Betrags-Gleichungen und -Ungleichungen

W. Kippels

28. November 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen zu Beträgen

Der Betrag von a – geschrieben als $|a|$ – ist stets eine positive Zahl. Ist a positiv oder gleich 0, dann ist $|a| = a$. Ist a negativ, dann muss beim Auflösen des Betrages das Vorzeichen umgekehrt werden: $|a| = -a$. Die korrekte Definition lautet:

$$\underline{\textbf{Def.:}} \qquad |a| = \left\{ \begin{array}{rl} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{array} \right\}$$

Was hat das für eine praktische Bedeutung?

1.1 Gleichungen mit Beträgen

Als Beispiel wollen wir eine Gleichung mit einem Betrag lösen.

$$|x-2| = 3$$

Zunächst muss – wie bei allen Gleichungen immer – der Definitionsbereich bestimmt werden. Da es hier keine Einschränkungen durch Brüche, Wurzeln oder ähnliches gibt, gilt einfach nur: $\boxed{D = \mathbb{R}}$

Um weiterrechnen zu können, muss der Betrag aufgelöst werden. Da ja für x jede Zahl aus $\mathbb{R}$ in Frage kommt, kann man nicht sagen, ob der Inhalt des Betrages positiv oder negativ ist. Daher muss man sich einer Methode bedienen, die wir schon bei Ungleichungen[1] kennen gelernt haben. Wir machen eine ***Fallunterscheidung***. Die beiden Fälle unterscheiden sich dadurch, dass der *Betragsinhalt* positiv oder negativ ist. Um zu sehen, was in welchem Bereich vorliegt, berechne ich in einer Nebenrechnung, wo der Inhalt größer oder gleich 0 ist.

$$\begin{array}{rcll} x-2 & \geq & 0 & |+2 \\ x & \geq & 2 & \end{array}$$

Im Bereich mit $x \geq 2$ ist demnach der Inhalt des Betrages positiv oder gleich 0, die Betragsstriche können dann einfach weggelassen werden. Dieser Bereich stellt in unserer Rechnung den **ersten** Fall dar. Der **zweite** Fall beinhaltet dann alle anderen Reellen Zahlen, also $x < 2$. Mit diesen beiden Fällen führen wir die weitere Rechnung durch.

$$|x-2| = 3$$

$$\begin{array}{rcll} \multicolumn{4}{c}{\underline{\text{für } x \geq 2:}} \\ x-2 & = & 3 & |+2 \\ x & = & 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} \multicolumn{4}{c}{\underline{\text{für } x < 2:}} \\ -(x-2) & = & 3 & \\ -x+2 & = & 3 & |-2 \\ -x & = & 1 & |:(-1) \\ x & = & -1 & \end{array}$$

[1]Einzelheiten siehe hier: http://www.dk4ek.de/mathematik/ungleich.pdf

Natürlich muss man vor Bestimmung der Lösungsmenge prüfen, ob die gefundenen Werte innerhalb der jeweils untersuchten Bereiche liegen. Da $5 \geq 2$ und $-1 < 2$ ist, ist das in diesem Beispiel gegeben. Die Lösungsmenge der Gleichung lautet also:

$$\boxed{L = \{5; -1\}}$$

Mit Hilfe einer Probe kann man schnell prüfen, dass diese beiden Lösungen tatsächlich die Gleichung erfüllen. Vorrechnen möchte ich das an dieser Stelle aber nicht.

1.2 Ungleichungen mit Beträgen

Wie bei Gleichungen kann man natürlich auch bei Ungleichungen mit Beträgen rechnen. Die Verfahren sind entsprechend. Ein Beispiel:

$$|2x - 6| \leq x$$

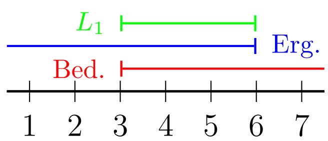
Als erstes bestimmt man immer die Definitionsmenge. Hier gibt es jedoch keinerlei Einschränkungen für x, es gilt also: $\boxed{D = \mathbb{R}}$

In diesem Beispiel ist der Betragsinhalt positiv oder Null für $x \geq 3$, wie man leicht mit Hilfe des Ansatzes $2x - 6 \geq 0$ bestimmen kann. Negativ ist dann der Betragsinhalt für $x < 3$. Das sind demnach die beiden Fälle für unsere Fallunterscheidung.

