Aufstellen einer Funktionsgleichung nach vorgegebenen Eigenschaften

Aufgabe 1 Ein Polynom 3. Grades hat eine Nullstelle bei $x_0 = 0$ und einen Wendepunkt bei $x_w = 1$. Die Gleichung der Wendetangente lautet $f_2(x) = -9x + 1$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms $f_1(x)$!

Aufgabe 2 Ein Polynom 3. Grades hat einen Tiefpunkt bei $T(5|-12,5)$ und einen Hochpunkt bei $H(1|3,5)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms $f(x)$!

Aufgabe 3 Ein Polynom 3. Grades hat einen Hochpunkt bei $H(-1|8)$. Bei $x = 1$ lässt sich die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = -4x + 4$ als Tangente an den Graphen der gesuchten Funktion $f_1(x)$ legen. Bestimmen Sie diese Funktionsgleichung!

Aufgabe 4 Ein Polynom 3. Grades berührt bei $x_1 = -2$ die Tangente mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = -8x - 15$. Der Funktionsgraph schneidet die y-Achse bei $y_0 = 1$. Dort beträgt die Steigung $m = 16$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$!

Aufgabe 5 Ein Polynom 4. Grades ist spiegelsymmetrisch zur y-Achse. Bei $x_w = -1$ hat sie eine Wendetangente mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 8x + 6$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$!

Aufgabe 6 Ein Polynom 5. Grades ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Der Graph der Funktion hat einen Hochpunkt bei $H(2|48)$ und schneidet die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 5x + 19$ an der Stelle $x_s = 1$. Wie lautet die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der gesuchten Funktion?

Aufgabe 7 Ein Polynom 4. Grades hat einen Sattelpunkt bei $S(0|4)$. Bei $x_b = 2$ berührt sie die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 4x - 8$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der gesuchten Funktion!

Aufgabe 8 Ein Polynom 2. Grades (eine Parabel) berührt die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = -2x + 4$ in ihrem Schnittpunkt mit der y-Achse. Eine andere Parabel mit der Funktionsgleichung $f_3(x) = 2x^2 + 3x - 1$ schneidet die gesuchte Parabel bei $x_s = 2$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der gesuchten Parabel!

Aufgabe 9 Ein Polynom 3. Grades mit der Funktionsgleichung $f_1(x)$ schneidet die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = x^2 + 4x - 4$ bei $x_1 = -1$, bei $x_2 = 2$ und bei $x_3 = 5$. Außerdem hat der Graph der gesuchten Funktion einen Hochpunkt bei $x_h = 1$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der gesuchten Funktion!

Ergebnisse:

(Die erforderlichen Lösungsansätze mit komplettem Lösungsweg finden Sie bei Bedarf auf den nächsten Seiten.)

Aufgabe 1 $f_1(x) = x^3 - 3x^2 - 6x$

Aufgabe 2 $f(x) = 0,5x^3 - 4,5x^2 + 7,5x$

Aufgabe 3 $f_1(x) = x^3 - x^2 - 5x + 5$

Aufgabe 4 $f_1(x) = 2x^3 + 12x^2 + 16x + 1$

Aufgabe 5 $f_1(x) = x^4 - 6x^2 + 3$

Aufgabe 6 $f_1(x) = -x^5 + 5x^3 + 20x$

Aufgabe 7 $f_1(x) = 1,25x^4 - 3x^3 + 4$

Aufgabe 8 $f_1(x) = 3,25x^2 - 2x + 4$

Aufgabe 9 $f_1(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + 6$

Hier die erforderlichen Lösungsansätze mit durchgerechneter Lösung:

Aufgabe 1

Ein Polynom 3. Grades hat eine Nullstelle bei $x_0 = 0$ und einen Wendepunkt bei $x_w = 1$. Die Gleichung der Wendetangente lautet $f_2(x) = -9x + 1$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms $f_1(x)$!

