen wird!

1.8 Aufgabe 8

Ein Polynom 3. Grades hat einen Hochpunkt bei $H(0|4)$ und einen Tiefpunkt bei $T(2|0)$. Berechnen Sie die Fläche, die von der positiven x-Achse, der y-Achse und dem Funktionsgraphen des Polynoms eingeschlossen wird!

1.9 Aufgabe 9

Eine Parabel (Polynom 2. Grades) verläuft durch die Punkte $P_1(1|-15)$, $P_2(4|12)$ und $P_3(5|9)$. Berechnen Sie die Fläche, die die x-Achse mit dem Parabelbogen als Begrenzung bildet.

1.10 Aufgabe 10

Ein Polynom 3. Grades $f(x)$ hat einen Wendepunkt bei $x_w = 3$ mit der Wendetangente $y = -6x + 22$. Die y-Achse schneidet der Graph des Polynoms bei $y_0 = -32$. Berechnen Sie die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen von $f(x)$.

2 Lösungen der Übungsaufgaben

2.1 Aufgabe 1

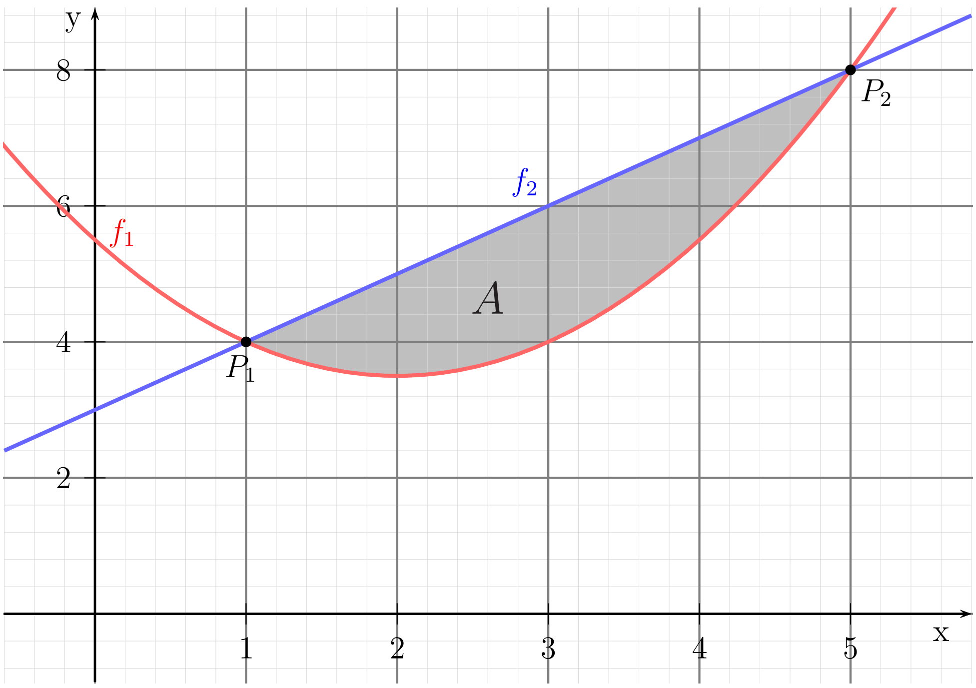
Der Graph der Funktion $f_1(x) = 0,5(x-2)^2 + 3,5$ wird vom Graphen der Funktion $f_2(x) = x + 3$ geschnitten. Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen!

Zunächst müssen wir die Schnittstellen der beiden Funktionsgraphen bestimmen. Dies geschieht duch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen.

$$\begin{aligned}
f_1(x_s) &= f_2(x_s) \\
0,5(x_s-2)^2 + 3,5 &= x_s + 3 \\
0,5(x_s^2 - 4x_s + 4) + 3,5 &= x_s + 3 \\
0,5x_s^2 - 2x_s + 2 + 3,5 &= x_s + 3 \quad | - x_s - 3 \\
0,5x_s^2 - 3x_s + 2,5 &= 0 \quad | \cdot 2 \\
x_s^2 - 6x_s + 5 &= 0 \\
x_{s1/2} &= 3 \pm \sqrt{9-5} \\
x_{s1/2} &= 3 \pm 2 \\
x_1 = 1 & \quad x_2 = 5
\end{aligned}$$

Damit sind die Integrationsgrenzen bekannt.

Skizze der gesuchten Fläche:



Ein Blick auf die Skizze zeigt, dass im Bereich zwischen 1 und 5 f_2 die obere und f_1 die untere Funktion ist. Damit können wir die gesuchte Fläche als bestimmtes Integral ansetzen.

$$
\begin{aligned}
A &= \int\limits_{x_1}^{x_2} f_2(x) - f_1(x)\ dx \\
&= \int\limits_1^5 (x+3) - \left(0,5(x-2)^2 + 3,5\right)\ dx \\
&= \int\limits_1^5 x + 3 - \left(0,5x^2 - 2x + 2 + 3,5\right)\ dx \\
&= \int\limits_1^5 x + 3 - 0,5x^2 + 2x - 5,5\ dx \\
&= \int\limits_1^5 -0,5x^2 + 3x - 2,5\ dx \\
&= \left[-\frac{0,5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2,5x\right]_1^5 \\
&= \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x\right]_1^5 \\
&= \left[-\frac{1}{6}\cdot 5^3 + \frac{3}{2}\cdot 5^2 - \frac{5}{2}\cdot 5\right] - \left[-\frac{1}{6}\cdot 1^3 + \frac{3}{2}\cdot 1^2 - \frac{5}{2}\cdot 1\right] \\
&= \frac{25}{6} - \left(-\frac{7}{6}\right) \\
&= \frac{32}{6} \approx 5,333 \\
A &= \frac{16}{3}\,\text{FE}
\end{aligned}
$$

Die gesuchte Fläche beträgt ca. 5,333 Flächeneinheiten.

