Übungen: Bruchgleichungen 2

Im Teil 1 finden Sie die Aufgabenstellung, in Teil 2 die Ergebnisse und in Teil 3 die komplett durchgerechnete Lösung der Aufgabe.

Teil 1: Aufgabenstellungen

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen der nachfolgenden Aufgaben!

Aufgabe 1

$$\frac{x}{4} + \frac{5x}{6} + \frac{5}{6} = \frac{x}{2} + x$$

Aufgabe 2

$$\frac{2x}{5} + \frac{3x}{2} = 4\frac{1}{2} + x$$

Aufgabe 3

$$\frac{10x}{6} - \frac{8x}{9} = 4\frac{2}{3}$$

Aufgabe 4

$$\frac{3}{2x} + \frac{2}{3x} = \frac{1}{9} + \frac{7}{3x}$$

Aufgabe 5

$$\frac{5}{4x+8} - \frac{2}{12x+24} = \frac{x}{4x+8} + \frac{1}{3x+6}$$

Aufgabe 6

$$\frac{2x}{4x+40} + \frac{3x}{2x+20} = \frac{5}{2x+20} + \frac{45}{6x+60}$$

Aufgabe 7

$$\frac{5}{x+3} + \frac{1}{x-1} - \frac{6}{x-1} = 0$$

Aufgabe 8

$$\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2} = \frac{5}{x-2} - \frac{4}{x^2-4}$$

Aufgabe 9

$$\frac{2}{x-5}-\frac{6}{2x-5}+\frac{4}{3x-5}=\frac{1}{3x-5}$$

Aufgabe 10

$$\frac{a+x}{b-x}-\frac{b-x}{a+x}=\frac{2a^2-2b^2}{ab-ax+bx-x^2}$$

Aufgabe 11

$$\frac{1}{4-x}-\frac{x-6}{x^2-3x-4}=\frac{2}{x^2-1}$$

Aufgabe 12

$$\frac{2}{2x+1}+\frac{7}{2x^2-x-1}-\frac{2}{3x-1}=\frac{2x+3}{3x^2-4x+1}$$

Aufgabe 13

$$\frac{3x+4}{x-5}-\frac{x-9}{x-7}=\frac{2x^2-13x+27}{x^2-12x+35}$$

Aufgabe 14

$$\frac{4x-5}{3x+3}+\frac{3x+4}{5-5x}=\frac{11x^2-69x+58}{15x^2-15}$$

Aufgabe 15

$$\frac{7x-13}{2x-1}-\frac{13x-28}{3-2x}=10-\frac{28x+43}{4x^2-8x+3}$$

Aufgabe 16

$$\frac{5x-17}{4x-3}+\frac{7(x-4)}{4x-5}-\frac{12(10x+73)}{32x-16x^2-15}=3$$

Aufgabe 17

$$\frac{2x+5}{2x-4}+\frac{6x+5}{3x+6}=\frac{3x^2-2x+5}{x^2-4}$$

Aufgabe 18

$$\frac{3x-5}{x+2}+\frac{7x-10}{x+1}=10-\frac{x+99}{x^2+3x+2}$$

Aufgabe 19

$$\frac{x}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{2}{5x-x^2-6}$$

Aufgabe 20

$$\frac{3x+7}{4x-20}+\frac{4x-3}{25-5x}-\frac{11-7x}{2x-10}=-10\frac{13}{20}$$

Aufgabe 21

$$\frac{2x+1}{x^2+x-56}=\frac{1}{x-7}$$

Aufgabe 22

$$\frac{6x^2-10x+6}{2x^3-13x^2+17x+12}-\frac{1}{x-3}-\frac{2x}{x^2-7x+12}=0$$

Aufgabe 23

$$\frac{5x+2}{x^2-3x-10}=\frac{x-2}{x^2-x-6}-\frac{x+1}{x^2-8x+15}$$

Aufgabe 24

$$\frac{x-7}{x^2-4x+3}-\frac{x-8}{x^2-6x+5}=\frac{4x+1}{x^3-9x^2+23x-15}$$

Aufgabe 25

$$\frac{3}{2x-4}=\frac{8x}{2x^2-10x+12}-\frac{5x^2-19}{2x^3-8x^2+2x+12}$$

Teil 2: Ergebnisse

Aufgabe 1

$$D = \mathbb{R} \qquad L = \{2\}$$

Aufgabe 2

$$D = \mathbb{R} \qquad L = \{5\}$$

Aufgabe 3

$$D = \mathbb{R} \qquad L = \{6\}$$

Aufgabe 4

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad L = \{-1,5\}$$

Aufgabe 5

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2\} \qquad L = \{3\}$$

Aufgabe 6

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-10\} \qquad L = \{5\}$$

Aufgabe 7

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\} \qquad L = \{\ \}$$

Aufgabe 8

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1; 2\} \qquad L = \{0,4\}$$

Aufgabe 9

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{5; \frac{5}{2}; \frac{5}{3}\right\} \qquad L = \{1\}$$

Aufgabe 10

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-a; b\} \qquad L = \left\{\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right\}$$

Aufgabe 11

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1; 4\} \qquad L = \{3; -0,5\}$$

Aufgabe 12

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right\} \qquad L = \{1,5; 2\}$$

Aufgabe 13

$$D = \mathbb{R} \setminus \{5; 7\} \qquad L = \{10\}$$

Aufgabe 14

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} \qquad L = \{15\}$$

Aufgabe 15

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0,5; 1,5\} \qquad L = \{10\}$$

Aufgabe 16

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0,75; 1,25\} \qquad L = \{100\}$$

Aufgabe 17

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\} \qquad L = \{0,8\}$$

Aufgabe 18

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2; -1\} \qquad L = \{2\}$$

Aufgabe 19

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\} \qquad L = \{\ \} \quad (\text{Lösung } x = 2 \notin D)$$

Aufgabe 20

$$D = \mathbb{R} \setminus \{5\} \qquad L = \{4\}$$

Aufgabe 21

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-8; 7\} \qquad L = \{\ \} \quad (\text{Lösung } x = 7 \notin D)$$

Aufgabe 22

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-0,5; 3; 4\} \qquad L = \{2\}$$

Aufgabe 23

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3; 5\} \qquad L = \{2; -1,4\}$$

Aufgabe 24

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1; 3; 5\} \qquad L = \{2\}$$

Aufgabe 25

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2; 3\} \qquad L = \{-2\}$$

Teil 3: Durchgerechnete Lösungen

Aufgabe 1

$$\frac{x}{4}+\frac{5x}{6}+\frac{5}{6}=\frac{x}{2}+x$$

a: Nenneranalyse

$$\begin{array}{rcll|l}
4 & = & 2^2 & & EF=3 \\
6 & = & 2 & \cdot 3 & EF=2 \\
2 & = & 2 & & EF=2\cdot 3=6 \\
\hline
HN & = & 2^2 & \cdot 3 = 12 &
\end{array}$$

$$D=\mathbb{R}$$

b: Lösung

$$\begin{array}{rcl}
\frac{x}{4}+\frac{5x}{6}+\frac{5}{6} & = & \frac{x}{2}+x \quad |\cdot HN \\
x\cdot 3+5x\cdot 2+5\cdot 2 & = & x\cdot 6+x\cdot 12 \\
3x+10x+10 & = & 6x+12x \\
13x+10 & = & 18x \quad |-13x \\
10 & = & 5x \quad |:5 \\
2 & = & x \\
L & = & \{2\}
\end{array}$$