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\
f_1'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\
f_1''(x) &= 6ax + 2b
\end{aligned}
$$

Nullstelle bei $x_0 = 0$:	$f_1(0) = 0$	$\Rightarrow 0 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + d = 0$
Wendepunkt bei $x_w = 1$:	$f_1''(1) = 0$	$\Rightarrow 6a + 2b = 0$
Steigung am Wendepunkt $x_w = 1$:	$f_1'(1) = f_2'(1) = -9$	$\Rightarrow 3a + 2b + c = -9$
Funktionswert am Wendepunkt $x_w = 1$:	$f_1(1) = f_2(1) = -8$	$\Rightarrow a + b + c + d = -8$

Aus der ersten Gleichung erhält man sofort den Parameter $d = 0$. Eingesetzt in die anderen Gleichungen erhält man ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung.

$$
\boxed{\begin{array}{lrrrcr}
(1) & 6a & +2b & & = & 0 \\
(2) & 3a & +2b & +c & = & -9 \\
(3) & a & +b & +c & = & -8
\end{array}}
$$

Nur in Gleichung (2) und (3) ist der Parameter c enthalten. Da der Parameter dort mit gleichem Koeffizienten[1] vorkommt, können die Gleichungen direkt voneinander subtrahiert werden.

$$
\begin{array}{lrrrcrcc}
(2) & 3a & +2b & +c & = & -9 & | & \\
(3) & a & +b & +c & = & -8 & | & - \\
\hline
(4) & 2a & +b & & = & -1 & &
\end{array}
$$

Damit bleibt ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung übrig.

$$
\boxed{\begin{array}{lrrcr}
(1) & 6a & +2b & = & 0 \\
(4) & 2a & +b & = & -1
\end{array}}
$$

Ich löse Gleichung (4) nach b auf und setze das Ergebnis in Gleichung (1) ein.

$$
\begin{aligned}
2a + b &= -1 \quad | -2a \\
b &= -1 - 2a
\end{aligned}
$$

[1]Der Koeffizient wird auch *Vorzahl* genannt. Das ist die Zahl, die vor einer Variablen steht.

Eingesetzt in (1):

$$\begin{aligned} 6a + 2b &= 0 \\ 6a + 2 \cdot (-1 - 2a) &= 0 \\ 6a - 2 - 4a &= 0 \quad | + 2 \\ 2a &= 2 \quad | : 2 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

Mit der umgestellten Gleichung (1) bestimme ich b.

$$b = -1 - 2a = -1 - 2 \cdot 1 = -3$$

Beide Ergebnisse setze ich in Gleichung (3) ein, um c zu bestimmen.

$$\begin{aligned} a + b + c &= -8 \\ 1 - 3 + c &= -8 \quad | + 2 \\ c &= -6 \end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $\boxed{f_1(x) = x^3 - 3x^2 - 6x}$

Aufgabe 2

Ein Polynom 3. Grades hat einen Tiefpunkt bei $T(5|-12,5)$ und einen Hochpunkt bei $H(1|3,5)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms $f(x)$!

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3+bx^2+cx+d \\ f'(x) &= 3ax^2+2bx+c \end{aligned}$$

Tiefpunkt bei $x_t=5$:	$f'(5)=0$	$\Rightarrow 75a+10b+c=0$
Funktionswert am Tiefpunkt $x_t=5$:	$f(5)=-12,5$	$\Rightarrow 125a+25b+5c+d=-12,5$
Hochpunkt bei $x_h=1$:	$f'(1)=0$	$\Rightarrow 3a+2b+c=0$
Funktionswert am Hochpunkt $x_h=1$:	$f(1)=3,5$	$\Rightarrow a+b+c+d=3,5$

Wir haben ein Lineargleichungssystem 4. Ordnung erhalten.

$$\boxed{\begin{array}{lrrrrcl} (1) & 75a & +10b & +c & & = & 0 \\ (2) & 125a & +25b & +5c & +d & = & -12,5 \\ (3) & 3a & +2b & +c & & = & 0 \\ (4) & a & +b & +c & +d & = & 3,5 \end{array}}$$