2.2 Aufgabe 2

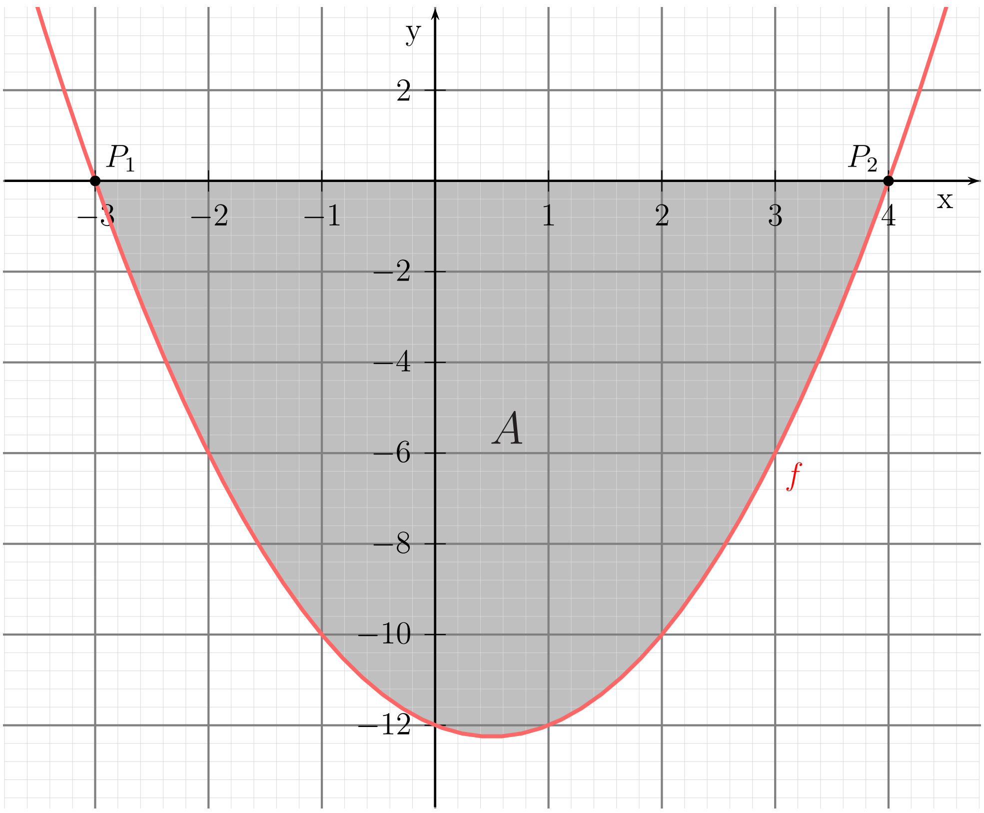
Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - x - 12$. Bestimmen Sie die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse!

Zunächst müssen die Schnittstellen des Funktionsgraphen mit der x-Achse berechnet werden.

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= 0 \\
x_0^2 - x_0 - 12 &= 0 \\
x_{01/2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12} \\
x_{01/2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{48}{4}} \\
x_{01/2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} \\
x_{01/2} &= \frac{1}{2} \pm \frac{7}{2} \\
x_{01} = -3 & \qquad x_{02} = 4
\end{aligned}$$

Damit sind die Integrationsgrenzen bekannt.

Skizze der gesuchten Fläche:



Der Formfaktor $a = +1$ ist positiv, die Parabel ist also nach oben geöffnet. Deshalb muss die Fläche ***unterhalb*** der x-Achse liegen. Daher ergibt der Ansatz mit dem bestimmten Integral einen ***negativen*** Wert. Wir müssen daher beim Ansatz ein Minuszeichen einfügen.

$$\begin{aligned}
A &= -\int\limits_{x_{01}}^{x_{02}} f(x)\ dx \\
&= -\int\limits_{-3}^{4} x^2 - x - 12\ dx \\
&= -\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 12x\right]_{-3}^{4} \\
&= -\left[\left(\frac{1}{3}\cdot 4^3 - \frac{1}{2}\cdot 4^2 - 12\cdot 4\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot(-3)^3 - \frac{1}{2}\cdot(-3)^2 - 12\cdot(-3)\right)\right] \\
&= -\left(-\frac{104}{3} - \frac{45}{2}\right) \\
&= \frac{343}{6} \approx 57,167 \\
A &= \frac{343}{6}\,\text{FE}
\end{aligned}$$

Die gesuchte Fläche beträgt ca. 57,167 Flächeneinheiten.

2.3 Aufgabe 3

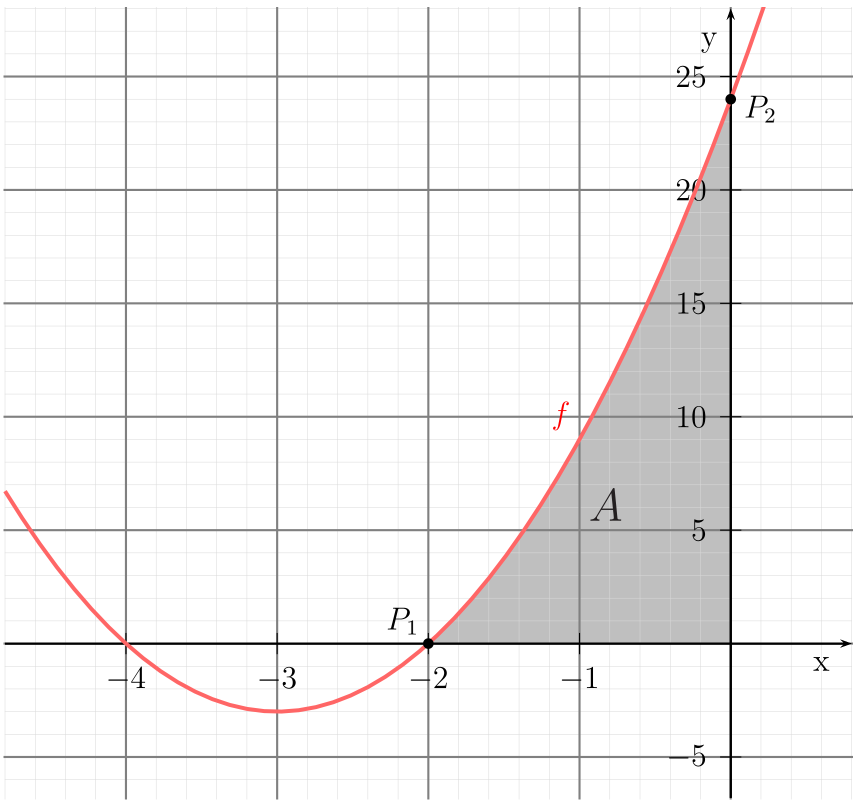
Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x^2 + 18x + 24$. Bestimmen Sie die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen, der x-Achse und der y-Achse!

Zunächst müssen die Schnittstellen des Funktionsgraphen mit der x-Achse berechnet werden.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ 3x_0^2 + 18x_0 + 24 &= 0 \quad |:3 \\ x_0^2 + 6x_0 + 8 &= 0 \\ x_{01/2} &= -3 \pm \sqrt{9-8} \\ x_{01/2} &= -3 \pm 1 \\ x_{01} = -4 & \qquad x_{02} = -2 \end{aligned}$$

Damit sind die möglichen Integrationsgrenzen bekannt. Ein Blick auf den Funktionsgraphen zeigt, dass der rechte Schnittpunkt mit der x-Achse $x_1 = -2$ als untere Integrationsgrenze verwendet werden muss. Die obere Grenze ist die y-Achse, also $x_2 = 0$. Die linke Nullstelle bei $x_{01} = -4$ liegt zu weit ab.

Skizze der gesuchten Fläche:



Die Fläche liegt ***oberhalb*** der x-Achse. Daher ergibt das bestimmte Integral einen ***positiven*** Wert, es muss also kein Minuszeichen eingefügt werden.

$$
\begin{aligned}
A &= \int\limits_{-2}^{0} f(x)\ dx \\
&= \int\limits_{-2}^{0} 3x^2 + 18x + 24\ dx \\
&= \Big[x^3 + 9x^2 + 24x\Big]_{-2}^{0} \\
&= \Big(0^3 + 9 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0\Big) - \Big((-2)^3 + 9 \cdot (-2)^2 + 24 \cdot (-2)\Big) \\
&= 0 - (-20) \\
A &= 20\,\mathrm{FE}
\end{aligned}
$$

Die gesuchte Fläche beträgt 20 Flächeneinheiten.