Aufgabe 2

$$\frac{2x}{5}+\frac{3x}{2}=4\frac{1}{2}+x$$

a: Nenneranalyse

$$\begin{array}{rcll|l} 5 & = & & 5 & EF=2 \\ 2 & = & 2 & & EF=5 \\ \hline HN & = & 2 & \cdot 5 = 10 & \end{array}$$

$$D=\mathbb{R}$$

b: Lösung

$$\begin{aligned} \frac{2x}{5}+\frac{3x}{2} &= 4\frac{1}{2}+x \\ \frac{2x}{5}+\frac{3x}{2} &= 4+\frac{1}{2}+x \quad |\cdot HN \\ 2x\cdot 2+3x\cdot 5 &= 4\cdot 10+1\cdot 5+x\cdot 10 \\ 4x+15x &= 40+5+10x \\ 19x &= 45+10x \quad |-10x \\ 9x &= 45 \quad |:9 \\ x &= 5 \\ L &= \{5\} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

$$\frac{10x}{6} - \frac{8x}{9} = 4\frac{2}{3}$$

a: Nenneranalyse

$$\begin{array}{rcll|l} 6 & = & 2 & \cdot 3 & EF = 3 \\ 9 & = & & 3^2 & EF = 2 \\ 3 & = & & 3 & EF = 2 \cdot 3 = 6 \\ \hline HN & = & 2 & \cdot 3^2 = 18 & \end{array}$$

$$D = \mathbb{R}$$

b: Lösung

$$\begin{aligned} \frac{10x}{6} - \frac{8x}{9} &= 4\frac{2}{3} \\ \frac{10x}{6} - \frac{8x}{9} &= 4 + \frac{2}{3} \quad | \cdot HN \\ 10x \cdot 3 - 8x \cdot 2 &= 4 \cdot 18 + 2 \cdot 6 \\ 30x - 16x &= 72 + 12 \\ 14x &= 84 \quad | : 14 \\ x &= 6 \\ L &= \{6\} \end{aligned}$$

Aufgabe 4

$$\frac{3}{2x}+\frac{2}{3x}=\frac{1}{9}+\frac{7}{3x}$$

a: Nenneranalyse

$$\begin{array}{rclll|l}
2x & = & 2 & & \cdot x & EF = 3^2 = 9 \\
3x & = & & 3 & \cdot x & EF = 2\cdot 3 = 6 \\
9 & = & & 3^2 & & EF = 2x \\
\hline
HN & = & 2 & \cdot 3^2 & \cdot x = 18x &
\end{array}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

b: Lösung

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2x}+\frac{2}{3x} &= \frac{1}{9}+\frac{7}{3x} \quad | \cdot HN \\
3\cdot 9 + 2\cdot 6 &= 1\cdot 2x + 7\cdot 6 \\
27+12 &= 2x+42 \\
39 &= 2x+42 \quad | -42 \\
-3 &= 2x \quad | : 2 \\
-1,5 &= x \\
L &= \{-1,5\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

$$\frac{5}{4x+8} - \frac{2}{12x+24} = \frac{x}{4x+8} + \frac{1}{3x+6}$$

a: Nenneranalyse

$$\begin{array}{rclll|l} 4x+8 & = & 2^2 & & \cdot(x+2) & EF=3 \\ 12x+24 & = & 2^2 & \cdot 3 & \cdot(x+2) & EF=1 \\ 3x+6 & = & & 3 & \cdot(x+2) & EF=2^2=4 \\ \hline HN & = & 2^2 & \cdot 3 & \cdot(x+2) & \end{array}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

b: Lösung

$$\begin{aligned} \frac{5}{4x+8} - \frac{2}{12x+24} &= \frac{x}{4x+8} + \frac{1}{3x+6} \quad | \cdot HN \\ 5 \cdot 3 - 2 \cdot 1 &= x \cdot 3 + 1 \cdot 4 \\ 15 - 2 &= 3x + 4 \\ 13 &= 3x + 4 \quad | - 4 \\ 9 &= 3x \quad | : 3 \\ 3 &= x \\ L &= \{3\} \end{aligned}$$

Aufgabe 6

$$\frac{2x}{4x+40}+\frac{3x}{2x+20}=\frac{5}{2x+20}+\frac{45}{6x+60}$$

a: Nenneranalyse

$$\begin{array}{rcllll|l}
4x+40 & = & 2^2 & & \cdot(x+10) & & HN=3 \\
2x+20 & = & 2 & & \cdot(x+10) & & HN=2\cdot 3=6 \\
6x+60 & = & 2 & \cdot 3 & \cdot(x+10) & & HN=2 \\
\hline
HN & = & 2^2 & \cdot 3 & \cdot(x+10) & &
\end{array}$$

$$D=\mathbb{R}\setminus\{-10\}$$

b: Lösung

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{4x+40}+\frac{3x}{2x+20} &= \frac{5}{2x+20}+\frac{45}{6x+60} \quad |\cdot HN \\
2x\cdot 3+3x\cdot 6 &= 5\cdot 6+45\cdot 2 \\
6x+18x &= 30+90 \\
24x &= 120 \quad |:24 \\
x &= 5 \\
L &= \{5\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 7

$$\frac{5}{x+3} + \frac{1}{x-1} - \frac{6}{x-1} = 0$$

a: Nenneranalyse

$$\begin{array}{rcll|l}
x+3 & = & (x+3) & & EF = (x-1) \\
x-1 & = & & (x-1) & EF = (x+3) \\
\hline
HN & = & (x+3) & \cdot(x-1) &
\end{array}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$$

b: Lösung

$$\begin{aligned}
\frac{5}{x+3} + \frac{1}{x-1} - \frac{6}{x-1} &= 0 \quad | \cdot HN \\
5 \cdot (x-1) + 1 \cdot (x+3) - 6 \cdot (x+3) &= 0 \\
5x - 5 + x + 3 - 6x - 18 &= 0 \\
-10 &= 0
\end{aligned}$$

Wir haben anstelle einer Lösung eine **falsche Aussage** erhalten. Daraus folgt, dass die Lösungsmenge **leer** ist.

$$L = \{ \ \}$$

Aufgabe 8

$$\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+2}=\frac{5}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}$$

a: Nenneranalyse

$$\begin{array}{rcccc|l}
x-1 & = & (x-1) & & & EF=(x+2)\cdot(x-2)=(x^2-4) \\
x+2 & = & & (x+2) & & EF=(x-1)\cdot(x-2)=(x^2-3x+2) \\
x-2 & = & & & (x-2) & EF=(x-1)\cdot(x+2)=(x^2+x-2) \\
x^2-4 & = & & (x+2) & \cdot(x-2) & EF=(x-1) \\
\hline
HN & = & (x-1) & \cdot(x+2) & \cdot(x-2) &
\end{array}$$

Hinweis: Der Nenner des vierten Bruches (x^2-4) wurde mit Hilfe der **Dritten Binomischen Formel** zerlegt.

$$D=\mathbb{R}\setminus\{-2;1;2\}$$

b: Lösung

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+2} &= \frac{5}{x-2}-\frac{4}{x^2-4} \quad |\cdot HN \\
2\cdot(x^2-4)+3\cdot(x^2-3x+2) &= 5\cdot(x^2+x-2)-4\cdot(x-1) \\
2x^2-8+3x^2-9x+6 &= 5x^2+5x-10-4x+4 \\
5x^2-9x-2 &= 5x^2+x-6 \quad |-5x^2-x+2 \\
-10x &= -4 \quad |:(-10) \\
x &= 0,4 \\
L &= \{0,4\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 9

$$\frac{2}{x-5}-\frac{6}{2x-5}+\frac{4}{3x-5}=\frac{1}{3x-5}$$

a: Nenneranalyse

$$\begin{array}{rcccc|l}
x-5 & = & (x-5) & & & EF=(2x-5)\cdot(3x-5)=(6x^2-25x+25)\\
2x-5 & = & & (2x-5) & & EF=(x-5)\cdot(3x-5)=(3x^2-20x+25)\\
3x-5 & = & & & (3x-5) & EF=(x-5)\cdot(2x-5)=(2x^2-15x+25)\\
\hline
HN & = & (x-5) & \cdot(2x-5) & \cdot(3x-5) &
\end{array}$$

