

Lösung umfangreicherer linearer Gleichungen

Am Beispiel folgender Aufgabe wollen wir das Lösungsprinzip umfangreicherer linearer Gleichungen darstellen.

$$6x + 5 - (2x - 3) - 2 = 4 \cdot (2x - 2) + x$$

Die erste Frage, die man sich immer stellen muss:

Kann man vor dem Umstellen der Gleichung etwas zusammenfassen?

Zur der Beantwortung dieser Frage schaut man immer nach zweierlei in dieser Reihenfolge:

1. Gibt es Klammern, die aufgelöst werden können?
2. Gibt es gleichartige Terme, die zusammengefasst werden können?

Es gibt hier beides, Klammern und gleichartige Terme. Klammern sind auf beiden Seiten je eine, und es kann auf der linken Seite die $+5$ und die -2 zusammengefasst werden. Am besten löst man erst die Klammern auf. Dabei immer beachten:

Steht vor der Klammer ein Minuszeichen,

dann kehren sich alle Vorzeichen in der aufgelösten Klammer um!

$$6x + 5 - (2x - 3) - 2 = 4 \cdot (2x - 2) + x$$

$$6x + 5 - 2x + 3 - 2 = 8x - 8 + x$$

Nun kann man gleichartige Terme zusammenfassen wie $+6x$ und $-2x$ oder $+5$ und $+3$ auf der linken Seite sowie $+8x$ und $+x$ auf der rechten Seite:

$$4x + 6 = 9x - 8$$

Danach gehts wie gewohnt weiter:

$$4x + 6 = 9x - 8 \quad | -9x - 6$$

$$-5x = -14 \quad | : (-5)$$

$$x = \frac{14}{5} = 2,8$$

Übungsaufgaben dazu:

Aufgabe 1:

$$4x - (x + 6) = 5 \cdot (x - 3)$$

Aufgabe 2:

$$3x - (x + 8) = 4(x - 3)$$

Aufgabe 3:

$$3(2x - 4) + 2 = 12 - 2 \cdot (2x - 2)$$

Aufgabe 4:

$$4 \cdot (2 \cdot x + 3) - 2 = 12 - 2 \cdot (2x - 11)$$

Aufgabe 5:

$$(5x - 5) \cdot (2x - 2) = (5x + 4) \cdot (2x - 3) - 11x$$

Aufgabe 6:

$$(x - 1) \cdot (10x - 10) = (5x + 4) \cdot (2 \cdot x - 3) - 11x$$

Aufgabe 7:

$$(2x - 4)(3x + 5) - (5x - 5)(x - 1) = (x - 2)(x + 3) - 13$$

Aufgabe 8:

$$(3x + 5)(2x - 4) - (x - 1)(5x - 5) + 13 = (x + 3)(x - 2)$$

Aufgabe 9:

$$3x - \left(4x - \left(5 - (x + 4) \right) \right) - 5 = -12$$

Aufgabe 10:

$$5x - \left(6x - \left(4 - (x + 3) \right) \right) - 3 = -10$$

Hier die Ergebnisse:

Aufgabe 1:

$$x = \frac{9}{2} = 4,5$$

Aufgabe 2:

$$x = 2$$

Aufgabe 3:

$$x = \frac{26}{10} = 2,6$$

Aufgabe 4:

$$x = 2$$

Aufgabe 5:

$$x = 11$$

Aufgabe 6:

$$x = 11$$

Aufgabe 7:

$$x = \frac{6}{7}$$

Aufgabe 8:

$$x = \frac{6}{7}$$

Aufgabe 9:

$$x = 4$$

Aufgabe 10:

$$x = 4$$

Hier die kompletten Lösungen:

Aufgabe 1:

$$\begin{aligned}4x - (x + 6) &= 5 \cdot (x - 3) && | \text{ Klammern auflösen} \\4x - x - 6 &= 5x - 15 && | \text{ links zusammenfassen} \\3x - 6 &= 5x - 15 && | -5x + 6 \\-2x &= -9 && | : (-2) \\x &= \frac{9}{2} = 4,5\end{aligned}$$

Aufgabe 2:

$$\begin{aligned}3x - (x + 8) &= 4(x - 3) && | \text{ Klammern auflösen} \\3x - x - 8 &= 4x - 12 && | \text{ links zusammenfassen} \\2x - 8 &= 4x - 12 && | -4x + 8 \\-2x &= -4 && | : (-2) \\x &= 2\end{aligned}$$

Aufgabe 3:

$$\begin{aligned}3(2x - 4) + 2 &= 12 - 2 \cdot (2x - 2) && | \text{ Klammern auflösen} \\6x - 12 + 2 &= 12 - 4x + 4 && | \text{ rechts und links zusammenfassen} \\6x - 10 &= 16 - 4x && | +10 + 4x \\10x &= 26 && | : 10 \\x &= \frac{26}{10} = 2,6\end{aligned}$$

Aufgabe 4:

$$4 \cdot (2 \cdot x + 3) - 2 = 12 - 2 \cdot (2x - 11) \quad | \text{ Klammern auflösen}$$