2.4 Aufgabe 4

Der Graph der Funktion $f_1(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 3$ wird vom Graphen der Funktion $f_2(x) = 2x^2 - 4x + 1$ geschnitten. Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen!

Schnittpunktberechnung: Zunächst müssen wir die Schnittstellen der beiden Funktionsgraphen bestimmen. Dies geschieht duch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen.

$$\begin{aligned}
f_1(x_s) &= f_2(x_s) \\
x_s^3 - 4x_s^2 + 5x_s - 3 &= 2x_s^2 - 4x_2 + 1 \quad | - 2x_s^2 + 4x_2 - 1 \\
x_s^3 - 6x_s^2 + 9x_s - 4 &= 0
\end{aligned}$$

Ein analytisches Lösungsverfahren für Kubische Gleichungen haben wir nicht zur Verfügung. Wir können jedoch durch ***planvolles*** Probieren eine Lösung bestimmen und dann den Funktionsterm faktorisieren. Wenn es ganzzahlige Lösungen gibt, dann sind das Teiler des absoluten Gliedes. Es kommt also nur ± 1, ± 2 und ± 4 in Frage.

Wir finden schnell die Lösung $x_{s1} = 1$. Mit Hilfe der Polynomdivision können wir $(x_s - 1)$ ausklammern.

$$x_s^3 - 6x_s^2 + 9x_s - 4 = \left(x_s^2 - 5x_s + 4\right) \cdot (x_s - 1)$$

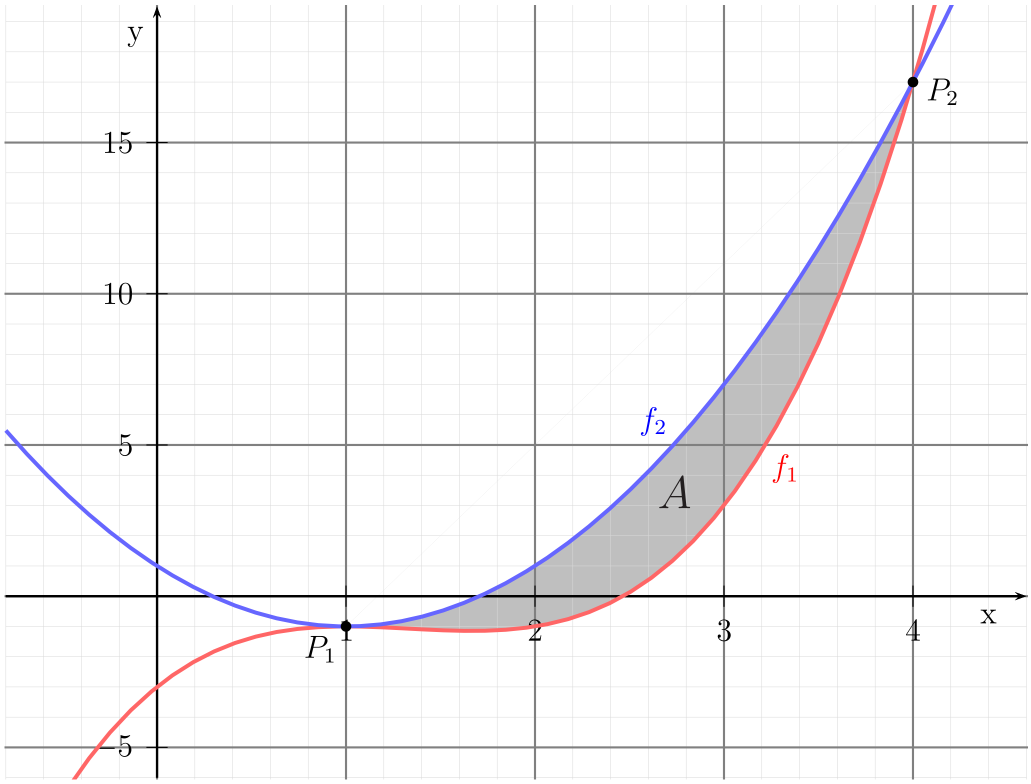
Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Wir müssen also für weitere Nullstellen nur noch den ersten Term untersuchen.

$$\begin{aligned}
x_s^2 - 5x_s + 4 &= 0 \\
x_{s2/3} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} \\
x_{s2/3} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} \\
x_{s2/3} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \\
x_{s2/3} &= \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \\
x_{s2} = 1 & \qquad x_{s3} = 4
\end{aligned}$$

Bei $x = 1$ liegt eine doppelte Nullstelle vor, wir haben also tatsächlich nur zwei gemeinsame Punkte der beiden Funktionsgraphen. Damit sind die Integrationsgrenzen als $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$ bekannt.

Werfen wir einen Blick auf die Funktionsgraphen, dann können wir sehen, dass in diesem Bereich der Graph der Funktion f_2 oberhalb des Graphen der Funktion f_1 liegt. Damit können wir das bestimmte Integral zur Flächenberechnung mit $f_2(x) - f_1(x)$ ansetzen.

Skizze der gesuchten Fläche:



Flächenberechnung:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_1^4 f_2(x) - f_1(x)\ dx \\
&= \int_1^4 \left(2x^2 - 4x + 1\right) - \left(x^3 - 4x^2 + 5x - 3\right)\ dx \\
&= \int_1^4 2x^2 - 4x + 1 - x^3 + 4x^2 - 5x + 3\ dx \\
&= \int_1^4 -x^3 + 6x^2 - 9x + 4\ dx \\
&= \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 4x\right]_1^4 \\
&= \left(-\frac{1}{4}\cdot 4^4 + 2\cdot 4^3 - \frac{9}{2}\cdot 4^2 + 4\cdot 4\right) - \left(-\frac{1}{4}\cdot 1^4 + 2\cdot 1^3 - \frac{9}{2}\cdot 1^2 + 4\cdot 1\right) \\
&= 8 - 1,25 \\
A &= 6{,}75\text{FE}
\end{aligned}
$$

Die gesuchte Fläche beträgt 6,75 Flächeneinheiten.

2.5 Aufgabe 5

Der Graph der Funktion $f_1(x) = x^4 - 4x^2 + 3$ wird vom Graphen der Funktion $f_2(x) = -x^2 + 7$ geschnitten. Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen!

Schnittpunktbestimmung: Zunächst müssen wir die Schnittstellen der beiden Funktionsgraphen bestimmen. Dies geschieht duch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen.

$$\begin{aligned} f_1(x_s) &= f_2(x_s) \\ x^4 - 4x^2 + 3 &= -x^2 + 7 \quad | + x^2 - 7 \\ x^4 - 3x^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Diese **Biquadratische Gleichung** löst man durch Substitution. Wir ersetzen vorübergehend:

$$x^2 = z$$

Dadurch erhalten wir eine Quadratische Gleichung mit z.