Die Nenner sind teilerfremd, man kann sie nicht sinnvoll weiter zerlegen. Daher ist der Hauptnenner das Produkt aller Nenner.

$$D=\mathbb{R}\setminus\left\{5;\frac{5}{2};\frac{5}{3}\right\}$$

b: Lösung

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x-5}-\frac{6}{2x-5}+\frac{4}{3x-5} &= \frac{1}{3x-5} \quad |\cdot HN\\
2\cdot(6x^2-25x+25)-6\cdot(3x^2-20x+25)+4\cdot(2x^2-15x+25) &= 1\cdot(2x^2-15x+25)\\
12x^2-50x+50-18x^2+120x-150+8x^2-60x+100 &= 2x^2-15x+25\\
2x^2+10x &= 2x^2-15x+25 \quad |-2x^2+15x\\
25x &= 25 \quad |:25\\
x &= 1\\
L &= \{1\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 10

$$\frac{a+x}{b-x} - \frac{b-x}{a+x} = \frac{2a^2-2b^2}{ab-ax+bx-x^2}$$

a: Nenneranalyse

Dass die ersten beiden Nenner nicht weiter zu zerlegen sind, sieht man auf den ersten Blick. Der dritte Nenner könnte zerlegbar sein. Da der erste Term ab das Produkt aus den beiden ersten Ausdrücken a und b des ersten und zweiten Nenners ist und entsprechendes auch für die jeweils letzten Terme x^2, x und x gilt, liegt der Verdacht nahe, das Produkt der ersten beiden Nenner könnte der dritte Nenner sein. Das wird überprüft:

$$(b-x)\cdot(a+x) = ab + bx - ax - x^2$$

Die Vermutung konnte bestätigt werden. Die Nennerzerlegung sieht also folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{rcll|l}
b-x & = & (b-x) & & EF=(a+x) \\
a+x & = & & (a+x) & EF=(b-x) \\
ab-ax+bx-x^2 & = & (b-x) & \cdot(a+x) & EF=1 \\
\hline
HN & = & (a+x) & \cdot(b-x) &
\end{array}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{b; -a\}$$

b: Lösung

$$\begin{aligned}
\frac{a+x}{b-x} - \frac{b-x}{a+x} &= \frac{2a^2-2b^2}{ab-ax+bx-x^2} \quad |\cdot HN \\
(a+x)\cdot(a+x)-(b-x)\cdot(b-x) &= (2a^2-2b^2)\cdot 1 \\
(a^2+2ax+x^2)-(b^2-2bx+x^2) &= 2a^2-2b^2 \\
a^2+2ax+x^2-b^2+2bx-x^2 &= 2a^2-2b^2 \\
a^2+2ax-b^2+2bx &= 2a^2-2b^2 \quad |-a^2+b^2 \\
2ax+2bx &= a^2-b^2 \\
(2a+2b)\cdot x &= a^2-b^2 \quad |:(2a+2b) \\
x &= \frac{a^2-b^2}{2a+2b} \\
x &= \frac{(a+b)\cdot(a-b)}{2\cdot(a+b)} \\
x &= \frac{a-b}{2} \\
x &= \frac{a}{2}-\frac{b}{2} \\
L &= \left\{\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 11

$$\frac{1}{4-x} - \frac{x-6}{x^2-3x-4} = \frac{2}{x^2-1}$$

a: Nenneranalyse

Der zweite Nenner (x^2-3x-4) stellt einen Quadratischen Term dar. Daher kann er mit der [1] p-q-Formel untersucht werden.

$$\begin{aligned}
x^2-3x-4 &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{16}{4}} \\
x_{1/2} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \\
x_{1/2} &= \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \\
x_1 = 4 &\quad x_2 = -1
\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Vieta ergibt sich daraus folgende Zerlegung:

$$x^2-3x-4 = (x-4)\cdot(x+1)$$

Der dritte Nenner kann mit der dritten Binomischen Formel zerlegt werden. Damit sieht die Zerlegung auf den ersten Blick so aus:

$$\begin{array}{rcllll}
4-x & = & (4-x) & & & \\
x^2-3x-4 & = & & (x-4) & \cdot(x+1) & \\
x^2-1 & = & & & (x+1) & \cdot(x-1) \\
\hline
HN & = & (4-x) & \cdot(x-4) & \cdot(x+1) & \cdot(x-1)
\end{array}$$

Schaut man sich die ersten beiden Terme $(4-x)$ und $(x-4)$ einmal genau an, dann wird man feststellen, dass der eine Term genau das Negative des anderen Terms ist. Das kann man ausnutzen, indem man beispielsweise aus dem ersten Term $(4-x)$ eine -1 ausklammert, um den zweiten daraus zu machen. Dann entsteht folgende (günstigere) Zerlegung mit einem einfacheren Hauptnenner:

$$\begin{array}{rcllll|l}
4-x & = & (-1) & \cdot(x-4) & & & EF = (x+1)\cdot(x-1) = (x^2-1) \\
x^2-3x-4 & = & & \cdot(x-4) & \cdot(x+1) & & EF = (-1)\cdot(x-1) = (-x+1) \\
x^2-1 & = & & & (x+1) & \cdot(x-1) & EF = (-1)\cdot(x-4) = (-x+4) \\
\hline
HN & = & (-1) & \cdot(x-4) & \cdot(x+1) & \cdot(x-1) &
\end{array}$$

Hieraus ergibt sich der Definitionsbereich:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1; 4\}$$

[1] Näheres dazu unter: www.dk4ek.de/mathematikquad.pdf

b: Lösung

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4-x} - \frac{x-6}{x^2-3x-4} &= \frac{2}{x^2-1} \quad | \cdot HN \\
1 \cdot \left(x^2-1\right) - (x-6) \cdot (-x+1) &= 2 \cdot (-x+4) \\
x^2 - 1 - \left(-x^2 + x + 6x - 6\right) &= -2x + 8 \\
x^2 - 1 + x^2 - x - 6x + 6 &= -2x + 8 \\
2x^2 - 7x + 5 &= -2x + 8 \quad | + 2x - 8 \\
2x^2 - 5x - 3 &= 0 \quad | : 2 \\
x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{24}{16}} \\
x_{1/2} &= \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16}} \\
x_{1/2} &= \frac{5}{4} \pm \frac{7}{4} \\
x_1 = 3 & \qquad x_2 = -\frac{1}{2} \\
L &= \left\{3; -\frac{1}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 12

$$\frac{2}{2x+1} + \frac{7}{2x^2-x-1} - \frac{2}{3x-1} = \frac{2x+3}{3x^2-4x+1}$$

a: Nenneranalyse

Der zweite Nenner $(2x^2 - x - 1)$ stellt einen Quadratischen Term dar. Es könnte sein, dass einer der beiden einfachen Nenner darin als Teiler enthalten ist. Das probieren wir aus.

$$\begin{array}{rrr} (2x^2 & -x & -1) \\ -(2x^2 & +x) & \\ \hline & (-2x & -1) \\ & -(-2x & -1) \\ \hline & & 0 \end{array} \quad : \quad (2x+1) \quad = \quad x-1$$

Auch der vierte Nenner ist ein Quadratischer Term, der zerlegbar sein sollte. Ich probiere aus, ob er durch den eben gefundenen Term $(x - 1)$ teilbar ist.

$$\begin{array}{rrr} (3x^2 & -4x & +1) \\ -(3x^2 & -3x) & \\ \hline & (-x & +1) \\ & -(-x & +1) \\ \hline & & 0 \end{array} \quad : \quad (x-1) \quad = \quad 3x-1$$