Aufgepasst! Es spielt keine Rolle, ob man den Malpunkt setzt oder weglässt, beides bedeutet das Gleiche. Also ist: $2 \cdot x = 2x$ oder: $2 \cdot (2x - 11) = 2(2x - 11)$

$$\begin{aligned}8x + 12 - 2 &= 12 - 4x + 22 && | \text{ auf beiden Seiten zusammenfassen} \\8x + 10 &= 34 - 4x && | -10 + 4x \\12x &= 24 && | : 12 \\x &= 2\end{aligned}$$

Aufgabe 5:

$$(5x - 5) \cdot (2x - 2) = (5x + 4) \cdot (2x - 3) - 11x \mid \text{ alle Klammern auflösen}$$

Auch hier gilt wieder: Es ist gleichgültig, ob ein Malpunkt gesetzt ist, oder nicht. Also lassen wir ihn einfach weg.

Werden zwei Summen in Klammern miteinander multipliziert, so wird jedes Glied der ersten Klammer mit jedem Glied der zweiten Klammer multipliziert, etwa so:

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Damit ergibt sich aufgelöst:

$$10x^2 - 10x - 10x + 10 = 10x^2 - 15x + 8x - 12 - 11x \mid \text{ zusammenfassen}$$

$$10x^2 - 20x + 10 = 10x^2 - 18x - 12 \mid -10x^2$$

$$-20x + 10 = -18x - 12 \mid +18x - 10$$

$$-2x = -22 \mid : (-2)$$

$$x = 11$$

Aufgabe 6:

$$(x - 1) \cdot (10x - 10) = (5x + 4) \cdot (2 \cdot x - 3) - 11x \mid \text{ Klammern ausmultiplizieren}$$

$$10x^2 - 10x - 10x + 10 = 10x^2 - 15x + 8x - 12 - 11x \mid \text{ zusammenfassen}$$

$$10x^2 - 20x + 10 = 10x^2 - 18x - 12 \mid -10x^2$$

$$-20x + 10 = -18x - 12 \mid +18x - 10$$

$$-2x = -22 \mid : (-2)$$

$$x = 11$$

Aufgabe 7:

$$(2x - 4)(3x + 5) - (5x - 5)(x - 1) = (x - 2)(x + 3) - 13 \mid \text{ Klammern ausmultiplizieren}$$

$$6x^2 + 10x - 12x - 20 - (5x^2 - 5x - 5x + 5) = x^2 + 3x - 2x - 6 - 13 \mid \text{ Klammer links auflösen}$$

$$6x^2 + 10x - 12x - 20 - 5x^2 + 5x + 5x - 5 = x^2 + 3x - 2x - 6 - 13 \mid \text{ zusammenfassen}$$

$$x^2 + 8x - 25 = x^2 + x - 19 \mid -x^2$$

$$8x - 25 = x - 19 \mid -x + 25$$

$$7x = 6 \mid : 7$$

$$x = \frac{6}{7}$$

Aufgabe 8:

$$(3x + 5)(2x - 4) - (x - 1)(5x - 5) + 13 = (x + 3)(x - 2) \mid \text{ Klammern ausmultiplizieren}$$

$$6x^2 - 12x + 10x - 20 - (5x^2 - 5x - 5x + 5) + 13 = x^2 - 2x + 3x - 6 \mid \text{ Klammer auflösen}$$

$$6x^2 - 12x + 10x - 20 - 5x^2 + 5x + 5x - 5 + 13 = x^2 - 2x + 3x - 6 \mid \text{ zusammenfassen}$$

$$x^2 + 8x - 12 = x^2 + x - 6 \mid -x^2$$

$$8x - 12 = x - 6 \mid -x + 12$$

$$7x = 6 \mid : 7$$

$$x = \frac{6}{7}$$

Aufgabe 9:

$$3x - \left(4x - \left(5 - (x + 4) \right) \right) - 5 = -12$$

Bei einer solchen geschachtelten Klammer fängt man am besten an, die innersten Klammern zuerst aufzulösen, im nächsten Schritt wieder die innersten und so weiter:

$$3x - \left(4x - (5 - x - 4) \right) - 5 = -12 \mid \text{ innerste Klammer auflösen}$$

$$3x - (4x - 5 + x + 4) - 5 = -12 \mid \text{ Klammer auflösen}$$

$$3x - 4x + 5 - x - 4 - 5 = -12 \mid \text{ zusammenfassen}$$

$$-2x - 4 = -12 \mid +4$$

$$-2x = -8 \mid : (-2)$$

$$x = 4$$

Aufgabe 10:

$$5x - \left(6x - \left(4 - (x + 3) \right) \right) - 3 = -10 \mid \text{ innerste Klammer auflösen}$$

$$5x - \left(6x - (4 - x - 3) \right) - 3 = -10 \mid \text{ innerste Klammer auflösen}$$

$$5x - (6x - 4 + x + 3) - 3 = -10 \mid \text{ Klammer auflösen}$$

$$5x - 6x + 4 - x - 3 - 3 = -10 \mid \text{ zusammenfassen}$$

$$-2x - 2 = -10 \mid +2$$

$$-2x = -8 \mid : (-2)$$

$$x = 4$$