# Grenzwerte von Folgen

### Definition:

$g$ heißt **Grenzwert** der Folge $\langle a_n \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \geq n_0 : \quad |g - a_n| < \varepsilon$

### Schreibweise:

$$g \text{ heißt } \textbf{Grenzwert} \text{ der Folge } \langle a_n \rangle \quad \Leftrightarrow \quad g = \lim_{n\to\infty} a_n$$

1. Weisen Sie folgende Grenzwerte mit Hilfe einer $\varepsilon$-Umgebung nach:

   a)
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{n+5} = 3$$

   b)
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{4n-2}{2n-5} = 2$$

   c)
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{5-10n}{15-2n} = 5$$

   d)
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{3n-2} = 0$$

   e)
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{-3n-3} = 0$$

   f)
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{12n-4}{-3n-10} = -4$$

   g)
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{8n-4}{-2n+11} = -4$$

2. Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen – so weit vorhanden – mit Hilfe der Grenzwertlehrsätze:

a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{12n-9}{-3n-4} = \dots$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+3n-1}{3n^2+3n-10} = \dots$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-n^2+3}{n^2-4n} = \dots$$

d)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-4n}{n^2-2n-1} = \dots$$

e)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{2n^2+5} = \dots$$

f)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{12n+5n^3-4}{3n^2+5n-10n^3} = \dots$$

g)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^3-4n^2}{3n^2+3n-2n^4} = \dots$$

# Lösungen

1. Die richtigen Ergebnisse stehen ja schon da. Es kommt darauf an, dass der Beweis aufgeht mit $n$ auf der größeren Seite des Zeichens $<$ . Durchgerechnete Beweise stehen im Angang.

2. Lösungen zur Grenzwertbestimmung mit Grenzwertsätzen:

   a)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{12n-9}{-3n-4} = -4$$

   b)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+3n-1}{3n^2+3n-10} = 2$$

   c)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-n^2+3}{n^2-4n} = -1$$

   d)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-4n}{n^2-2n-1} \text{ existiert nicht!}$$

   e)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{2n^2+5} = 0$$

   f)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{12n+5n^3-4}{3n^2+5n-10n^3} = -2$$

   g)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^3-4n^2}{3n^2+3n-2n^4} = 0$$

## Anhang mit durchgerechneten Lösungen

**Aufgabe 1a** Nachzuweisen ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{n+5} = 3$$

Es muss gezeigt werden, dass die Ungleichung $|g - a_n| < \varepsilon$ für alle $n$ ab einem Startwert $n_0$ erfüllt ist.

$$\begin{aligned}
\left|3 - \frac{3n-2}{n+5}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{3(n+5)}{n+5} - \frac{3n-2}{n+5}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{3n+15-3n+2}{n+5}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{17}{n+5}\right| &< \varepsilon \quad | \text{ Zähler und Nenner ist positiv} \\
\frac{17}{n+5} &< \varepsilon \quad | \cdot (n+5) \text{ (Faktor positiv)} \\
17 &< \varepsilon \cdot (n+5) \quad | : \varepsilon \text{ (Teiler positiv)} \\
\frac{17}{\varepsilon} &< n+5 \quad | -5 \\
\frac{17}{\varepsilon} - 5 &< n
\end{aligned}$$

$n$ steht auf der größeren Seite des Ungleichungszeichens. $\Rightarrow$ Der Beweis ist erbracht.

**Aufgabe 1b** Nachzuweisen ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n-2}{2n-5} = 2$$

Es muss gezeigt werden, dass die Ungleichung $|g - a_n| < \varepsilon$ für alle $n$ ab einem Startwert $n_0$ erfüllt ist.

$$\begin{aligned}
\left|2 - \frac{4n-2}{2n-5}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{2(2n-5)}{2n-5} - \frac{4n-2}{2n-5}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{4n-10-4n+2}{2n-5}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{-8}{2n-5}\right| &< \varepsilon
\end{aligned}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird die weitere Untersuchung auf alle $n > 2$ eingegrenzt. In dem Bereich ist der Zähler negativ, der Nenner positiv. Beim Auflösen des Betrages muss also das Vorzeichen geändert werden.

$$\begin{aligned}
\frac{8}{2n-5} &< \varepsilon \quad | \cdot (2n-5) \\
8 &< \varepsilon \cdot (2n-5) \quad | : \varepsilon \\
\frac{8}{\varepsilon} &< 2n-5 \quad | + 5 \\
\frac{8}{\varepsilon} + 5 &< 2n \quad | : 2 \\
\frac{\frac{8}{\varepsilon} + 5}{2} &< n
\end{aligned}$$

$n$ steht auf der größeren Seite des Ungleichungszeichens. $\Rightarrow$ Der Beweis ist erbracht.