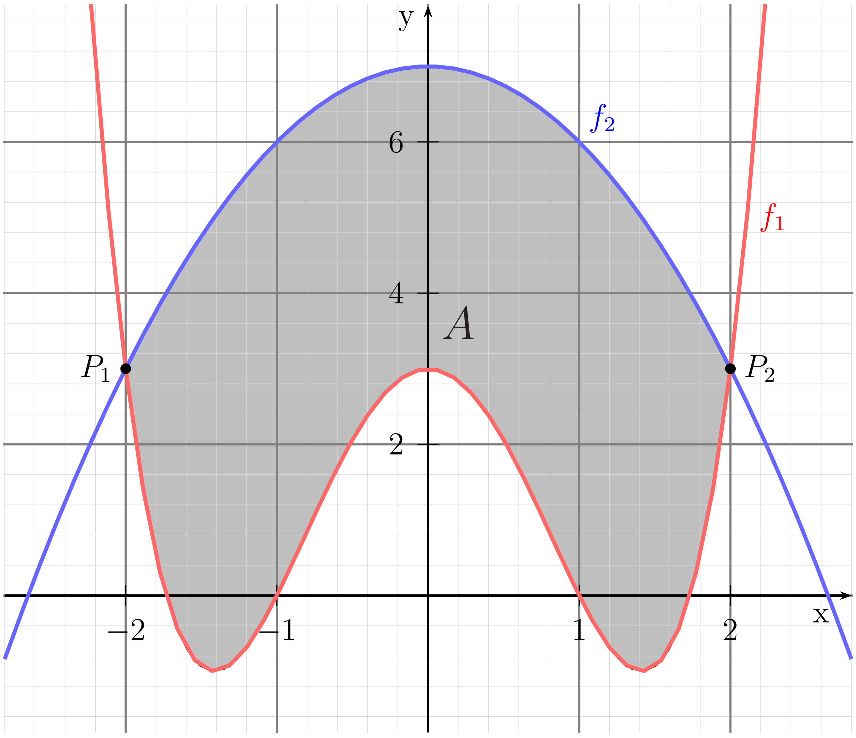
$$\begin{aligned} z^2 - 3z - 4 &= 0 \\ z_{1/2} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} \\ z_{1/2} &= \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \\ z_1 = \frac{8}{2} = 4 \qquad & z_2 = -\frac{2}{2} = -1 \end{aligned}$$

Beim Zurück-Substituieren entfällt die Lösung für $z_2 = -1$, da die Quadratzahl einer Reellen Zahl nicht negativ sein kann. Führen wir das also für z_1 durch.

$$\begin{aligned} x^2 &= z_1 \\ x^2 &= 4 \quad |\sqrt{\ } \\ x_{1/2} &= \pm 2 \\ x_1 = -2 \qquad & x_2 = 2 \end{aligned}$$

Zwischen diesen beiden Werten liegt also die zu bestimmende Fläche.

Skizze der gesuchten Fläche:



Flächenberechnung: Aus der Skizze erkennt man, dass die Fläche **unten** von f_1 und **oben** von f_2 begrenzt wird. Entsprechend ergibt sich folgender Ansatz:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{x_1}^{x_2} f_2(x) - f_1(x)\ dx \\
&= \int_{-2}^{2} \left(-x^2+7\right) - \left(x^4-4x^2+3\right)\ dx \\
&= \int_{-2}^{2} -x^2+7-x^4+4x^2-3\ dx \\
&= \int_{-2}^{2} -x^4+3x^2+4\ dx \\
&= \left[-\frac{1}{5}x^5+x^3+4x\right]_{-2}^{2} \\
&= \left(-\frac{1}{5}\cdot 2^5+2^3+4\cdot 2\right) - \left(-\frac{1}{5}\cdot(-2)^5+(-2)^3+4\cdot(-2)\right) \\
&= (-6,4+8+8)-(6,4-8-8) \\
A &= 19{,}2\,\mathrm{FE}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Die Fläche beträgt } A = 19{,}2 \text{ Flächeneinheiten}}$$

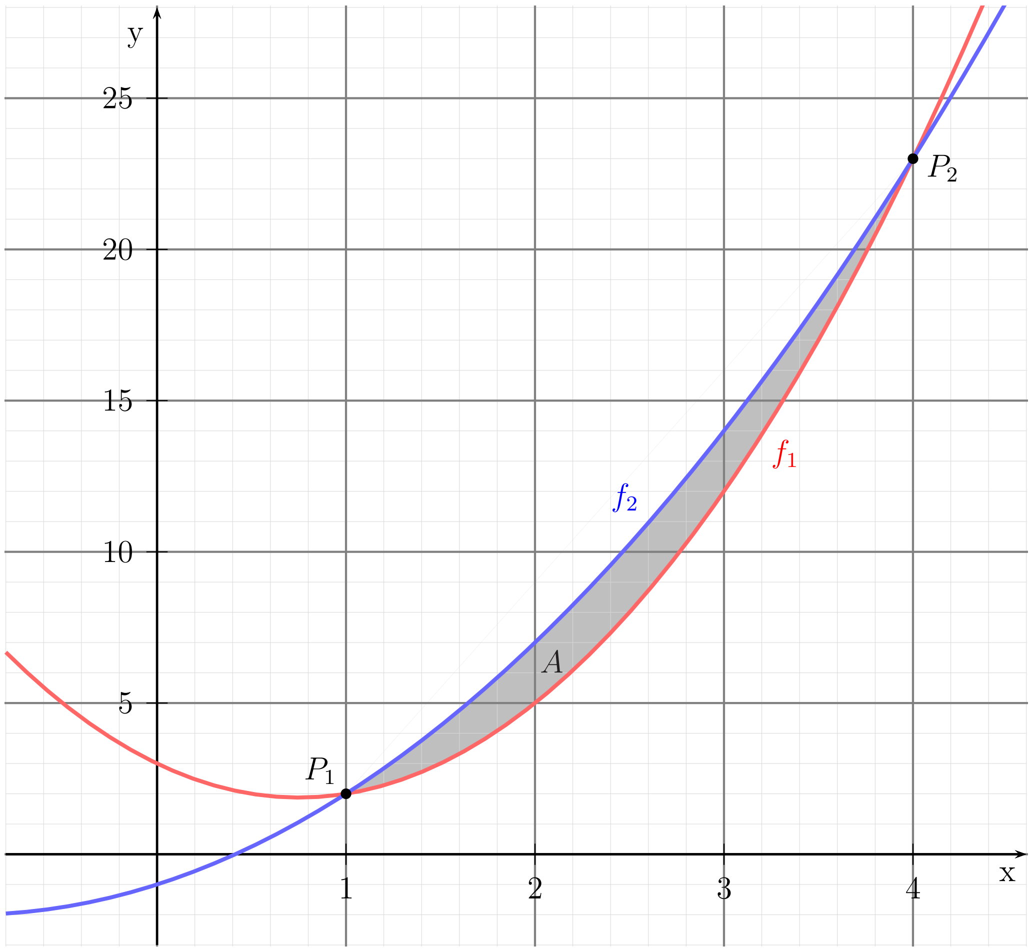
2.6 Aufgabe 6

Der Graph der Funktion $f_1(x) = 2x^2 - 3x + 3$ wird vom Graphen der Funktion $f_2(x) = x^2 + 2x - 1$ geschnitten. Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen!