Damit kommen wir zu folgender Nennerzerlegung:

$$\begin{array}{rcccc|l} 2x+1 & = & (2x+1) & & & EF = (x-1)\cdot(3x-1) = (3x^2-4x+1) \\ 2x^2-x-1 & = & (2x+1) & \cdot(x-1) & & EF = (3x-1) \\ 3x-1 & = & & & (3x-1) & EF = (2x+1)\cdot(x-1) = (2x^2-x-1) \\ 3x^2-4x+1 & = & & (x-1) & \cdot(3x-1) & EF = (2x+1) \\ \hline HN & = & (2x+1) & \cdot(x-1) & \cdot(3x-1) & \end{array}$$

Hieraus ergibt sich der Definitionsbereich:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{3}\}$$

b: Lösung

$$\begin{aligned}
\frac{2}{2x+1}+\frac{7}{2x^2-x-1}-\frac{2}{3x-1} &= \frac{2x+3}{3x^2-4x+1} \quad | \cdot HN \\
2\cdot(3x^2-4x+1)+7\cdot(3x-1)-2\cdot(2x^2-x-1) &= (2x+3)\cdot(2x+1) \\
6x^2-8x+2+21x-7-4x^2+2x+2 &= 4x^2+2x+6x+3 \\
2x^2+15x-3 &= 4x^2+8x+3 \quad | -4x^2-8x-3 \\
-2x^2+7x-6 &= 0 \quad | : (-2) \\
x^2-\frac{7}{2}+3 &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{7}{4}\pm\sqrt{\frac{49}{16}-\frac{48}{16}} \\
x_{1/2} &= \frac{7}{4}\pm\frac{1}{4} \\
x_1 = 2 & \quad x_2 = 1,5 \\
L &= \{2; 1,5\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 13

$$\frac{3x+4}{x-5} - \frac{x-9}{x-7} = \frac{2x^2-13x+27}{x^2-12x+35}$$

a: Nenneranalyse

Der dritte Nenner $(x^2 - 12x + 35)$ stellt einen Quadratischen Term dar. Es könnte sein, dass einer der beiden einfachen Nenner darin als Teiler enthalten ist. Das probieren wir aus.

$$\begin{array}{rrrcccc}
(x^2 & -12x & +35) & : & (x-5) & = & x-7 \\
-(x^2 & -5x) & & & & & \\
\hline
 & (-7x & +35) & & & & \\
 & -(-7x & +35) & & & & \\
\hline
 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Damit kommen wir zu folgender Nennerzerlegung:

$$\begin{array}{rcll|l}
x-5 & = & (x-5) & & EF = (x-7) \\
x-7 & = & & (x-7) & EF = (x-5) \\
x^2-12x+35 & = & (x-5) & \cdot(x-7) & EF = 1 \\
\hline
HN & = & (x-5) & \cdot(x-7) &
\end{array}$$

Hieraus ergibt sich der Definitionsbereich:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{5; 7\}$$

b: Lösung

$$\begin{aligned}
\frac{3x+4}{x-5} - \frac{x-9}{x-7} &= \frac{2x^2-13x+27}{x^2-12x+35} \quad | \cdot HN \\
(3x+4)\cdot(x-7) - (x-9)\cdot(x-5) &= (2x^2-13x+27)\cdot 1 \\
3x^2 - 21x + 4x - 28 - \left(x^2 - 5x - 9x + 45\right) &= 2x^2 - 13x + 27 \\
3x^2 - 17x - 28 - x^2 + 5x + 9x - 45 &= 2x^2 - 13x + 27 \\
2x^2 - 3x - 73 &= 2x^2 - 13x + 27 \quad | - 2x^2 + 13x + 73 \\
10x &= 100 \quad | : 10 \\
x &= 10 \\
L &= \{10\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 14

$$\frac{4x-5}{3x+3}+\frac{3x+4}{5-5x}=\frac{11x^2-69x+58}{15x^2-15}$$

a: Nenneranalyse

In den ersten beiden Nennern kann jeweils eine Zahl ausgeklammert werden. Für den dritten Nenner bietet sich – nach Ausklammern von $(3\cdot 5)$ – die dritte Binomische Formel an.

Hat man das durchgeführt, dann ist diner der beiden Faktoren genau das Negative des dritten Nenners. Daher bietet es sich an, dort eine (-1) auszuklammern.

$$\begin{array}{rclccccc|l}
3x+3 & = & 3 & & & & \cdot(x+1) & EF = 5\cdot(-1)\cdot(x-1) = (-5x+5) \\
5-5x & = & & 5 & \cdot(-1) & \cdot(x-1) & & EF = 3\cdot(x+1) = (3x+3) \\
15x^2-15 & = & 3 & \cdot 5 & & (x-1) & \cdot(x+1) & EF = (-1) \\
\hline
HN & = & 3 & \cdot 5 & \cdot(-1) & \cdot(x-1) & \cdot(x+1) &
\end{array}$$

Hieraus ergibt sich der Definitionsbereich:

$$D=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$$

b: Lösung

$$\begin{aligned}
\frac{4x-5}{3x+3}+\frac{3x+4}{5-5x} &= \frac{11x^2-69x+58}{15x^2-15} \quad \mid\cdot HN \\
(4x-5)\cdot(-5x+5)+(3x+4)\cdot(3x+3) &= (11x^2-69x+58)\cdot(-1) \\
-20x^2+20x+25x-25+9x^2+9x+12x+12 &= -11x^2+69x-58 \\
-11x^2+66x-13 &= -11x^2+69x-58 \quad \mid +11x^2-69x+13 \\
-3x &= -45 \quad \mid :(-3) \\
x &= 15 \\
L &= \{15\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 15

$$\frac{7x-13}{2x-1} - \frac{13x-28}{3-2x} = 10 - \frac{28x+43}{4x^2-8x+3}$$

a: Nenneranalyse

In den ersten beiden Nennern kann sicher nichts mehr faktorisiert werden. Es geht nichts auszuklammern und x kommt auch nur ohne Quadrat vor. Der dritte Nenner könnte aber zerlegt werden, da ein x^2 vorkommt. Da Ausklammern nicht geht und auch kein Binomischer Term erkennbar ist, kommt nur eine Polynomdivision oder eine Zerlegung nach Vieta in Frage.

<u>**1. Variante:**</u> Eine Zerlegung nützt uns nur dann, wenn einer der anderen Nenner in diesem Nenner als Faktor enthalten ist. Daher versuche ich in einer Polynomdivision, diesen Nenner durch den ersten Nenner zu dividieren:

$$\begin{array}{rrr}
(4x^2 & -8x & +3) \;:\; (2x-1) \;=\; 2x-3 \\
-(4x^2 & -2x) & \\
\hline
 & -6x & +3 \\
-(& -6x & +3) \\
\hline
 & & 0
\end{array}$$

Die Division ist aufgegangen. Wir erhalten also die Zerlegung:

$$4x^2 - 8x + 3 = (2x-1)\cdot(2x-3)$$

<u>**2. Variante:**</u> Ich bestimme die zugehörigen Nullstellen mit Hilfe der p-q-Formel.