**Aufgabe 1c** Nachzuweisen ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5-10n}{15-2n} = 5$$

Es muss gezeigt werden, dass die Ungleichung $|g - a_n| < \varepsilon$ für alle $n$ ab einem Startwert $n_0$ erfüllt ist.

$$\begin{aligned}
\left|5 - \frac{5-10n}{15-2n}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{5(15-2n)}{15-2n} - \frac{5-10n}{15-2n}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{75-10n-5+10n}{15-2n}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{70}{15-2n}\right| &< \varepsilon
\end{aligned}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird die weitere Untersuchung auf alle $n > 7$ eingegrenzt. In dem Bereich ist der Zähler positiv, der Nenner negativ. Beim Auflösen des Betrages muss also das Vorzeichen geändert werden.

$$\begin{aligned}
-\frac{70}{15-2n} &< \varepsilon \quad |\cdot(15-2n) \qquad \text{(Der Faktor ist negativ!)} \\
-70 &> \varepsilon\cdot(15-2n) \quad |:\varepsilon \\
-\frac{70}{\varepsilon} &> 15-2n \quad |-15 \\
-\frac{70}{\varepsilon} - 15 &> -2n \quad |:(-2) \\
\frac{-\frac{70}{\varepsilon} - 15}{-2} &< n
\end{aligned}$$

$n$ steht auf der größeren Seite des Ungleichungszeichens. $\Rightarrow$ Der Beweis ist erbracht.

**Aufgabe 1d** Nachzuweisen ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{3n-2} = 0$$

Es muss gezeigt werden, dass die Ungleichung $|g - a_n| < \varepsilon$ für alle $n$ ab einem Startwert $n_0$ erfüllt ist.

$$\begin{aligned}
\left|0 - \frac{5}{3n-2}\right| &< \varepsilon \\
\left|-\frac{5}{3n-2}\right| &< \varepsilon \\
\frac{5}{3n-2} &< \varepsilon \quad | \cdot (3n-2) \\
5 &< \varepsilon \cdot (3n-2) \quad | : \varepsilon \\
\frac{5}{\varepsilon} &< 3n - 2 \quad | + 2 \\
\frac{5}{\varepsilon} + 2 &< 3n \quad | : 3 \\
\frac{\frac{5}{\varepsilon} + 2}{3} &< n
\end{aligned}$$

$n$ steht auf der größeren Seite des Ungleichungszeichens. $\Rightarrow$ Der Beweis ist erbracht.

**Aufgabe 1e** Nachzuweisen ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{-3n-3} = 0$$

Es muss gezeigt werden, dass die Ungleichung $|g - a_n| < \varepsilon$ für alle $n$ ab einem Startwert $n_0$ erfüllt ist.

$$\begin{aligned} \left|0 - \frac{2}{-3n-3}\right| &< \varepsilon \\ \left|-\frac{2}{-3n-3}\right| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Der Nenner des Bruches ist stets negativ, der Zähler positiv. Da noch vor dem Bruch ein Minuszeichen steht, ist der Betragsinhalt positiv.

$$\begin{aligned} -\frac{2}{-3n-3} &< \varepsilon \quad |\cdot(-3n-3) \quad \text{(Achtung! Nenner negativ.)} \\ -2 &> \varepsilon\cdot(-3n-3) \quad |:\varepsilon \\ -\frac{2}{\varepsilon} &> -3n-3 \quad |+3 \\ -\frac{2}{\varepsilon}+3 &> -3n \quad |:(-3) \\ \frac{-\frac{2}{\varepsilon}+3}{-3} &< n \end{aligned}$$

$n$ steht auf der größeren Seite des Ungleichungszeichens. $\Rightarrow$ Der Beweis ist erbracht.