Schnittpunktbestimmung: Zunächst müssen wir die Schnittstellen der beiden Funktionsgraphen bestimmen. Dies geschieht duch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen.

$$\begin{aligned}
f_1(x_s) &= f_2(x_s) \\
2x^2 - 3x + 3 &= x^2 + 2x - 1 \quad | - x^2 - 2x + 1 \\
x^2 - 5x + 4 &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} \\
&= \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \\
x_1 = 1 \qquad & x_2 = 4
\end{aligned}$$

Skizze der gesuchten Fläche:



Flächenberechnung: Aus der Skizze erkennt man, dass die Fläche **unten** von f_1 und **oben** von f_2 begrenzt wird. Entsprechend ergibt sich folgender Ansatz:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{x_1}^{x_2} f_2(x) - f_1(x)\ dx \\
&= \int_1^4 \left(x^2 + 2x - 1\right) - \left(2x^2 - 3x + 3\right)\ dx \\
&= \int_1^4 x^2 + 2x - 1 - 2x^2 + 3x - 3\ dx \\
&= \int_1^4 -x^2 + 5x - 4\ dx \\
&= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x\right]_1^4 \\
&= \left(-\frac{1}{3}\cdot 4^3 + \frac{5}{2}\cdot 4^2 - 4\cdot 4\right) - \left(-\frac{1}{3}\cdot 1^3 + \frac{5}{2}\cdot 1^2 - 4\cdot 1\right) \\
&= \left(-\frac{64}{3} + 40 - 16\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 4\right) \\
&= \frac{8}{3} - \left(-\frac{7}{6}\right) \\
A &= 4{,}5\,\mathrm{FE}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\text{Die Fläche beträgt } A = 4{,}5 \text{ Flächeneinheiten}}$$

2.7 Aufgabe 7

Ein Polynom 4. Grades hat zwei Tiefpunkte auf der x-Achse bei $T_1(0|0)$ und $T_2(4|0)$. Der Funktionsgraph verläuft außerdem noch durch den Punkt $P(2|240)$. Berechnen Sie die Fläche, die zwischen den beiden Tiefpunkten von dem Graphen von $f(x)$ und der x-Achse eingeschlossen wird!

Aufstellen der Funktionsgleichung: Ich stelle das Polynom in allgemeiner Form sowie die erste Ableitung dar, bevor die Bedingungen aufgestellt werden.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\ f'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llllllrcl} \text{Punkt } (0|0) & \Rightarrow & f(0) = 0 & \Rightarrow & (1) & & 0a + 0b + 0c + 0d + e & = & 0 \\ \text{Punkt } (4|0) & \Rightarrow & f(4) = 0 & \Rightarrow & (2) & & 256a + 64b + 16c + 4d + e & = & 0 \\ \text{Tiefpunkt bei } x_1 = 0 & \Rightarrow & f'(0) = 0 & \Rightarrow & (3) & & 0a + 0b + 0c + d & = & 0 \\ \text{Tiefpunkt bei } x_2 = 4 & \Rightarrow & f'(4) = 0 & \Rightarrow & (4) & & 256a + 48b + 8c + d & = & 0 \\ \text{Punkt } (2|240) & \Rightarrow & f(2) = 240 & \Rightarrow & (5) & & 16a + 8b + 4c + 2d + e & = & 240 \end{array}$$

Aus Gleichung (1) und (3) folgt sofort:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & e & = & 0 \\ (3) & d & = & 0 \end{array}$$

Übrig bleibt ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung:

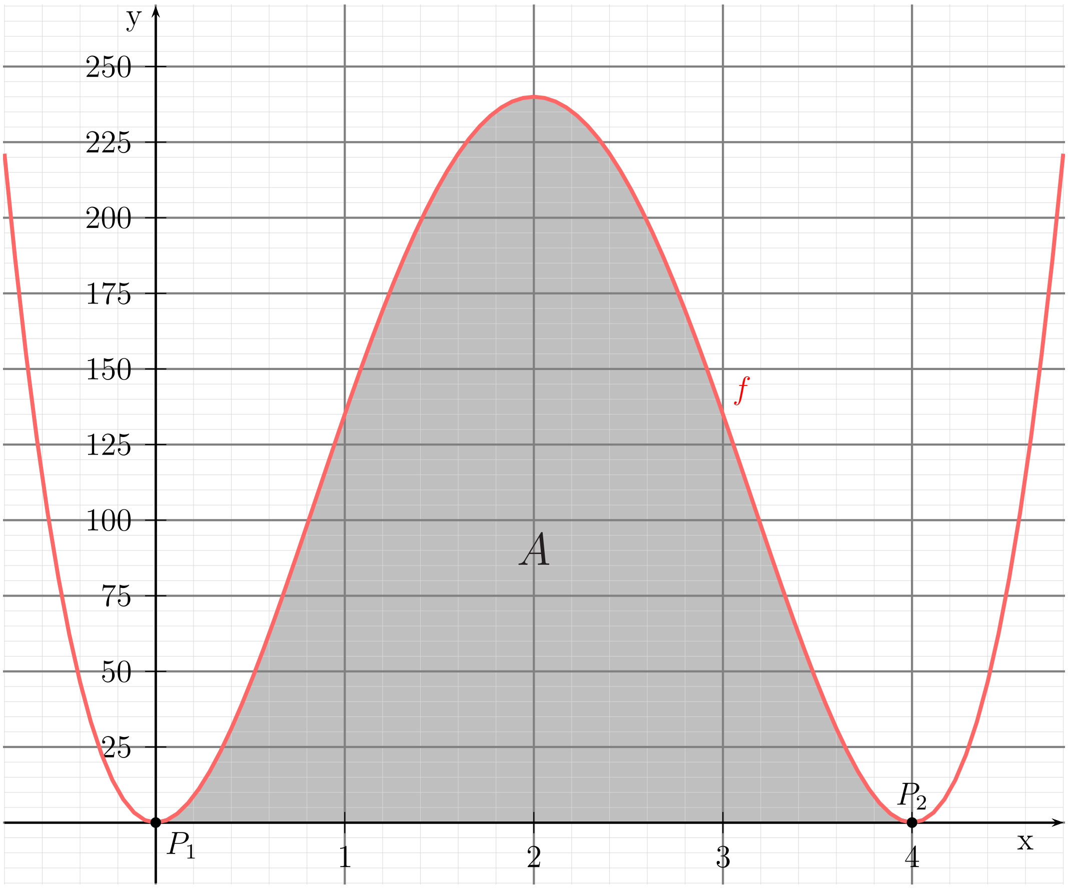
$$\begin{array}{lrcl} (2) & 256a + 64b + 16c & = & 0 \\ (4) & 256a + 48b + 8c & = & 0 \\ (5) & 16a + 8b + 4c & = & 240 \end{array}$$

Mit einem beliebigen Lösungsverfahren erhält man:

$$\begin{aligned} a &= 15 \\ b &= -120 \\ c &= 240 \end{aligned}$$

Damit lautet die Funktionsgleichung: $\boxed{f(x) = 15x^4 - 120x^3 + 240x^2}$

Skizze der gesuchten Fläche:



Flächenberechnung: Die Integrationsgrenzen 0 und 4 sind bereits durch die x-Koordinaten der Tiefpunkte bekannt. Daher kann die Fläche direkt angesetzt werden.

$$\begin{aligned}
A &= \int_{x_1}^{x_2} f(x)\ dx \\
&= \int_{0}^{4} 15x^4 - 120x^3 + 240x^2\ dx \\
&= \left[3x^5 - 30x^4 + 80x^3\right]_0^4 \\
&= \left(3 \cdot 4^5 - 30 \cdot 4^4 + 80 \cdot 4^3\right) - \left(3 \cdot 0^5 - 30 \cdot 0^4 + 80 \cdot 0^3\right) \\
&= (3072 - 7680 + 5120) - 0 \\
A &= 512
\end{aligned}$$

$\boxed{A\text{=512 Flächeneinheiten}}$

2.8 Aufgabe 8

Ein Polynom 3. Grades hat einen Hochpunkt bei $H(0|4)$ und einen Tiefpunkt bei $T(2|0)$. Berechnen Sie die Fläche, die von der positiven x-Achse, der y-Achse und dem Funktionsgraphen des Polynoms eingeschlossen wird!