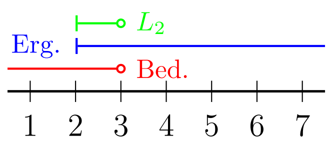
$$|2x - 6| \leq x$$

$$\begin{array}{rcll} & \underline{\text{für } x \geq 3:} & & \\ 2x - 6 & \leq & x & | + 6 \\ 2x & \leq & x + 6 & | - x \\ x & \leq & 6 & \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} & \underline{\text{für } x < 3:} & & \\ -(2x - 6) & \leq & x & \\ -2x + 6 & \leq & x & | - 6 \\ -2x & \leq & x - 6 & | - x \\ -3x & \leq & -6 & | : (-3) \\ x & \geq & 2 & \end{array}$$

Wie von Ungleichungen[2] gewohnt, möchte ich auch hier die Lösungsmengenbestimmung mit graphischer Unterstützung am Zahlenstrahl durchführen. Dabei wird die Bedingung, unter der gerechnet wurde, mit dem Ergebnisterm übereinandergelegt. Dort, wo sie übereinstimmen, liegt die zugehörige Teillösungsmenge.

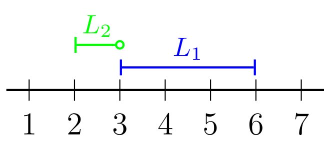


$L_1 = \{x | 3 \leq x \leq 6\}$



$L_2 = \{x | 2 \leq x < 3\}$

Die beiden Teillösungsmengen L_1 und L_2 können aneinander gelegt werden. Bei der Zahl 3 stoßen sie „nahtlos“ aneinander an. Die „3“ gehört zwar nicht mehr zur Menge L_2, aber in L_1 ist sie enthalten. Daher können sie zu einer einzigen Menge zusammengefasst werden, wie nachfolgend dargestellt:



$$\boxed{L = \{x | 2 \leq x \leq 6\}}$$

[2] Einzelheiten siehe hier: http://www.dk4ek.de/mathematik/ungleich.pdf

2 Übungsaufgaben

Von den nachfolgenden Ungleichungen soll die Lösungsmenge bestimmt werden. Vorher muss auch jeweils die Definitionsmenge bestimmt werden.