**Aufgabe 1f** Nachzuweisen ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{12n-4}{-3n-10} = -4$$

Es muss gezeigt werden, dass die Ungleichung $|g - a_n| < \varepsilon$ für alle $n$ ab einem Startwert $n_0$ erfüllt ist.

$$\begin{aligned}
\left| -4 - \frac{12n-4}{-3n-10} \right| &< \varepsilon \\
\left| \frac{-4(-3n-10)}{-3n-10} - \frac{12n-4}{-3n-10} \right| &< \varepsilon \\
\left| \frac{12n+40-12n+4}{-3n-10} \right| &< \varepsilon \\
\left| \frac{44}{-3n-10} \right| &< \varepsilon
\end{aligned}$$

Der Nenner des Bruches ist stets negativ, der Zähler positiv. Daher kehrt sich beim Auflösen des Betrages das Vorzeichen um.

$$\begin{aligned}
-\frac{44}{-3n-10} &< \varepsilon \quad | \cdot (-3n-10) \quad \text{(Negativer Nenner!)} \\
-44 &> \varepsilon \cdot (-3n-10) \quad | : \varepsilon \\
-\frac{44}{\varepsilon} &> -3n-10 \quad | + 10 \\
-\frac{44}{\varepsilon} + 10 &> -3n \quad | : (-3) \\
\frac{-\frac{44}{\varepsilon} + 10}{-3} &< n
\end{aligned}$$

$n$ steht auf der größeren Seite des Ungleichungszeichens. $\Rightarrow$ Der Beweis ist erbracht.

**Aufgabe 1g** Nachzuweisen ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n-4}{-2n+11} = -4$$

Es muss gezeigt werden, dass die Ungleichung $|g - a_n| < \varepsilon$ für alle $n$ ab einem Startwert $n_0$ erfüllt ist.

$$\begin{aligned}
\left| -4 - \frac{8n-4}{-2n+11} \right| &< \varepsilon \\
\left| \frac{-4\cdot(-2n+11)}{-2n+11} - \frac{8n-4}{-2n+11} \right| &< \varepsilon \\
\left| \frac{8n-44-8n+4}{-2n+11} \right| &< \varepsilon \\
\left| \frac{-40}{-2n+11} \right| &< \varepsilon
\end{aligned}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird die weitere Untersuchung auf alle $n > 5$ eingegrenzt. In diesem Bereich ist der Zähler **und** der Nenner negativ. Beim Auflösen des Betrages bleibt also das Vorzeichen erhalten.

$$\begin{aligned}
\frac{-40}{-2n+11} &< \varepsilon \quad |\cdot(-2n+11) \qquad \text{(Nenner negativ!)} \\
-40 &> \varepsilon\cdot(-2n+11) \quad |:\varepsilon \\
-\frac{40}{\varepsilon} &> -2n+11 \quad |-11 \\
-\frac{40}{\varepsilon} - 11 &> -2n \quad |:(-2) \\
\frac{-\frac{40}{\varepsilon}-11}{-2} &< n
\end{aligned}$$

$n$ steht auf der größeren Seite des Ungleichungszeichens. $\Rightarrow$ Der Beweis ist erbracht.

**Aufgabe 2a** Zu bestimmen ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{12n-9}{-3n-4}$$

Da weder im Zähler noch im Nenner ein Teilgrenzwert existiert, muss der Bruch erst umgeformt werden, bevor man die Quotientenregel anwenden kann. Wir klammern im Zähler und im Nenner $n$ aus und kürzen anschließend dadurch. Da stets $n \neq 0$ ist, ist das möglich.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{12n-9}{-3n-4} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\left(12-\frac{9}{n}\right)}{n\cdot\left(-3-\frac{4}{n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{12-\frac{9}{n}}{-3-\frac{4}{n}} \quad \mid \text{Quotientenregel} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(12-\frac{9}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-3-\frac{4}{n}\right)} \quad \mid \text{Summenregel} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 12 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{9}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}(-3) - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}} \quad \mid \text{Konstantenregel} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 12 - 9\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}(-3) - 4\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} \quad \mid \text{Grenzwerte einsetzen} \\
&= \frac{12-9\cdot 0}{-3-4\cdot 0} \\
&= -\frac{12}{3} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{12n-9}{-3n-4} &= -4
\end{aligned}$$