Aufstellen der Funktionsgleichung: Ich stelle das Polynom in allgemeiner Form sowie die erste Ableitung dar, bevor die Bedingungen aufgestellt werden.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llllllll} \text{Punkt } (0|4) & \Rightarrow & f(0) = 4 & \Rightarrow & (1) & 0a + 0b + 0c + d & = & 4 \\ \text{Punkt } (2|0) & \Rightarrow & f(2) = 0 & \Rightarrow & (2) & 8a + 4b + 2c + d & = & 0 \\ \text{Hochpunkt bei } x_H = 0 & \Rightarrow & f'(0) = 0 & \Rightarrow & (3) & 0a + 0b + c & = & 0 \\ \text{Tiefpunkt bei } x_T = 2 & \Rightarrow & f'(2) = 0 & \Rightarrow & (4) & 12a + 4b + c & = & 0 \end{array}$$

Aus Gleichung (1) und (3) folgt sofort:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & d & = & 4 \\ (3) & c & = & 0 \end{array}$$

Setzt man diese Ergebnisse in (2) und (4) ein, erhält man ein Lineargleichungssystem 2. Ornung, das ich anschließend mit einem bliebigen Verfahren, beispielsweise mit dem Additions-/Subtraktionsverfahren lösen kann:

$$\begin{array}{rrrcrl} (2) & 8a & +4b & = & -4 & | \\ (4) & 12a & +4b & = & 0 & |- \\ \hline (2)-(4) & -4a & & = & -4 & |:(-4) \\ & a & & = & 1 & \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in (4) ein:

$$\begin{aligned} 12 \cdot 1 + 4b &= 0 \quad && |-12 \\ 4b &= -12 && |:4 \\ b &= -3 \end{aligned}$$

Die gesuchte Funktion lautet: $\boxed{f(x) = x^3 - 3x^2 + 4}$

Nullstellenberechnung:

$$f(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0^3 - 3x_0^2 + 4 = 0$$

Durch **planvolles**[1] Probieren erhalte ich die Lösung:

$$x_{01} = 2$$

[1]Falls es ganzzahlige Nullstellen gibt, dann sind sie Teiler des **absoluten Gliedes**.

Weitere Nullstellen finde ich, nachdem der Funktionsterm mit Hilfe einer **Polynomdivision** faktorisiert wurde. Man kann immer $(x - x_0)$ ausklammern, hier also $(x - 2)$.

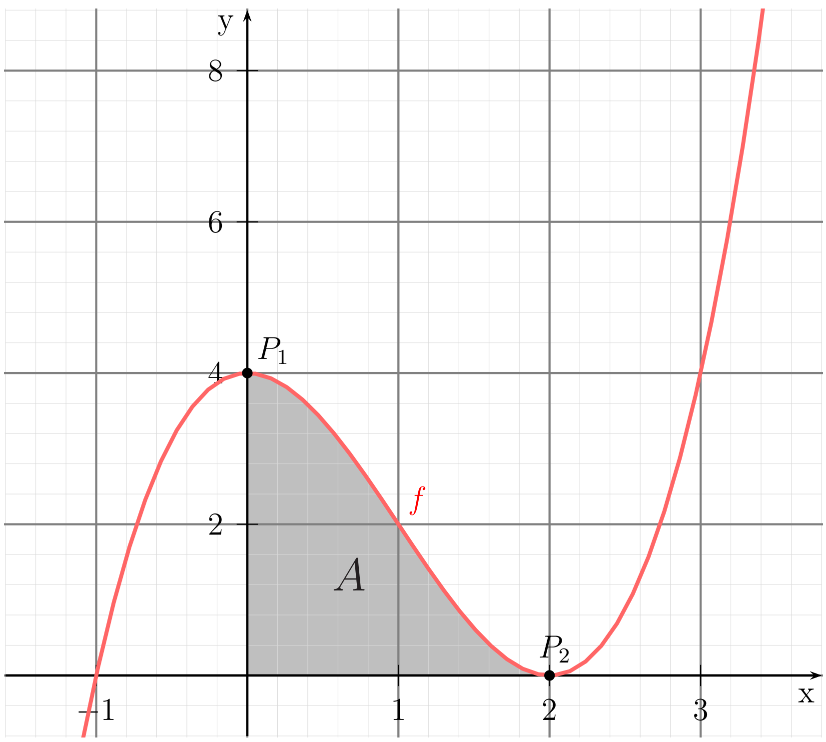
$$\begin{array}{rrrrl}
(x^3 & -3x^2 & & +4) & : (x-2) = x^2 - x - 2 \\
-(x^3 & -2x^2) & & & \\
\hline
 & -x^2 & & +4 & \\
- & (-x^2 & +2x) & & \\
\hline
 & & -2x & +4 & \\
 & - & (-2x & +4) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

Weitere Nullstellen finden wir als Nullstellen des Ergebnisterms.

$$\begin{aligned}
x^2 - x - 2 &= 0 \\
x_{2/3} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} \\
x_{2/3} &= \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \\
x_2 = -1 & \quad\;\; x_3 = 2
\end{aligned}$$

$x_3 = 2$ ist identisch mit $x_1 = 2$, wir haben tatsächlich also nur **zwei** Nullstellen. Da die **positive** x-Achse eine Begrenzungslinie ist, kommt nur $x_1 = 2$ als Flächenbegrenzungspunkt in Frage, wie auch die Skizze erkennen lässt.

Skizze der gesuchten Fläche:



Flächenberechnung: Die Fläche stellt sich demnach als Integral unter der Kurve von 0 bis 2 dar.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^2 f(x)\ dx \\
&= \int_0^2 x^3 - 3x^2 + 4\ dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x\right]_0^2 \\
&= \left(\frac{1}{4}\cdot 2^4 - 2^3 + 4\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot 0^4 - 0^3 + 4\cdot 0\right) \\
&= (4 - 8 + 8) - 0 \\
A &= 4\,\mathrm{FE}
\end{aligned}
$$

$\boxed{A\text{=4 Flächeneinheiten}}$

2.9 Aufgabe 9

Eine Parabel (Polynom 2. Grades) verläuft durch die Punkte $P_1(1|-15)$, $P_2(4|12)$ und $P_3(5|9)$. Berechnen Sie die Fläche, die die x-Achse mit dem Parabelbogen als Begrenzung bildet.