Man erkennt sofort, dass der Parameter d nur in zwei Gleichungen – (2) und (4) – vorkommt. Da jeweils d allein auftritt, können die Gleichungen sofort voneinander subtrahiert werden.

$$\begin{array}{lrrrrcll} (2) & 125a & +25b & +5c & +d & = & -12,5 & | \\ (4) & a & +b & +c & +d & = & 3,5 & | \; - \\ \hline (5) & 124a & +24b & +4c & & = & -16 & \end{array}$$

Mit dieser Gleichung (5) anstelle von (2) und (4) bleibt ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung übrig.

$$\boxed{\begin{array}{lrrrcl} (1) & 75a & +10b & +c & = & 0 \\ (3) & 3a & +2b & +c & = & 0 \\ (5) & 124a & +24b & +4c & = & -16 \end{array}}$$

Zur Vereinfachung kann Gleichung (5) noch durch 4 dividiert werden.

$$\boxed{\begin{array}{lrrrcl} (1) & 75a & +10b & +c & = & 0 \\ (3) & 3a & +2b & +c & = & 0 \\ (5) & 31a & +6b & +c & = & -4 \end{array}}$$

Jetzt sind alle Koeffizienten von c gleich. Daher bietet sich das Additions-/Subtraktionsverfahren an. Zunächst subtrahiere ich Gleichung (3) von Gleichung (1).

$$\begin{array}{lrrrcll} (1) & 75a & +10b & +c & = & 0 & | \\ (3) & 3a & +2b & +c & = & 0 & | \; - \\ \hline (6) & 72a & +8b & & = & 0 & \end{array}$$

Dann subtrahiere ich Gleichung (5) von Gleichung (1).

$$\begin{array}{llllcll}
(1) & 75a & +10b & +c & = & 0 & | \\
(5) & 31a & +6b & +c & = & -4 & | \; - \\
\hline
(7) & 44a & +4b & & = & 4 &
\end{array}$$

Gleichung (6) und (7) stellen nun ein Lineargleichungssystem 4. Ordnung dar.

$$\boxed{\begin{array}{lllcl}
(6) & 72a & +8b & = & 0 \\
(7) & 44a & +4b & = & 4
\end{array}}$$

Beide Gleichungen können noch etwas vereinfacht werden. Gleichung (6) lässt sich durch 8 dividieren und Gleichung (7) durch 4.

$$\boxed{\begin{array}{lrlcl}
(6) & 9a & +b & = & 0 \\
(7) & 11a & +b & = & 1
\end{array}}$$

In dieser Form lassen sich die Gleichungen voneinander subtrahieren, so dass b wegfällt.

$$\begin{array}{lrlcll}
(6) & 9a & +b & = & 0 & | \; - \\
(7) & 11a & +b & = & 1 & | \\
\hline
 & 2a & & = & 1 & | \; :2 \\
 & a & & = & 0,5 &
\end{array}$$

Dieses Ergebnis setze ich in Gleichung (6) ein.

$$\begin{aligned}
9a + b &= 0 \\
9 \cdot 0,5 + b &= 0 \quad | - 4,5 \\
b &= -4,5
\end{aligned}$$

Diese Ergebnisse setze ich in Gleichung (3) ein.

$$\begin{aligned}
3a + 2b + c &= 0 \\
3 \cdot 0,5 + 2 \cdot (-4,5) + c &= 0 \\
-7,5 + c &= 0 \quad | + 7,5 \\
c &= 7,5
\end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $\boxed{f(x) = 0,5x^3 - 4,5x^2 + 7,5x}$

Aufgabe 3

Ein Polynom 3. Grades hat einen Hochpunkt bei $H(-1|8)$. Bei $x = 1$ lässt sich die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = -4x + 4$ als Tangente an den Graphen der gesuchten Funktion $f_1(x)$ legen. Bestimmen Sie diese Funktionsgleichung!

$$\begin{aligned} f_1(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f_1'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \end{aligned}$$