$$\begin{aligned}
4x^2 - 8x + 3 &= 0 \quad | :4 \\
x^2 - 2x + \frac{3}{4} &= 0 \\
x_{1/2} &= 1 \pm \sqrt{1^2 - \frac{3}{4}} \\
&= 1 \pm \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{3}{4}} \\
&= 1 \pm \frac{1}{2} \\
x_1 = \frac{3}{2} & \qquad x_2 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Nach Vieta lässt sich ein Quadratischer Term schreiben als:

$$ax^2 + bx + c = a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$$

wobei x_1 und x_2 die Nullstellen des Terms sind und a der Vorfaktor von x^2. Wir wenden das auf unseren zu untersuchenden Nenner an:

$$4x^2 - 8x + 3 = 4\cdot\left(x - \frac{3}{2}\right)\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Die in der Zerlegung enthaltenen Brüche sind unbefriedigend. Zerlegt man die 4 vor den beiden Klammern in $2 \cdot 2$, dann kann je eine der beiden Zweien in die beiden Klammern hineinmultipliziert werden. Man erhält dann:

$$4x^2 - 8x + 3 = (2x - 3) \cdot (2x - 1)$$

Gleichgültig über welche Variante man auf die Zerlegung gekommen ist, es bleibt die Beobachtung, dass nur der erste Nenner direkt darin enthalten ist. Der zweite Nenner ähnelt allerdings dem anderen Term. Vergleichen wir sie miteinander:

$$\text{2. Nenner:} 3 - 2x \qquad \text{Faktor aus 3. Nenner:} 2x - 3$$

Wenn ich die Reihenfolge im 2. Nenner tausche und dann noch (-1) ausklammere, erhalte ich genau diesen Term:

$$3 - 2x = -2x + 3 = -1 \cdot (2x - 3)$$

Damit können wir die Nenneranalyse aufschreiben:

$$\begin{array}{rclll|l}
2x - 1 & = & & & (2x-1) & EF = -1 \cdot (2x-3) = -2x+3 \\
3 - 2x & = & -1 & \cdot(2x-3) & & EF = 2x - 1 \\
4x^2 - 8x + 3 & = & & (2x-3) & \cdot(2x-1) & EF = -1 \\
\hline
HN & = & -1 & \cdot(2x-3) & \cdot(2x-1) &
\end{array}$$

Hieraus ergibt sich der Definitionsbereich:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0,5; 1,5\}$$

b: Lösung

$$\begin{aligned}
\frac{7x-13}{2x-1} - \frac{13x-28}{3-2x} &= 10 - \frac{28x+43}{4x^2-8x+3} \quad | \cdot HN \\
(7x-13)(-2x+3) - (13x-28)(2x-1) &= 10(-1)(2x-3)(2x-1) - \ldots \\
&\quad \ldots - (28x+43)(-1) \\
-14x^2 + 47x - 39 - (26x^2 - 69x + 28) &= -10(4x^2 - 8x + 3) + (28x + 43) \\
-14x^2 + 47x - 39 - 26x^2 + 69x - 28 &= -40x^2 + 80x - 30 + 28x + 43 \\
-40x^2 + 116x - 67 &= -40x^2 + 108x + 13 \quad | + 40x^2 - 108x + 67 \\
8x &= 80 \quad | : 8 \\
x &= 10 \\
L &= \{10\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 16

$$\frac{5x-17}{4x-3}+\frac{7(x-4)}{4x-5}-\frac{12(10x+73)}{32x-16x^2-15}=3$$

a: Nenneranalyse

In den ersten beiden Nennern kann sicher nichts mehr faktorisiert werden. Es geht nichts auszuklammern und x kommt auch nur ohne Quadrat vor. Der dritte Nenner könnte aber zerlegt werden, da ein x^2 vorkommt. Da Ausklammern nicht geht und auch kein Binomischer Term erkennbar ist, kommt nur eine Polynomdivision oder eine Zerlegung nach Vieta in Frage.

__**1. Variante:**__ Eine Zerlegung nützt uns nur dann, wenn einer der anderen Nenner in diesem Nenner als Faktor enthalten ist. Daher versuche ich in einer Polynomdivision, diesen Nenner durch den ersten Nenner zu dividieren. Zuvor wird der dritte Nenner sortiert:

$$\begin{array}{rrrcccc}
(-16x^2 & +32x & -15) & : & (4x-3) & = & -4x+5 \\
-(-16x^2 & +12x) & & & & & \\
\hline
 & 20x & -15 & & & & \\
 & -(20x & -15) & & & & \\
\hline
 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Die Division ist aufgegangen. Wir erhalten also die Zerlegung:

$$-16x^2+32x-15=(4x-3)\cdot(-4x+5)$$

__**2. Variante:**__ Ich bestimme die zugehörigen Nullstellen mit Hilfe der p-q-Formel.

$$\begin{aligned}
-16x^2+32x-15 &= 0 \quad |:(-16) \\
x^2-2x+\frac{15}{16} &= 0 \\
x_{1/2} &= 1\pm\sqrt{1-\frac{15}{16}} \\
&= 1\pm\frac{1}{4} \\
x_1=\frac{3}{4} & \qquad x_2=\frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Nach Vieta lässt sich ein Quadratischer Term schreiben als:

$$ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$$

wobei x_1 und x_2 die Nullstellen des Terms sind und a der Vorfaktor von x^2. Wir wenden das auf unseren zu untersuchenden Nenner an:

$$-16x^2+32x-15=-16\cdot\left(x-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(x+\frac{5}{4}\right)$$

Die in der Zerlegung enthaltenen Brüche sind unbefriedigend. Zerlegt man die -16 vor den beiden Klammern in $-4 \cdot 4$, dann kann je eine der beiden Vieren in die beiden Klammern hineinmultipliziert werden. Man erhält dann:

$$-16x^2 + 32x - 15 = -(4x-3) \cdot (4x-5)$$

Die Zerlegung nach Variante 2 passt besser zu den anderen Nennern, als Variante 1. In Variante 1 kann jedoch aus dem zweiten Term (-1) ausgeklammert werden. Wir erhalten damit folgende Nenneranalyse:

$$\begin{array}{rcrrr|l}
4x-3 & = & & & (4x-3) & EF = -1 \cdot (4x-5) = -4x+5 \\
4x-5 & = & & \cdot(4x-5) & & EF = -1 \cdot (4x-3) = -4x+3 \\
32x-16x^2-15 & = & -1 & \cdot(4x-5) & \cdot(4x-3) & EF = 1 \\
\hline
HN & = & -1 & \cdot(4x-5) & \cdot(4x-3) &
\end{array}$$

Hieraus ergibt sich der Definitionsbereich:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0,75; 1,25\}$$

b: Lösung

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{5x-17}{4x-3} + \dfrac{7(x-4)}{4x-5} - \dfrac{12(10x+73)}{32x-16x^2-15} & = & 3 \quad | \cdot HN \\
(5x-17)(-4x+5) + 7(x-4)(-4x+3) - 12(10x+73) & = & 3(-1)(4x-5)(4x-3) \\
(-20x^2+93x-85) + 7(-4x^2+19x-12) - (120x+876) & = & -3(16x^2-32x+15) \\
-20x^2+93x-85-28x^2+133x-84-120x-876 & = & -3(16x^2-32x+15) \\
-48x^2+106x-1045 & = & -48x^2+96x-45 \\
10x & = & 1000 \\
x & = & 100 \\
L & = & \{100\}
\end{array}$$

Aufgabe 17

$$\frac{2x+5}{2x-4}+\frac{6x+5}{3x+6}=\frac{3x^2-2x+5}{x^2-4}$$

a: Nenneranalyse

In den ersten beiden Nennern kann ausgeklammert werden, dem dritten Nenner liegt die dritte Binomische Formel zugrunde.

$$\begin{array}{rcllll|l}
2x-4 & = & 2 & & \cdot(x-2) & & EF = 3\cdot(x+2) = 3x+6 \\
3x+6 & = & & 3 & & \cdot(x+2) & EF = 2\cdot(x-2) = 2x-4 \\
x^2-4 & = & & & (x-2) & \cdot(x+2) & EF = 2\cdot 3 = 6 \\
\hline
HN & = & 2 & \cdot 3 & \cdot(x-2) & \cdot(x+2) &
\end{array}$$