Aufstellen der Funktionsgleichung: Die allgemeine Form für ein Polynom 2. Grades lautet:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Die drei gegebenen Punkte ergeben drei Bedingungen, aus denen ein Lineargleichungssystem erstellt werden kann.

$$\begin{array}{lrcllrcl}
(1) & f(1) & = & -15 & \Rightarrow & a+b+c & = & -15 \\
(2) & f(4) & = & 12 & \Rightarrow & 16a+4b+c & = & 12 \\
(3) & f(5) & = & 9 & \Rightarrow & 25a+5b+c & = & 9
\end{array}$$

Zusammengefasst sieht unser Lineargleichungssystem also so aus:

$$\boxed{\begin{array}{lrrrcr}
(1) & a & +b & +c & = & -15 \\
(2) & 16a & +4b & +c & = & 12 \\
(3) & 25a & +5b & +c & = & 9
\end{array}}$$

Zur Lösung kann nun jedes beliebige Lösungsverfahren verwendet werden. Da der Parameter c in jeder Gleichung allein vorkommt, bietet es sich an, die Gleichungen paarweise voneinander zu subtrahieren, damit wir zwei Gleichungen **ohne c** erhalten.

$$\boxed{\begin{array}{lrrcr}
(4) = (2) - (1) & 15a & +3b & = & 27 \\
(5) = (3) - (1) & 24a & +4b & = & 24
\end{array}}$$

Für den nächsten Schritt verwende ich willkürlich das **Einsetzungsverfahren**. Ich löse Gleichung (4) nach b auf und setze den Term in (5) ein.

$$\begin{array}{lrcll}
(4) & 15a+3b & = & 27 & |-15a \\
 & 3b & = & 27-15a & |:3 \\
 & b & = & 9-5a &
\end{array}$$

Eingesetzt in (5):

$$\begin{array}{lrcll}
(5) & 24a+4b & = & 24 & \\
 & 24a+4\cdot(9-5a) & = & 24 & \\
 & 24a+36-20a & = & 24 & |-36 \\
 & 4a & = & -12 & |:4 \\
 & a & = & -3 &
\end{array}$$

Das Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (4) eingesetzt.

$$b = 9 - 5a = 9 - 5\cdot(-3) = 24$$

Nun werden beide Ergebnisse in (1) eingesetzt. (Auch jede andere Gleichung wäre hier möglich.)

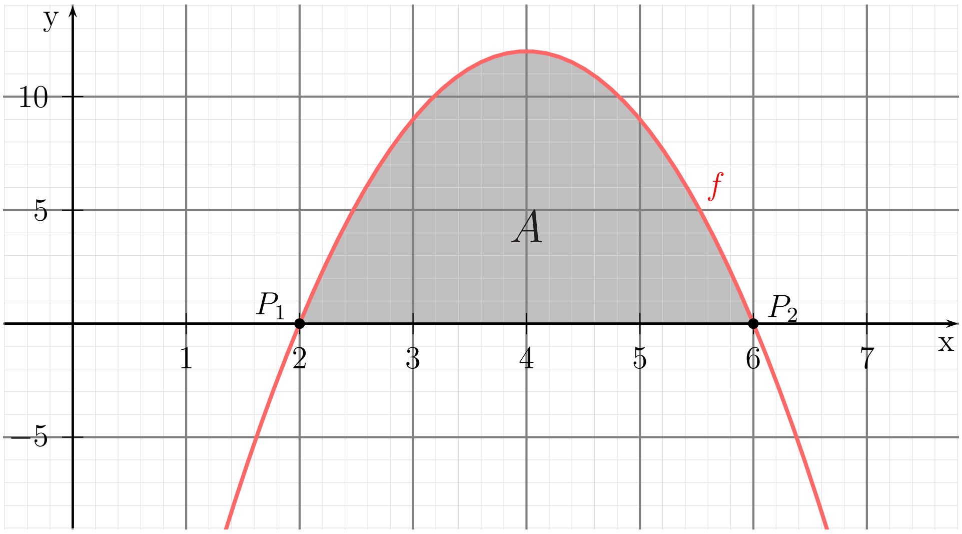
$$\begin{array}{lrcll}
(1) & a+b+c & = & -15 & \\
 & -3+24+c & = & -15 & \\
 & 21+c & = & -15 & \mid -21 \\
 & c & = & -36 &
\end{array}$$

Damit lautet die Funktionsgleichung: $\boxed{f(x) = -3x^2 + 24x - 36}$

Nullstellenbestimmung: Zur Nullstellenbestimmung wird der Funktionsterm gleich Null gesetzt.

$$\begin{array}{rcll}
f(x_0) & = & 0 & \\
-3x_0^2 + 24x_0 - 36 & = & 0 & \mid : (-3) \\
x_0^3 - 8x_0 + 12 & = & 0 & \\
x_{01/2} & = & 4 \pm \sqrt{16-12} & \\
x_{01/2} & = & 4 \pm 2 & \\
x_{01} = 2 & & x_{02} = 6 &
\end{array}$$

Mit diesen Werten kann der Funktionsgraph skizziert werden.



Berechnung der Fläche: Die Funktionsgleichung und die Nullstellen sind bekannt. Damit kann das Integral zur Flächenberechnung aufgestellt werden.

$$\begin{aligned}
A &= \int\limits_{x_{01}}^{x_{02}} f(x)\ dx \\
&= \int\limits_{2}^{6} -3x^2 + 24x - 36\ dx \\
&= \Big[-x^3 + 12x^2 - 36x\Big]_2^6 \\
&= \Big(-6^3 + 12 \cdot 6^2 - 36 \cdot 6\Big) - \Big(-2^3 + 12 \cdot 2^2 - 36 \cdot 2\Big) \\
&= 0 - (-32) \\
A &= 32\,\mathrm{FE}
\end{aligned}$$

Die gesuchte Fläche beträgt: $\boxed{A = 32\,\mathrm{FE}}$

2.10 Aufgabe 10

Ein Polynom 3. Grades $f(x)$ hat einen Wendepunkt bei $x_w = 3$ mit der Wendetangente $f_1(x) = -6x + 22$. Die y-Achse schneidet der Graph des Polynoms bei $y_0 = -32$. Berechnen Sie die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen von $f(x)$.

Aufstellen der Funktionsgleichung: Benötigt wird die Grundfunktion sowie die ersten beiden Ableitungen des Polynoms.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) &= 6ax + 2b \end{aligned}$$

Aus dem Wendepunkt bei $x_w = 3$ erhält man:

$$(1) \quad f''(3) = 0 \Rightarrow 6a \cdot 3 + 2b = 0$$

Die Wendetangente liefert gleich zwei Bedingungen – den y-Wert am Wendepunkt und die Steigung dort. Diese Werte bestimme ich vorab.

$$f_1(3) = -6 \cdot 3 + 22 = 4$$

$$f_1'(3) = m = -6$$

Mit diesen Werten können nun die Bedingungen aufgestellt werden.

$$\begin{array}{lrcll} (2) & f(3) = f_1(3) & \Rightarrow & a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d & = 4 \\ (3) & f'(3) = f_1'(3) & \Rightarrow & 3a \cdot 3^2 + 2b \cdot 3 + c & = -6 \end{array}$$

Die letzte Bedingung liefert der y-Achsenabschnitt.

$$(4) \quad f(0) = -32 \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = -32$$

Fasst man die Gleichungen zusammen, erhält man folgendes Gleichungssystem 4. Ordnung:

$$\boxed{\begin{array}{lrrrrcl} (1) & 18a & +2b & & & = & 0 \\ (2) & 27a & +9b & +3c & +d & = & 4 \\ (3) & 27a & +6b & +c & & = & -6 \\ (4) & & & & d & = & -32 \end{array}}$$