**Aufgabe 2b** Zu bestimmen ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+3n-1}{3n^2+3n-10}$$

Da weder im Zähler noch im Nenner ein Teilgrenzwert existiert, muss der Bruch erst umgeformt werden, bevor man die Quotientenregel anwenden kann. Wir klammern im Zähler und im Nenner $n^2$ aus und kürzen anschließend dadurch. Da stets $n \neq 0$ ist, ist das möglich.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+3n-1}{3n^2+3n-10} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot\left(6+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\cdot\left(3+\frac{3}{n}-\frac{10}{n^2}\right)} \quad | \text{ Kürzen}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{6+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{3}{n}-\frac{10}{n^2}} \quad | \text{ Quotientenregel}\\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(6+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{3}{n}-\frac{10}{n^2}\right)} \quad | \text{ Summenregel}\\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 6+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10}{n^2}} \quad | \text{ Konstantenregel/Produktregel}\\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 6+3\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3+3\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-10\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} \quad | \text{ Grenzwerte eins.}\\
&= \frac{6+3\cdot 0-0\cdot 0}{3+3\cdot 0-10\cdot 0\cdot 0}\\
\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+3n-1}{3n^2+3n-10} &= 2
\end{aligned}$$

**Aufgabe 2c** Zu bestimmen ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n - n^2 + 3}{n^2 - 4n}$$

Da weder im Zähler noch im Nenner ein Teilgrenzwert existiert, muss der Bruch erst umgeformt werden, bevor man die Quotientenregel anwenden kann. Wir klammern im Zähler und im Nenner $n^2$ aus und kürzen anschließend dadurch. Da stets $n \neq 0$ ist, ist das möglich.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n - n^2 + 3}{n^2 - 4n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\frac{1}{n} - 1 + \frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(1 - \frac{4}{n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - 1 + \frac{3}{n^2}}{1 - \frac{4}{n}} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} - 1 + \frac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{4}{n}\right)} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} 1 + 3\cdot \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - 4\cdot \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} \\
&= \frac{0 - 1 + 3\cdot 0\cdot 0}{1 - 4\cdot 0} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{n - n^2 + 3}{n^2 - 4n} &= -1
\end{aligned}$$

**Aufgabe 2d** Zu bestimmen ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 4n}{n^2 - 2n - 1}$$

Da weder im Zähler noch im Nenner ein Teilgrenzwert existiert, muss der Bruch erst umgeformt werden, bevor man die Quotientenregel anwenden kann. Wir klammern im Zähler und im Nenner $n^3$ aus und kürzen anschließend dadurch. Da stets $n \neq 0$ ist, ist das möglich.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 4n}{n^2 - 2n - 1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \cdot \left(2 - \frac{4}{n^2}\right)}{n^3 \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{4}{n^2}}{\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(2 - \frac{4}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 - 4 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} - 2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 4n}{n^2 - 2n - 1} &= \frac{2 - 4 \cdot 0 \cdot 0}{0 - 2 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 0}
\end{aligned}$$

Der Nenner ist Null. Das bedeutet, der Bruch ist **nicht definiert**, der gesuchte Grenzwert **existiert nicht**!

**Aufgabe 2e** Zu bestimmen ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{2n^2+5}$$

Da im Nenner kein Teilgrenzwert existiert, muss der Bruch erst umgeformt werden, bevor man die Quotientenregel anwenden kann. Wir klammern im Zähler und im Nenner $n^2$ aus und kürzen anschließend dadurch. Da stets $n \neq 0$ ist, ist das möglich.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{4}{2n^2+5} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot \frac{4}{n^2}}{n^2 \cdot \left(2+\frac{5}{n^2}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n^2}}{\left(2+\frac{5}{n^2}\right)} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(2+\frac{5}{n^2}\right)} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^2}} \\
&= \frac{4 \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + 5 \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\right)} \\
&= \frac{4 \cdot 0}{2 + 5 \cdot 0} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{4}{2n^2+5} &= 0
\end{aligned}$$

*Weitere Lösungen folgen bald.*