Hochpunkt bei $x_h = -1$:	$f_1'(-1) = 0$	$\Rightarrow 3a - 2b + c = 0$
Funktionswert am Hochpunkt $x_h = -1$:	$f_1(-1) = 8$	$\Rightarrow -a + b - c + d = 8$
Steigung bei $x_1 = 1$:	$f_1'(1) = f_2'(1) = -4$	$\Rightarrow 3a + 2b + c = -4$
Funktionswert bei $x_1 = 1$:	$f_1(1) = f_2(1) = 0$	$\Rightarrow a + b + c + d = 0$

Damit haben wir folgendes Gleichungssystem erhalten:

$$\boxed{\begin{array}{crrrrcr} (1) & 3a & -2b & +c & & = & 0 \\ (2) & -a & +b & -c & +d & = & 8 \\ (3) & 3a & +2b & +c & & = & -4 \\ (4) & a & +b & +c & +d & = & 0 \end{array}}$$

Es fällt auf, dass der Parameter d nur in Gleichung (2) und (4) enthalten ist. Daher ist es sinnvoll, diese beiden Gleichungen so miteinander zu kombinieren, dass d wegfällt. Das geht ab besten durch Subtrahieren. Die neue Gleichung bekommt die Nummer (5).

$$\begin{array}{lrrrrcrl} (2) & -a & +b & -c & +d & = & 8 & | \; - \\ (4) & a & +b & +c & +d & = & 0 & | \\ \hline (5) = (4) - (2) & 2a & & +2c & & = & -8 & \end{array}$$

Zufälligerweise ist dabei auch b weggefallen. Auf jeden Fall haben wir jetzt nur noch 3 Gleichungen mit 3 Variablen.

$$\boxed{\begin{array}{crrrcr} (5) & 2a & & +2c & = & -8 \\ (1) & 3a & -2b & +c & = & 0 \\ (3) & 3a & +2b & +c & = & -4 \end{array}}$$

Addiert man Gleichung (1) und (3), dann fällt b weg und es bleiben nur noch zwei Gleichungen mit zwei Variablen übrig.

$$\begin{array}{crrrcrl} (1) & 3a & -2b & +c & = & 0 & | \\ (3) & 3a & +2b & +c & = & -4 & | \; + \\ \hline (6) & 6a & & +2c & = & -4 & \end{array}$$

Das wiederum vereinfachte Gleichungssystem sieht folgendermaßen aus:

$$\boxed{\begin{array}{lllll} (5) & 2a & +2c & = & -8 \\ (6) & 6a & +2c & = & -4 \end{array}}$$

In diesem Gleichungssystem kann bequem c eliminiert werden, wenn man die Gleichungen voneinander subtrahiert.

$$\begin{array}{llllll|l} (5) & 2a & +2c & = & -8 & & - \\ (6) & 6a & +2c & = & -4 & & \\ \hline & 4a & & = & 4 & & :4 \\ & a & & = & 1 & & \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in Gleichung (5) ein.

$$\begin{aligned} 2a + 2c &= -8 \\ 2 \cdot 1 + 2c &= -8 \quad | -2 \\ 2c &= -10 \quad | : 2 \\ c &= -5 \end{aligned}$$

Beide Ergebnisse setze ich in Gleichung (1) ein.

$$\begin{aligned} 3a - 2b + c &= 0 \\ 3 \cdot 1 - 2b - 5 &= 0 \\ -2b - 2 &= 0 \quad | + 2 \\ -2b &= 2 \quad | : (-2) \\ b &= -1 \end{aligned}$$

Jetzt fehlt nur noch d. Dazu verwende ich Gleichung (4).