Hieraus ergibt sich der Definitionsbereich:

$$D=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$$

b: Lösung

$$\begin{aligned}
\frac{2x+5}{2x-4}+\frac{6x+5}{3x+6} &= \frac{3x^2-2x+5}{x^2-4} \quad |\cdot HN \\
(2x+5)(3x+6)+(6x+5)(2x-4) &= (3x^2-2x+5)\cdot 6 \\
6x^2+12x+15x+30+12x^2-24x+10x-20 &= 18x^2-12x+30 \\
18x^2+13x+10 &= 18x^2-12x+30 \quad |-18x^2 \\
13x+10 &= -12x+30 \quad |+12x-10 \\
25x &= 20 \quad |:25 \\
x &= 0,8 \\
L &= \{0,8\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 18

$$\frac{3x-5}{x+2}+\frac{7x-10}{x+1}=10-\frac{x+99}{x^2+3x+2}$$

a: Nenneranalyse

In den ersten beiden Nennern kann sicher nichts mehr faktorisiert werden. Es geht nichts auszuklammern und x kommt auch nur ohne Quadrat vor. Der dritte Nenner könnte aber zerlegt werden, da ein x^2 vorkommt. Da Ausklammern nicht geht und auch kein Binomischer Term erkennbar ist, kommt nur eine Polynomdivision oder eine Zerlegung nach Vieta in Frage. Man kann auch auf gut Glück probieren, ob das Produkt der ersten beiden Nenner den dritten Nenner ergibt:

$$(x+2)(x+1)=x^2+x+2x+2=x^2+3x+2$$

Das war in diesem Fall erfolgreich. Aber auch beide anderen Verfahren hätten zu diesem Ergebnis geführt.

$$\begin{array}{rcll|l} x+2 & = & (x+2) & & EF=x+1 \\ x+1 & = & & (x+1) & EF=x+2 \\ x^2+3x+2 & = & (x+2) & \cdot(x+1) & EF=1 \\ \hline HN & = & (x+2) & \cdot(x+1) & \end{array}$$

Hieraus ergibt sich der Definitionsbereich:

$$D=\mathbb{R}\setminus\{-2;-1\}$$

b: Lösung

$$\begin{array}{rcl} \frac{3x-5}{x+2}+\frac{7x-10}{x+1} & = & 10-\frac{x+99}{x^2+3x+2} \quad |\cdot HN \\ (3x-5)(x+1)+(7x-10)(x+2) & = & 10(x^2+3x+2)-(x+99) \\ 3x^2+3x-5x-5+7x^2+14x-10x-20 & = & 10x^2+30x+20-x-99 \\ 10x^2+2x-25 & = & 10x^2+29x-79 \quad |-10x^2 \\ 2x-25 & = & 29x-79 \quad |-29x+25 \\ -27x & = & -54 \quad |:(-2) \\ x & = & 2 \\ L & = & \{2\} \end{array}$$

Aufgabe 19

$$\frac{x}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} = \frac{2}{5x-x^2-6}$$

a: Nenneranalyse

In den ersten beiden Nennern kann sicher nichts mehr faktorisiert werden. Es geht nichts auszuklammern und x kommt auch nur ohne Quadrat vor. Der dritte Nenner könnte aber zerlegt werden, da ein x^2 vorkommt. Da Ausklammern nicht geht und auch kein Binomischer Term erkennbar ist, kommt nur eine Polynomdivision oder eine Zerlegung nach Vieta in Frage. Man kann auch auf gut Glück probieren, ob das Produkt der ersten beiden Nenner den dritten Nenner ergibt:

$$(x-2)(x-3) = x^2 - 3x - 2x + 2 = x^2 - 5x + 6$$

Das war in diesem Fall nicht ganz erfolgreich. Schaut man sich das Ergebnis jedoch genauer an, dann kann man erkennen, dass Nenner 3 genau **das Negative** dieses Ergebnisses ist. Der Faktor (-1) kommt also bei der Zerlegung noch dazu. Aber auch beide anderen Verfahren hätten zu diesem Ergebnis geführt.

$$\begin{array}{rcccc|l}
x-2 & = & & (x-2) & & EF = -1\cdot(x-3) = -x+3 \\
x-3 & = & & & (x-3) & EF = -1\cdot(x-2) = -x+2 \\
5x-x^2-6 & = & -1 & \cdot(x-2) & \cdot(x-3) & EF = 1 \\
\hline
HN & = & -1 & \cdot(x-2) & \cdot(x-3) &
\end{array}$$

Hieraus ergibt sich der Definitionsbereich:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$$

b: Lösung

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} &= \frac{2}{5x-x^2-6} \quad |\cdot HN \\
x\cdot(-x+3) - (x-2)\cdot(-x+2) &= 2 \\
-x^2 + 3x - (-x^2 + 2x + 2x - 4) &= 2 \\
-x^2 + 3x + x^2 - 2x - 2x + 4 &= 2 \\
-x + 4 &= 2 \quad |-4 \\
-x &= -2 \quad |:(-1) \\
x &= 2
\end{aligned}$$

Aber aufgepasst! Diese Lösung gehört **ausdrücklich nicht** zur Definitionsmenge! Die Lösungsmenge ist also leer.

$$D = \{\ \}$$

Aufgabe 20

$$\frac{3x+7}{4x-20}+\frac{4x-3}{25-5x}-\frac{11-7x}{2x-10}=-10\frac{13}{20}$$

Sinnvollerweise verwandelt man zunächst die gemischte Zahl $10\frac{13}{20}$ in einen reinen Bruch.

$$\frac{3x+7}{4x-20}+\frac{4x-3}{25-5x}-\frac{11-7x}{2x-10}=-\frac{213}{20}$$

a: Nenneranalyse

$$\begin{array}{rcrrrr|l}
4x-20 & = & & 2^2 & & \cdot(x-5) & HN=-1\cdot 5=-5 \\
25-5x & = & -1 & & \cdot 5 & \cdot(x-5) & HN=2^2=4 \\
2x-10 & = & & 2 & & \cdot(x-5) & HN=-1\cdot 2\cdot 5=-10 \\
20 & = & & 2^2 & \cdot 5 & & HN=-1\cdot(x-5)=-x+5 \\
\hline
HN & = & -1 & \cdot 2^2 & \cdot 5 & \cdot(x-5) &
\end{array}$$

$$D=\mathbb{R}\setminus\{5\}$$

b: Lösung

$$\begin{array}{rcl}
\frac{3x+7}{4x-20}+\frac{4x-3}{25-5x}-\frac{11-7x}{2x-10} & = & -\frac{213}{20} \quad |\cdot HN \\
(3x+7)(-5)+(4x-3)\cdot 4-(11-7x)\cdot(-10) & = & -213\cdot(-x+5) \\
-15x-35+16x-12-(-110+70x) & = & 213x-1065 \\
-15x-35+16x-12+110-70x & = & 213x-1065 \\
-69x+63 & = & 213x-1065 \quad |-213x-63 \\
-282x & = & -1128 \quad |:(-282) \\
x & = & 4 \\
L & = & \{4\}
\end{array}$$

Aufgabe 21

$$\frac{2x+1}{x^2+x-56} = \frac{1}{x-7}$$

a: Nenneranalyse

Der zweite Nenner ist offensichtlich nicht weiter zerlegbar. Im ersten Nenner ist eine mögliche Zerlegung nicht direkt erkennbar. Es gibt aber nur dann eine Vereinfachung, wenn ein bekannter Term – also der andere Nenner – darin enthalten ist. Daher probiere ich eine Polynomdivision aus:

$$\begin{array}{rrrcccc}
(x^2 & +x & -56) & : & (x-7) & = & x+8 \\
-(x^2 & -7x) & & & & & \\
\hline
 & 8x & -56 & & & & \\
- & (8x & -56) & & & & \\
\hline
 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Die Division ist aufgegangen. Wir erhalten also die Zerlegung:

$$\begin{array}{rcll|l}
x^2+x-56 & = & (x-7) & \cdot(x+8) & EF = 1 \\
x-7 & = & (x-7) & & EF = x-8 \\
\hline
HN & = & (x-7) & \cdot(x+8) &
\end{array}$$