2.1 Gleichungen mit Beträgen

2.1.1 Aufgabe 1

$$|2x + 5| = 7$$

2.1.2 Aufgabe 2

$$x + |x - 1| = 3$$

2.1.3 Aufgabe 3

$$|3x - 5| + 2x = 10$$

2.1.4 Aufgabe 4

$$2x - |3 - x| = 18$$

2.1.5 Aufgabe 5

$$2x + |2x + 4| = -4$$

2.1.6 Aufgabe 6

$$|3x + 6| - 2x = -5$$

2.1.7 Aufgabe 7

$$|2x - 6| + 2 = x + 5$$

2.1.8 Aufgabe 8

$$5 \cdot |x - 3| + 3x = -1$$

2.1.9 Aufgabe 9

$$3x + 5 - |2x + 4| = x + 1$$

2.1.10 Aufgabe 10

$$\frac{|3x - 3|}{x + 1} = 1$$

2.1.11 Aufgabe 11

$$\frac{3x-3}{|x+1|}+10=1$$

2.1.12 Aufgabe 12

$$\frac{2x-1}{|x-2|+1}=-1$$

2.1.13 Aufgabe 13

$$\frac{|x-3|}{5}=x-7$$

2.1.14 Aufgabe 14

$$\frac{5x+5}{|3x+1|}=2$$

2.1.15 Aufgabe 15

$$\frac{8x+12}{|2x+10|}=2$$

2.1.16 Aufgabe 16

$$\frac{|x-4|}{x+2}=\frac{x-1}{x+7}$$

2.1.17 Aufgabe 17

$$\frac{x-1}{x-4}=\frac{|x-5|}{x-8}$$

2.1.18 Aufgabe 18

$$\frac{x+5}{x+1}=\frac{|x-5|}{x-2}$$

2.1.19 Aufgabe 19

$$|x+1|+5=|2x-4|$$

2.1.20 Aufgabe 20

$$4-|4x+6|+|2x-2|=0$$

2.1.21 Aufgabe 21

$$|2x + 8| + 6 = |2x - 6|$$

2.1.22 Aufgabe 22

$$|x - 3| - |x - 5| = 2$$

2.1.23 Aufgabe 23

$$|2x + 3| - 20 = |3x - 12|$$

2.1.24 Aufgabe 24

$$|x - 1| + |x + 5| = 6$$

2.1.25 Aufgabe 25

$$\Big||x - 2| - 2\Big| = 1$$

2.1.26 Aufgabe 26

$$\Big||x - 1| - 4\Big| = 4$$

2.1.27 Aufgabe 27

$$\Big||x + 3| - 1\Big| = 2$$

2.1.28 Aufgabe 28

$$\Big||2x - 8| - 3x\Big| = 4$$

2.2 Ungleichungen mit Beträgen

2.2.1 Aufgabe 1

$$2 + |x + 3| < 3$$

2.2.2 Aufgabe 2

$$x - |2x - 12| \geq 0$$

2.2.3 Aufgabe 3

$$5 - 3 \cdot |x - 6| \leq 3x - 7$$

2.2.4 Aufgabe 4

$$2 \cdot |x - 1| > 8$$

2.2.5 Aufgabe 5

$$|x + 1| - |2x - 6| \leq 10$$

2.2.6 Aufgabe 6

$$||x - 5| - 3| \leq 4$$

2.2.7 Aufgabe 7

$$x - |2x + 4| > 1 - |x - 2|$$

3 Lösungen der Aufgaben

3.1 Gleichungen mit Beträgen

3.1.1 Aufgabe 1

$$|2x+5| = 7 \qquad D = \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{rcll} \multicolumn{4}{c}{\underline{\text{für } x \geq -2,5:}} \\ 2x+5 &=& 7 & \mid -5 \\ 2x &=& 2 & \mid :2 \\ x &=& 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} \multicolumn{4}{c}{\underline{\text{für } x < -2,5:}} \\ -(2x+5) &=& 7 & \\ -2x-5 &=& 7 & \mid +5 \\ -2x &=& 12 & \mid :(-2) \\ x &=& -6 & \end{array}$$

Beide Ergebnisse liegen jeweils **innerhalb** des untersuchten Bereiches, es gibt 2 Zahlen in der Lösungsmenge.

$$\boxed{L = \{1; -6\}}$$

3.1.2 Aufgabe 2

$$x + |x-1| = 3 \qquad D = \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{rcll} \multicolumn{4}{c}{\underline{\text{für } x \geq 1:}} \\ x+x-1 &=& 3 & \\ 2x-1 &=& 3 & \mid +1 \\ 2x &=& 4 & \mid :2 \\ x &=& 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} \multicolumn{4}{c}{\underline{\text{für } x < 1:}} \\ x-(x-1) &=& 3 & \\ x-x+1 &=& 3 & \\ 1 &=& 3 & \text{(Falsche Aussage)} \end{array}$$

Der rechte Fall hat keine Lösung, da er auf eine **falsche Aussage** führt. Das Ergebnis des linken Falles liegt **innerhalb** des untersuchten Bereiches, es gibt also insgesamt nur eine Zahl in der Lösungsmenge.

$$\boxed{L = \{2\}}$$

3.1.3 Aufgabe 3

$$|3x-5| + 2x = 10 \qquad D = \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{rcll} \multicolumn{4}{c}{\underline{\text{für } x \geq \frac{5}{3}:}} \\ 3x-5+2x &=& 10 & \\ 5x-5 &=& 10 & \mid +5 \\ 5x &=& 15 & \mid :5 \\ x &=& 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} \multicolumn{4}{c}{\underline{\text{für } x < \frac{5}{3}:}} \\ -3x+5+2x &=& 10 & \\ -x+5 &=& 10 & \mid -5 \\ -x &=& 5 & \mid \cdot(-1) \\ x &=& -5 & \end{array}$$