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 0 \\ 1 - 1 - 5 + d &= 0 \quad | + 5 \\ d &= 5 \end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $\boxed{f_1(x) = x^3 - x^2 - 5x + 5}$

Aufgabe 4

Ein Polynom 3. Grades berührt bei $x_1 = -2$ die Tangente mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = -8x - 15$. Der Funktionsgraph schneidet die y-Achse bei $y_0 = 1$. Dort beträgt die Steigung $m = 16$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$!

$$\begin{aligned} f_1(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f_1'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \end{aligned}$$

Steigung bei $x_1 = -2$:	$f_1'(-2) = f_2'(-2) = -8$	$\Rightarrow 12a - 4b + c = -8$
Funktionswert bei $x_1 = -2$:	$f_1(-2) = f_2(-2) = 1$	$\Rightarrow -8a + 4b - 2c + d = 1$
Funktionswert bei $x_2 = 0$:	$f_1(0) = 1$	$\Rightarrow 0 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + d = 1$
Steigung bei $x_2 = 0$:	$f_1'(0) = 16$	$\Rightarrow 0 \cdot a + 0 \cdot b + c = 16$

Bekannt sind aus den beiden letzten Gleichungen sofort $c = 16$ und $d = 1$. Setzen wir das in die beiden ersten Gleichungen ein, erhalten wir:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 12a - 4b + c & = & -8 \\ (2) & -8a + 4b - 2c + d & = & 1 \\ \hline (1) & 12a - 4b + 16 & = & -8 \\ (2) & -8a + 4b - 2 \cdot 16 + 1 & = & 1 \\ \hline (1) & 12a - 4b & = & -24 \\ (2) & -8a + 4b & = & 32 \\ \hline \end{array}$$

Es bietet sich an, die beiden Gleichungen zu addieren, damit b wegfällt.

$$\begin{array}{llllll} (1) & 12a & -4b & = & -24 & | \\ (2) & -8a & +4b & = & 32 & | \; + \\ \hline & 4a & & = & 8 & | \; :4 \\ & a & & = & 2 & \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in Gleichung (2) ein.

$$\begin{aligned} -8a + 4b &= 32 \\ -8 \cdot 2 + 4b &= 32 \quad | + 16 \\ 4b &= 48 \quad | : 4 \\ b &= 12 \end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $\boxed{f_1(x) = 2x^3 + 12x^2 + 16x + 1}$

Aufgabe 5

Ein Polynom 4. Grades ist spiegelsymmetrisch zur y-Achse. Bei $x_w = -1$ hat sie eine Wendetangente mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 8x + 6$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$!

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \text{ Wegen Spiegelsymmetrie: } \Rightarrow b = d = 0 \text{ also:}\\
f_1(x) &= ax^4 + cx^2 + e\\
f_1'(x) &= 4ax^3 + 2cx\\
f_1''(x) &= 12ax^2 + 2c
\end{aligned}$$

Wendepunkt bei $x_w = -1$:	$f_1''(-1) = 0$	$\Rightarrow 12a + 2c = 0$
Steigung bei $x_w = -1$:	$f_1'(-1) = f_2'(-1) = 8$	$\Rightarrow -4a - 2c = 8$
Funktionswert bei $x_w = -1$:	$f_1(-1) = f_2(-1) = -2$	$\Rightarrow a + c + e = -2$

Wir haben ein Gleichungssystem 3. Ordnung erhalten.

$$\boxed{\begin{array}{lrrrcr}
(1) & 12a & +2c & & = & 0\\
(2) & -4a & -2c & & = & 8\\
(3) & a & +c & +e & = & -2
\end{array}}$$

Es fällt auf, dass die Koeffizienten von c in Gleichung (1) und (2) bis auf das Vorzeichen identisch sind. Addiert man diese Gleichungen, dann bleibt nur a übrig und kann aus dieser einen Gleichung berechnet werden.

$$\begin{array}{lrrcrl}
(1) & 12a & +2c & = & 0 & |\\
(2) & -4a & -2c & = & 8 & |\ +\\
\hline
 & 8a & & = & 8 & |\ :8\\
 & a & & = & 1 &
\end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in Gleichung (1) ein.

$$\begin{aligned}
12a + 2c &= 0\\
12 \cdot 1 + 2c &= 0\\
12 + 2c &= 0 \quad | - 12\\
2c &= -12 \quad | : 2\\
c &= -6
\end{aligned}$$