Aus Gleichung (4) ist d schon bekannt. Der Wert wird sofort in (2) eingesetzt. Bringt man in Gleichung (2) den eingesetzten Wert von -32 sofort auf die andere Gleichungsseite, erhält man folgendes Gleichungssystem 3. Ordnung:

$$\boxed{\begin{array}{lrrrcl} (1) & 18a & +2b & & = & 0 \\ (2) & 27a & +9b & +3c & = & 36 \\ (3) & 27a & +6b & +c & = & -6 \end{array}}$$

Für die weitere Lösung ist es günstig, dass c nur in **zwei** Gleichungen vorkommt. Man sollte also versuchen, die Variable c zuerst zu eliminieren. Dies könnte mit dem Einsetzungsverfahren, aber auch mit dem Additions-/Subtraktionsverfahren durchgeführt werden. Ich entscheide mich für letzteres und dividiere dazu Gleichung (2) durch 3. Dann kann (2) von (3) subtrahiert werden.

$$\begin{array}{lrrrcrl}
(2) & 27a & +9b & +3c & = & 36 & |:3 \\
(3) & 27a & +6b & +c & = & -6 & \\
\hline
(2) & 9a & +3b & +c & = & 12 & |- \\
(3) & 27a & +6b & +c & = & -6 & | \\
\hline
(5) & 18a & +3b & & = & -18 &
\end{array}$$

Mit Gleichung (1) und (5) bleibt nun ein Gleichungssystem 2. Ordnung übrig.

$$\boxed{\begin{array}{lrrcr}
(1) & 18a & +2b & = & 0 \\
(5) & 18a & +3b & = & -18
\end{array}}$$

Hier bietet sich sofort das Subtraktionsverfahren an, da die Koeffizienten von a gleich sind.

$$\begin{array}{lrrcrl}
(1) & 18a & +2b & = & 0 & |- \\
(5) & 18a & +3b & = & -18 & | \\
\hline
(6) & & b & = & -18 &
\end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in (1) ein.

$$\begin{array}{lrcll}
(1) & 18a+2b & = & 0 & \\
 & 18a+2\cdot(-18) & = & 0 & \\
 & 18a-36 & = & 0 & |+36 \\
 & 18a & = & 36 & |:18 \\
 & a & = & 2 &
\end{array}$$

Zur Bestimmung von c verwende ich die umgestellte Gleichung (2).

$$\begin{array}{lrcll}
(2) & 9a+3b+c & = & 12 & \\
 & 9\cdot 2+3\cdot(-18)+c & = & 12 & \\
 & 18-54+c & = & 12 & \\
 & -36+c & = & 12 & |+36 \\
 & c & = & 48 &
\end{array}$$

Hiermit lautet die Funktionsgleichung: $\boxed{f(x) = 2x^3 - 18x^2 + 48x - 32}$

Nullstellenbestimmung:

$$\begin{array}{rcll}
f(x_0) & = & 0 & \\
2x_0^3 - 18x_0^2 + 48x_0 - 32 & = & 0 & |:2 \\
x_0^3 - 9x_0^2 + 24x_0 - 16 & = & 0 &
\end{array}$$

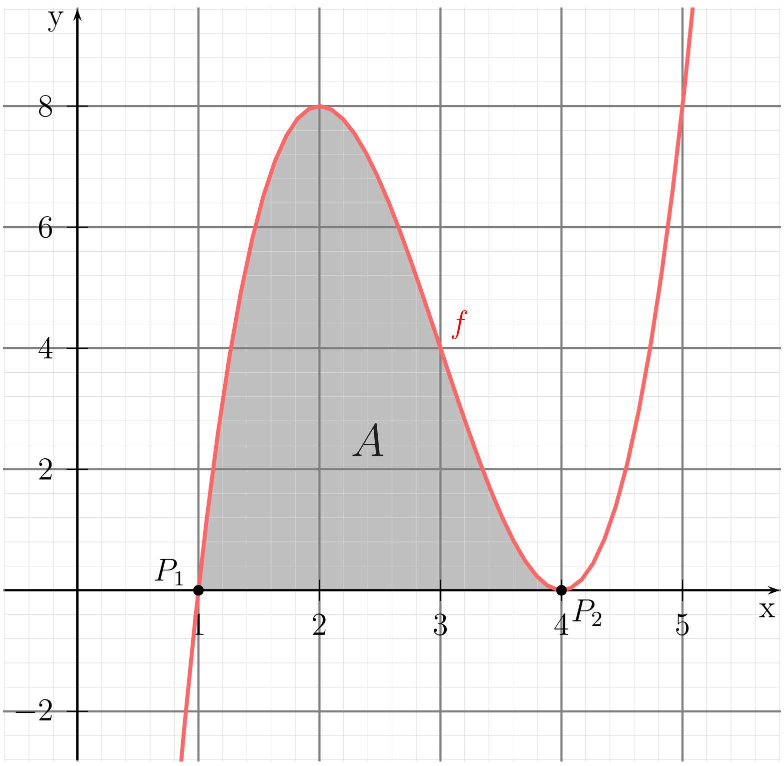
Da wir kein analytisches Lösungsverfahren für eine Kubische Gleichung haben, muss eine Lösung durch planvolles Raten ermittelt werden. Man erhält so z. B. $x_{01} = 1$. Damit ist eine **Polynomdivision** möglich.

$$
\begin{array}{rrrrl}
(x_0^3 & -9x_0^2 & +24x_0 & -16) & : \ (x_0 - 1) \ = \ x_0^2 - 10x_0 + 16 \\
-(x_0^3 & -x_0^2) & & & \\
\hline
 & -8x_0^2 & +24x_0 & -16) & \\
- & (-8x_0^2 & +8x_0) & & \\
\hline
 & & 16x_0 & -16 & \\
 & - & (16x_0 & -16) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Alle weiteren Nullstellen liegen jetzt in dem Ergebnisterm.

$$
\begin{aligned}
x_0^2 - 8x_0 + 16 &= 0 \\
x_{02/3} &= 4 \pm \sqrt{4^2 - 16} \\
&= 4 \pm 0 \\
x_{02} &= 4
\end{aligned}
$$

Mit diesen Werten kann der Funktionsgraph skizziert werden.



Berechnung der Fläche: Die Funktionsgleichung und die Nullstellen sind bekannt. Damit kann das Integral zur Flächenberechnung aufgestellt werden.

$$\begin{aligned}
A &= \int_{x_{01}}^{x_{02}} f(x)\ dx \\
&= \int_{1}^{4} 2x^3 - 18x^2 + 48x - 32\ dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^4 - 6x^3 + 24x^2 - 32x\right]_1^4 \\
&= \left(\frac{1}{2}\cdot 4^4 - 6\cdot 4^3 + 24\cdot 4^2 - 32\cdot 4\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 1^4 - 6\cdot 1^3 + 24\cdot 1^2 - 32\cdot 1\right) \\
&= 0 - (-13{,}5) \\
A &= 13{,}5\,\mathrm{FE}
\end{aligned}$$

Die gesuchte Fläche beträgt: $\boxed{A = 13{,}5\,\mathrm{FE}}$