Hieraus ergibt sich der Definitionsbereich:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-8; 7\}$$

b: Lösung

$$\begin{array}{rcl}
(2x+1)\cdot 1 & = & 1\cdot(x+8) \\
2x+1 & = & x+8 \quad |-x-1 \\
x & = & 7
\end{array}$$

Aber aufgepasst! Diese Lösung gehört **ausdrücklich nicht** zur Definitionsmenge! Die Lösungsmenge ist also leer.

$$D = \{\ \}$$

Aufgabe 22

$$\frac{6x^2-10x+6}{2x^3-13x^2+17x+12}-\frac{1}{x-3}-\frac{2x}{x^2-7x+12}=0$$

a: Nenneranalyse

Der zweite Nenner ist nicht zerlegbar. Beim ersten und dritten Nenner ist weder ein Ausklammern noch eine Zerlegung mit Binomischer Formel möglich. Daher liegt es nahe zu prüfen, ob der zweite Nenner in den anderen Nennern enthalten ist. Ein Blick auf die absoluten Glieder der Nenner (sowohl 12 aus dem ersten Nenner als auch 12 aus dem dritten Nenner sind durch 3 aus dem zweiten Nenner teilbar) lässt auf Erfolg hoffen. Da Nenner drei einfacher ist, beginne ich hier.

$$\begin{array}{rrrcccl}
(x^2 & -7x & +12) & : & (x-3) & = & x-4\\
-(x^2 & -3x) & & & & & \\
\hline
 & -4x & +12 & & & & \\
- & (-4x & +12) & & & & \\
\hline
 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Damit ist die Zerlegung für Nenner drei bekannt:

$$x^2-7x+12=(x-3)\cdot(x-4)$$

Das gleiche versuchen wir nun mit dem ersten Nenner:

$$\begin{array}{rrrrcccl}
(2x^3 & -13x^2 & +17x & +12) & : & (x-3) & = & 2x^2-7x-4\\
-(2x^3 & -6x^2) & & & & & & \\
\hline
 & -7x^2 & +17x & +12 & & & & \\
- & (-7x^2 & +21x) & & & & & \\
\hline
 & & -4x & +12 & & & & \\
 & - & (-4x & +12) & & & & \\
\hline
 & & & 0 & & & &
\end{array}$$

Der Ergebnisterm sollte weiter zerlegbar sein. Sein absolutes Glied lässt vermuten, dass er durch den Term $(x-4)$ aus der Zerlegung des dritten Nenners teilbar ist.

$$\begin{array}{rrrcccl}
(2x^2 & -7x & -4) & : & (x-4) & = & 2x+1\\
-(2x^2 & -8x) & & & & & \\
\hline
 & x & -4 & & & & \\
- & (x & -4) & & & & \\
\hline
 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Mit diesen Ergebnissen stellt sich die Nennerzerlegung folgendermaßen dar:

$$\begin{array}{rclll|l}
2x^3-13x^2+17x+12 & = & (x-3) & \cdot(x-4) & \cdot(2x+1) & EF=1\\
x-3 & = & (x-3) & & & EF=(x-4)(2x+1)=2x^2-7x-4\\
x^2-7x+12 & = & (x-3) & \cdot(x-4) & & EF=2x+1\\
\hline
HN & = & (x-3) & \cdot(x-4) & \cdot(2x+1) &
\end{array}$$

Hieraus ergibt sich der Definitionsbereich:

$$D=\mathbb{R}\setminus\{-0,5;3;4\}$$

b: Lösung

$$
\begin{aligned}
\frac{6x^2-10x+6}{2x^3-13x^2+17x+12}-\frac{1}{x-3}-\frac{2x}{x^2-7x+12} &= 0 \quad | \cdot HN \\
(6x^2-10x+6)-(2x^2-7x-4)-2x(2x+1) &= 0 \\
6x^2-10x+6-2x^2+7x+4-(4x^2+2x) &= 0 \\
6x^2-10x+6-2x^2+7x+4-4x^2-2x &= 0 \\
-5x+10 &= 0 \quad | -10 \\
-5x &= -10 \quad | : (-5) \\
x &= 2 \\
L &= \{2\}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 23

$$\frac{5x+2}{x^2-3x-10} = \frac{x-2}{x^2-x-6} - \frac{x+1}{x^2-8x+15}$$

a: Nenneranalyse

Alle Nenner stellen Quadratische Terme dar, die nicht durch Ausklammern oder durch Anwenden einer Binomischen Formel zerlegbar sind. Daher zerlege ich alle mit Hilfe des Satzes von Vieta.

<u>**Nenner 1:**</u>

$$\begin{aligned}
x^2 - 3x - 10 &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{40}{4}} \\
&= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} \\
&= \frac{3}{2} \pm \frac{7}{2} \\
x_1 = -2 &\qquad x_2 = 5
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die Faktorisierung:

$$x^2 - 3x - 10 = (x+2) \cdot (x-5)$$

<u>**Nenner 2:**</u>

$$\begin{aligned}
x^2 - x - 6 &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} \\
&= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \\
&= \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \\
x_1 = -2 &\qquad x_2 = 3
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die Faktorisierung:

$$x^2 - x - 6 = (x+2) \cdot (x-3)$$

<u>**Nenner 3:**</u>

$$\begin{aligned}
x^2 - 8x + 15 &= 0 \\
x_{1/2} &= 4 \pm \sqrt{16-15} \\
&= 4 \pm 1 \\
x_1 = 3 &\qquad x_2 = 5
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die Faktorisierung:

$$x^2 - 8x + 15 = (x-3)\cdot(x-5)$$

Die komplette Nenneranalyse sieht damit wie folgt aus:

$$\begin{array}{rcllll|l}
x^2-3x-10 & = & (x+2) & & \cdot(x-5) & EF = x-3 \\
x^2-x-6 & = & (x+2) & \cdot(x-3) & & EF = x-5 \\
x^2-8x+15 & = & & (x-3) & \cdot(x-5) & EF = x+2 \\
\hline
HN & = & (x+2) & \cdot(x-3) & \cdot(x-5) &
\end{array}$$

Hieraus ergibt sich der Definitionsbereich:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3; 5\}$$

b: Lösung

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{5x+2}{x^2-3x-10} & = & \dfrac{x-2}{x^2-x-6} - \dfrac{x+1}{x^2-8x+15} \quad | \cdot HN \\
(5x+2)(x-3) & = & (x-2)(x-5) - (x+1)(x+2) \\
5x^2 - 15x + 2x - 6 & = & x^2 - 5x - 2x + 10 - x^2 - 2x - x - 2 \\
5x^2 - 13x - 6 & = & -10x + 8 \quad | + 10x - 8 \\
5x^2 - 3x - 14 & = & 0 \quad | : 5 \\
x^2 - \dfrac{3}{5}x - \dfrac{14}{5} & = & 0 \\
x_{1/2} & = & \dfrac{3}{10} \pm \sqrt{\dfrac{9}{100} + \dfrac{280}{100}} \\
 & = & \dfrac{3}{10} \pm \sqrt{\dfrac{289}{100}} \\
 & = & \dfrac{3}{10} \pm \dfrac{17}{10} \\
x_1 = 2 & & x_2 = -1,4 \\
L & = & \{2; -1,4\}
\end{array}$$

Aufgabe 24

$$\frac{x-7}{x^2-4x+3} - \frac{x-8}{x^2-6x+5} = \frac{4x+1}{x^3-9x^2+23x-15}$$

a: Nenneranalyse

Die ersten beiden Nenner stellen Quadratische Terme dar, die nicht durch Ausklammern oder durch Anwenden einer Binomischen Formel zerlegbar sind. Das gleiche gilt auch für den dritten Nenner, der einen Kubischen Term darstellt. Daher zerlege ich die ersten beiden mit Hilfe des Satzes von Vieta.