Beide Ergebnisse werden in Gleichung (3) eingesetzt, um e zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
a + c + e &= -2\\
1 - 6 + e &= -2\\
-5 + e &= -2 \quad | + 5\\
e &= 3
\end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $\boxed{f_1(x) = x^4 - 6x^2 + 3}$

Aufgabe 6

Ein Polynom 5. Grades ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Der Graph der Funktion hat einen Hochpunkt bei $H(2|48)$ und schneidet die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 5x + 19$ an der Stelle $x_s = 1$. Wie lautet die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der gesuchten Funktion?

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f \text{ Wegen Punktsymmetrie: } \Rightarrow b = d = f = 0 \text{ also:}\\
f_1(x) &= ax^5 + cx^3 + ex\\
f_1'(x) &= 5ax^4 + 3cx^2 + e
\end{aligned}$$

Hochpunkt bei $x_h = 2$: $f_1'(2) = 0 \Rightarrow 80a + 12c + e = 0$
Funktionswert bei $x_h = 2$: $f_1(2) = 48 \Rightarrow 32a + 8c + 2e = 48$
Funktionswert bei $x_s = 1$: $f_1(1) = f_2(1) = 24 \Rightarrow a + c + e = 24$

Wir haben ein Gleichungssystem 3. Ordnung erhalten.

$$\boxed{\begin{array}{cccccc}
(1) & 80a & +12c & +e & = & 0\\
(2) & 32a & +8c & +2e & = & 48\\
(3) & a & +c & +e & = & 24
\end{array}}$$

Da das Gleichungssystem keine Besonderheiten aufweist, die ein bestimmtes Vorgehen als besonders günstig erscheinen lassen, wähle ich zur Lösung die Cramersche Regel.

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 12 & 1 & 0 & 12\\ 48 & 8 & 2 & 48 & 8\\ 24 & 1 & 1 & 24 & 1 \end{array}\right.}{\left|\begin{array}{ccc|cc} 80 & 12 & 1 & 80 & 12\\ 32 & 8 & 2 & 32 & 8\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right.}\\
&= \frac{0 + 576 + 48 - 0 - 192 - 576}{640 + 24 + 32 - 8 - 160 - 384}\\
&= \frac{-144}{144}\\
a &= -1
\end{aligned}$$

$$b = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 80 & 0 & 1 & 80 & 0\\ 32 & 48 & 2 & 32 & 48\\ 1 & 24 & 1 & 1 & 24 \end{array}\right.}{144}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3840+0+768-48-3840-0}{144} \\
&= \frac{720}{144} \\
b &= 5
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung von c setze ich diese Werte in Gleichung (3) ein.

$$\begin{aligned}
a+c+e &= 24 \\
-1+5+e &= 24 \quad \mid -4 \\
e &= 20
\end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $\boxed{f_1(x) = -x^5 + 5x^3 + 20x}$

Aufgabe 7

Ein Polynom 4. Grades hat einen Sattelpunkt bei $S(0|4)$. Bei $x_b = 2$ berührt sie die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 4x - 8$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der gesuchten Funktion!

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\
f_1'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \\
f_1''(x) &= 12ax + 6bx + 2c
\end{aligned}$$

Sattelpunkt bei $x_s = 0$:	$f_1'(0) = 0$	$\Rightarrow 0 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + d = 0$
Sattelpunkt $\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_s = 0$:	$f_1''(0) = 0$	$\Rightarrow 0 \cdot a + 0 \cdot b + c = 0$
Funktionswert bei $x_s = 0$:	$f_1(0) = 4$	$\Rightarrow 0 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + 0 \cdot d + e = 4$
Steigung bei $x_b = 2$:	$f_1'(2) = f_2'(2) = 4$	$\Rightarrow 32a + 12b + 4c + d = 4$
Funktionswert bei $x_b = 2$:	$f_1(2) = f_2(2) = 0$	$\Rightarrow 16a + 8b + 4c + 2d + e = 0$

Aus den ersten drei Gleichungen ergeben sich sofort die Parameter $d = 0$, $c = 0$ und $e = 4$. Diese Ergebnisse setze ich in die letzten beiden Gleichungen ein.