Beide Ergebnisse liegen jeweils **innerhalb** des untersuchten Bereiches, es gibt 2 Zahlen in der Lösungsmenge.

$$\boxed{L = \{3; -5\}}$$

3.1.4 Aufgabe 4

$$2x - |3 - x| = 18 \qquad D = \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{rcll} \multicolumn{4}{c}{\underline{\text{für } x \leq 3:}} \\ 2x - (3 - x) & = & 18 & \\ 2x - 3 + x & = & 18 & | + 3 \\ 3x & = & 21 & | : 3 \\ x & = & 7 & \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} \multicolumn{4}{c}{\underline{\text{für } x > 3:}} \\ 2x - \Big(-(3 - x)\Big) & = & 18 & \\ 2x + 3 - x & = & 18 & \\ x + 3 & = & 18 & | - 3 \\ x & = & 15 & \end{array}$$

Nur das Ergebnis des **rechten** Falles liegt **innerhalb** des untersuchten Bereiches, daher gibt es nur eine Zahl in der Lösungsmenge.

$$\boxed{L = \{15\}}$$

3.1.5 Aufgabe 5

$$2x + |2x + 4| = -4 \qquad D = \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{rcll} \multicolumn{4}{c}{\underline{\text{für } x \geq -2:}} \\ 2x + 2x + 4 & = & -4 & \\ 4x + 4 & = & -4 & | - 4 \\ 4x & = & -8 & | : 4 \\ x & = & -2 & \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} \multicolumn{4}{c}{\underline{\text{für } x < -2:}} \\ 2x - (2x + 4) & = & -4 & \\ 2x - 2x - 4 & = & -4 & \\ -4 & = & -4 & \text{wahre Aussage} \end{array}$$

Das Ergebnis des **linken** Falles liegt gerade eben noch **innerhalb** des untersuchten Bereiches, im **rechten** Fall gehören **alle** Ergebnisse zur Lösungsmenge. Das kann in beschreibender Form zusammengefasst werden:

$$\boxed{L = \{x | x \leq -2\}}$$

3.1.6 Aufgabe 6

$$|3x + 6| - 2x = -5 \qquad D = \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{rcll} \multicolumn{4}{c}{\underline{\text{für } x \geq -2:}} \\ 3x + 6 - 2x & = & -5 & \\ x + 6 & = & -5 & | - 6 \\ x & = & -11 & \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} \multicolumn{4}{c}{\underline{\text{für } x < -2:}} \\ -3x - 6 - 2x & = & -5 & \\ -5x - 6 & = & -5 & | + 6 \\ -5x & = & 1 & | : (-5) \\ x & = & -0,2 & \end{array}$$

Beide Ergebnisse liegen **außerhalb** des jeweiligen untersuchten Bereiches, daher ist die Lösungsmenge **leer**.

$$\boxed{L = \{\ \}}$$

3.1.7 Aufgabe 7

$$|2x-6|+2=x+5 \qquad D=\mathbb{R}$$

$$\begin{array}{rcll} & \underline{\text{für } x \geq 3:} & & \\ 2x-6+2 & = & x+5 & \\ 2x-4 & = & x+5 & |+4-x \\ x & = & 9 & \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} & \underline{\text{für } x < 3:} & & \\ -2x+6+2 & = & x+5 & \\ -2x+8 & = & x+5 & |-8-x \\ -3x & = & -3 & |:(-3) \\ x & = & 1 & \end{array}$$

Beide Ergebnissse liegen **innerhalb** des jeweiligen untersuchten Bereiches, zur Lösungsmenge gehören demnach beide Zahlen.

$$\boxed{L=\{9;1\}}$$

3.1.8 Aufgabe 8

$$5\cdot|x-3|+3x=-1 \qquad D=\mathbb{R}$$

$$\begin{array}{rcll} & \underline{\text{für } x \geq 3:} & & \\ 5\cdot(x-3)+3x & = & -1 & \\ 5x-15+3x & = & -1 & \\ 8x-15 & = & -1 & |+15 \\ 8x & = & 14 & |:8 \\ x & = & 1,75 & \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} & \underline{\text{für } x < 3:} & & \\ 5\cdot\Big(-(x-3)\Big)+3x & = & -1 & \\ -5x+15+3x & = & -1 & \\ -2x+15 & = & -1 & |-15 \\ -2x & = & -16 & |:(-2) \\ x & = & 8 & \end{array}$$