<u>**Nenner 1:**</u>

$$\begin{aligned} x^2-4x+3 &= 0 \\ x_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{4-3} \\ &= 2 \pm 1 \\ x_1 = 1 \quad & \quad x_2 = 3 \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die Faktorisierung:

$$x^2-4x+3 = (x-1)\cdot(x-3)$$

<u>**Nenner 2:**</u>

$$\begin{aligned} x^2-6x+5 &= 0 \\ x_{1/2} &= 3 \pm \sqrt{9-5} \\ &= 3 \pm 2 \\ x_1 = 1 \quad & \quad x_2 = 5 \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die Faktorisierung:

$$x^2-6x+5 = (x-1)\cdot(x-5)$$

<u>**Nenner 3:**</u> Für diesen Nenner kommt nur eine Polynomdivision zur Faktorisierung in Frage. Bisher haben wir diese drei Terme in den anderen Nennern gefunden:

- $(x-1)$
- $(x-3)$
- $(x-5)$

Nach Analyse des absoluten Gliedes aus Nenner drei könnte jeder dieser Nenner ein Teiler sein. Ich wähle willkürlich den Term $(x-1)$ aus und probiere, ob Nenner drei dadurch teilbar ist.

$$\begin{array}{rrrrl}
(x^3 & -9x^2 & +23x & -15) & : \ (x-1) \ = \ x^2-8x+15 \\
-(x^3 & -x^2) & & & \\ \hline
 & -8x^2 & +23x & -15 & \\
- & (-8x^2 & +8x) & & \\ \hline
 & & 15x & -15 & \\
 & - & (15x & -15) & \\ \hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

Der Ergebnisterm sollte weiter zerlegbar sein. Sein absolutes Glied lässt vermuten, dass er durch den Term $(x-3)$ aus der Zerlegung des ersten Nenners teilbar ist.

$$\begin{array}{rrrl}
(x^2 & -8x & +15) & : \ (x-3) \ = \ x-5 \\
-(x^2 & -3x) & & \\ \hline
 & -5x & +15 & \\
- & (-5x & +15) & \\ \hline
 & & 0 &
\end{array}$$

Mit diesen Ergebnissen stellt sich die Nennerzerlegung folgendermaßen dar:

$$\begin{array}{rclll|l}
x^2-4x+3 & = & (x-1) & \cdot(x-3) & & EF = x-5 \\
x^2-6x+5 & = & (x-1) & & \cdot(x-5) & EF = x-3 \\
x^3-9x^2+23x-15 & = & (x-1) & \cdot(x-3) & \cdot(x-5) & EF = 1 \\ \hline
HN & = & (x-1) & \cdot(x-3) & \cdot(x-5) &
\end{array}$$

Hieraus ergibt sich der Definitionsbereich:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1;3;5\}$$

b: Lösung

$$\begin{aligned}
\frac{x-7}{x^2-4x+3} - \frac{x-8}{x^2-6x+5} &= \frac{4x+1}{x^3-9x^2+23x-15} \quad | \cdot HN \\
(x-7)(x-5)-(x-8)(x-3) &= 4x+1 \\
x^2-5x-7x+35-(x^2-3x-8x+24) &= 4x+1 \\
x^2-5x-7x+35-x^2+3x+8x-24 &= 4x+1 \\
-x+11 &= 4x+1 \quad | -4x-11 \\
-5x &= -10 \quad | : (-5) \\
x &= 2 \\
L &= \{2\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 25

$$\frac{3}{2x-4} = \frac{8x}{2x^2-10x+12} - \frac{5x^2-19}{2x^3-8x^2+2x+12}$$

a: Nenneranalyse

In jedem Nenner kann eine 2 ausgeklammert werden.

$$\begin{array}{rcllll}
2x-4 & = & 2 & \cdot(x-2) & & \\
2x^2-10x+12 & = & 2 & & \cdot(x^2-5x+6) & \\
2x^3-8x^2+2x+12 & = & 2 & & & \cdot(x^3-4x^2+x+6) \\
\hline
\end{array}$$

Der erste Nenner ist damit komplett zerlegt. Nach Untersuchung der absoluten Glieder ist eine gewisse Warscheinlichkeit gegeben, dass der Restterm des zweiten Nenners durch den ersten Restterm teilbar ist. Wir probieren das aus:

$$\begin{array}{rrrcccl}
(x^2 & -5x & +6) & : & (x-2) & = & x-3 \\
-(x^2 & -2x) & & & & & \\
\hline
 & -3x & +6 & & & & \\
- & (-3x & +6) & & & & \\
\hline
 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Damit ist die Zerlegung für Nenner zwei bekannt:

$$2x^2-10x+12 = 2\cdot(x-2)\cdot(x-3)$$

Auch der Restterm des dritten Nenners sollte noch weiter zerlegbar sein. Ich versuche auch hier eine Division durch $(x-2)$, die absoluten Glieder legen dies nahe.

$$\begin{array}{rrrrcccl}
(x^3 & -4x^2 & +x & +6) & : & (x-2) & = & x^2-2x-3 \\
-(x^3 & -2x^2) & & & & & & \\
\hline
 & -2x^2 & +x & +6 & & & & \\
- & (-2x^2 & +4x) & & & & & \\
\hline
 & & -3x & +6 & & & & \\
 & - & (-3x & +6) & & & & \\
\hline
 & & & 0 & & & &
\end{array}$$

Das Ergebnis sollte noch weiter zerlegbar sein. Da es uns nur nützt, wenn einer der bereits bekannten Terme $(x-2)$ oder $(x-3)$ darin enthalten ist, nehmen wir diese in Augenschein. Der Term $(x-2)$ kommt wegen des absoluten Gliedes nicht in Frage, bleibt also nur noch $(x-3)$. Das versuchen wir.

$$\begin{array}{rrrcccl}
(x^2 & -2x & -3) & : & (x-3) & = & x+1 \\
-(x^2 & -3x) & & & & & \\
\hline
 & x & -3 & & & & \\
 & -(x & -3) & & & & \\
\hline
 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Damit können wir die endgültige Zerlegung vornehmen.

$$\begin{array}{rcllll|l}
2x-4 & = & 2 & \cdot(x-2) & & & EF=(x-3)(x+1) \\
2x^2-10x+12 & = & 2 & \cdot(x-2) & \cdot(x-3) & & EF=x+1 \\
2x^3-8x^2+2x+12 & = & 2 & \cdot(x-2) & \cdot(x-3) & \cdot(x+1) & EF=1 \\
\hline
HN & = & 2 & \cdot(x-2) & \cdot(x-3) & \cdot(x+1) &
\end{array}$$

Hieraus ergibt sich der Definitionsbereich:

$$D=\mathbb{R}\setminus\{-1;2;3\}$$

b: Lösung

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2x-4} &= \frac{8x}{2x^2-10x+12}-\frac{5x^2-19}{2x^3-8x^2+2x+12} \quad |\cdot HN \\
3\cdot(x-3)(x+1) &= 8x\cdot(x+1)-(5x^2-19) \\
(3x-9)(x+1) &= 8x^2+8x-5x^2+19 \\
3x^2+3x-9x-9 &= 3x^2+8x+19 \quad |-3x^2 \\
-6x-9 &= 8x+19 \quad |-8x+9 \\
-14x &= 28 \quad |:(-14) \\
x &= -2 \\
L &= \{-2\}
\end{aligned}$$