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & 32a + 12b + 4c + d & = & 4 \\
(2) & 16a + 8b + 4c + 2d + e & = & 0 \\ \hline
(1) & 32a + 12b & = & 4 \\
(2) & 16a + 8b + 4 & = & 0 \\ \hline
(1) & 32a + 12b & = & 4 \\
(2) & 16a + 8b & = & -4 \\ \hline
\end{array}$$

Dividiert man die erste Gleichung durch 2, dann kann man die Gleichungen voneinander subtrahieren, um b zu erhalten.

$$\begin{array}{llrcll}
(1) & 32a & +12b & = & 4 & | \ :2 \\
(2) & 16a & +8b & = & -4 & \\ \hline
(1) & 16a & +6b & = & 2 & | \ - \\
(2) & 16a & +8b & = & -4 & | \\ \hline
 & & 2b & = & -6 & | \ :2 \\
 & & b & = & -3 &
\end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in Gleichung (2) ein.

$$\begin{aligned}
16a + 8b &= -4 \\
16a + 8 \cdot (-3) &= -4 \quad | + 24 \\
16a &= 20 \quad | : 16 \\
a &= 1{,}25
\end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $\boxed{f_1(x) = 1{,}25x^4 - 3x^3 + 4}$

Aufgabe 8

Ein Polynom 2. Grades (eine Parabel) berührt die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = -2x + 4$ in ihrem Schnittpunkt mit der y-Achse. Eine andere Parabel mit der Funktionsgleichung $f_3(x) = 2x^2 + 3x - 1$ schneidet die gesuchte Parabel bei $x_s = 2$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der gesuchten Parabel!

$$\begin{aligned} f_1(x) &= ax^2 + bx + c \\ f_1'(x) &= 2ax + b \end{aligned}$$

Steigung bei $x_b = 0$: $f_1'(0) = f_2'(0) = -2 \Rightarrow 0 \cdot a + b = -2$
Funktionswert bei $x_b = 0$: $f_1(0) = f_2(0) = 4 \quad \Rightarrow 0 \cdot a + 0 \cdot b + c = 4$
Funktionswert bei $x_s = 2$: $f_1(2) = f_3(2) = 13 \Rightarrow 4a + 2b + c = 13$

Die weitere Lösung ist sehr simpel. Aus den ersten beiden Gleichungen ergibt sich direkt $b = -2$ und $c = 4$. Diese Werte müssen nur noch in die dritte Gleichung eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} 4a + 2b + c &= 13 \\ 4a + 2 \cdot (-2) + 4 &= 13 \\ 4a &= 13 \quad | : 4 \\ a &= 3,25 \end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $\boxed{f_1(x) = 3,25x^2 - 2x + 4}$

Aufgabe 9

Ein Polynom 3. Grades mit der Funktionsgleichung $f_1(x)$ schneidet die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = x^2 + 4x - 4$ bei $x_1 = -1$, bei $x_2 = 2$ und bei $x_3 = 5$. Außerdem hat der Graph der gesuchten Funktion einen Hochpunkt bei $x_h = 1$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der gesuchten Funktion!

$$\begin{aligned} f_1(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f_1'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \end{aligned}$$

Funktionswert bei $x_1 = -1$: $f_1(-1) = f_2(-1) = -7 \Rightarrow -a + b - c + d = -7$
Funktionswert bei $x_1 = 2$: $f_1(2) = f_2(2) = 8 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 8$
Funktionswert bei $x_1 = 5$: $f_1(5) = f_2(5) = 41 \Rightarrow 125a + 25b + 5c + d = 41$
Hochpunkt bei $x_h = 1$: $f_1'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$

Wir haben ein Lineargleichungssystem 4. Ordnung erhalten.

$$\boxed{\begin{array}{crrrrcl} (1) & -a & +b & -c & +d & = & -7 \\ (2) & 8a & +4b & +2c & +d & = & 8 \\ (3) & 125a & +25b & +5c & +d & = & 41 \\ (4) & 3a & +2b & +c & & = & 0 \end{array}}$$

Es fällt auf, dass der Parameter d in Gleichung (4) nicht vorkommt und in den anderen Gleichungen jeweils nur einfach. Daher bietet es sich an, zunächst d zu eliminieren. Dazu subtrahiere ich Gleichung (1) von Gleichung (2) und erhalte Gleichung (5).

$$\begin{array}{crrrrcll} (1) & -a & +b & -c & +d & = & -7 & | \quad - \\ (2) & 8a & +4b & +2c & +d & = & 8 & | \\ \hline (5) & 9a & +3b & +3c & & = & 15 & \end{array}$$

Dann subtrahiere ich Gleichung (2) von Gleichung (3) und erhalte Gleichung (6).

$$\begin{array}{crrrrcll} \hline (2) & 8a & +4b & +2c & +d & = & 8 & | \quad - \\ (3) & 125a & +25b & +5c & +d & = & 41 & | \\ \hline (6) & 117a & +21b & +3c & & = & 33 & \end{array}$$

Übrig bleibt ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung.

$$\boxed{\begin{array}{crrrcl} (4) & 3a & +2b & +c & = & 0 \\ (5) & 9a & +3b & +3c & = & 15 \\ (6) & 117a & +21b & +3c & = & 33 \end{array}}$$

Das Gleichungssystem lässt sich etwas vereinfachen, wenn man sowohl Gleichung (5) als auch Gleichung (6) durch 3 dividiert.

$$\boxed{\begin{array}{crrrcl} (4) & 3a & +2b & +c & = & 0 \\ (5) & 3a & +b & +c & = & 5 \\ (6) & 39a & +7b & +c & = & 11 \end{array}}$$

Es fällt auf, dass in Gleichung (4) und (5) die Koeffizienten von a und c übereinstimmen. Das kann man ausnutzen, indem man die beiden Gleichungen voneinander subtrahiert. Dann fallen beide gleichzeitig weg!

$$\begin{array}{lcccccl} (4) & 3a & +2b & +c & = & 0 & | \\ (5) & 3a & +b & +c & = & 5 & | \; - \\ \hline (7) & & b & & = & -5 & \end{array}$$

Das Ergebnis wird nun in Gleichung (6) und entweder in Gleichung (4) oder Gleichung (5) eingesetzt. Ich wähle willkürlich Gleichung (5) aus. Dann bleibt ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung übrig.

$$\boxed{\begin{array}{lccccc} (5) & 3a & -5 & +c & = & 5 \\ (6) & 39a & +7\cdot(-5) & +c & = & 11 \end{array}}$$

Aufgelöst in Normalform sieht das System so aus:

$$\boxed{\begin{array}{lcccc} (5) & 3a & +c & = & 10 \\ (6) & 39a & +c & = & 46 \end{array}}$$

Da jeweils c allein vorkommt, können die Gleichungen sofort voneinander subtrahiert werden.

$$\begin{array}{lccccl} (5) & 3a & +c & = & 10 & | \; - \\ (6) & 39a & +c & = & 46 & | \\ \hline & 36a & & = & 36 & | \; :36 \\ & a & & = & 1 & \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in Gleichung (5) ein.

$$\begin{aligned} 3a + c &= 10 \\ 3\cdot 1 + c &= 10 \quad | - 3 \\ c &= 7 \end{aligned}$$

Alle Ergebnisse setze ich in Gleichung (1) ein, um d zu bestimmen.

$$\begin{aligned} -a + b - c + d &= -7 \\ -1 - 5 - 7 + d &= -7 \quad | + 13 \\ d &= 6 \end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $\boxed{f_1(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + 6}$