Beide Ergebnissse liegen **nicht innerhalb** des jeweiligen untersuchten Bereiches, die Lösungsmenge ist demnach leer.

$$\boxed{L=\{\ \}}$$

3.1.9 Aufgabe 9

$$3x+5-|2x+4|=x+1 \qquad D=\mathbb{R}$$

$$\begin{array}{rcll} & \underline{\text{für } x \geq -2:} & & \\ 3x+5-(2x+4) & = & x+1 & \\ 3x+5-2x-4 & = & x+1 & \\ x+1 & = & x+1 & |-x \\ 1 & = & 1 & \text{wahre Ausage} \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} & \underline{\text{für } x < -2:} & & \\ 3x+5-\Big(-(2x+4)\Big) & = & x+1 & \\ 3x+5+2x+4 & = & x+1 & \\ 5x+9 & = & x+1 & |-9-x \\ 4x & = & -8 & |:4 \\ x & = & -2 & \end{array}$$

Im **linken** Fall gehören **alle** untersuchten Zahlen zur Lösungsmenge. Das Ergebnis des **rechten** Falles liegt gerade eben nicht mehr innerhalb des untersuchten Bereiches und entfällt daher.

$$\boxed{L=\{x|x\geq -2\}}$$

3.1.10 Aufgabe 10

$$\frac{|3x-3|}{x+1} = 1 \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\begin{array}{rcll}
 & & \underline{\text{für } x \geq 1:} & \\
\frac{3x-3}{x+1} & = & 1 & | \cdot (x+1) \\
3x-3 & = & x+1 & | + 3 - x \\
2x & = & 4 & | : 2 \\
x & = & 2 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcll}
 & & \underline{\text{für } x < 1:} & \\
-\frac{3x-3}{x+1} & = & 1 & | \cdot (x+1) \\
-3x+3 & = & x+1 & | - 3 - x \\
-4x & = & -2 & | : (-4) \\
x & = & \frac{1}{2} &
\end{array}$$

Beide Ergebnissse liegen **innerhalb** des jeweiligen untersuchten Bereiches, zur Lösungsmenge gehören demnach beide Zahlen.

$$\boxed{L = \{2; \tfrac{1}{2}\}}$$

3.1.11 Aufgabe 11

$$\frac{3x-3}{|x+1|} + 10 = 1 \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\begin{array}{rcll}
 & & \underline{\text{für } x \geq -1:} & \\
\frac{3x-3}{x+1} + 10 & = & 1 & | - 10 \\
\frac{3x-3}{x+1} & = & -9 & | \cdot (x+1) \\
3x-3 & = & -9x-9 & | + 3 + 9x \\
12x & = & -6 & | : 12 \\
x & = & -\frac{1}{2} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcll}
 & & \underline{\text{für } x < -1:} & \\
\frac{3x-3}{-(x+1)} + 10 & = & 1 & | - 10 \\
\frac{3x-3}{-x-1} & = & -9 & | \cdot (-x-1) \\
3x-3 & = & 9x+9 & | + 3 - 9x \\
-6x & = & 12 & | : (-6) \\
x & = & -2 &
\end{array}$$

Beide Ergebnissse liegen **innerhalb** des jeweiligen untersuchten Bereiches, zur Lösungsmenge gehören demnach beide Zahlen.

$$\boxed{L = \{-\tfrac{1}{2}; -2\}}$$

3.1.12 Aufgabe 12

$$\frac{2x-1}{|x-2|+1} = -1$$

Der Nenner ist stets mindestens 1, da der Betrag nicht negativ werden kann. Daher gibt es keine Einschränkungen im Definitionsbereich:

$$D = \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{rcll} & & \underline{\text{für } x \geq 2:} & \\ \frac{2x-1}{x-2+1} & = & -1 & \\ \frac{2x-1}{x-1} & = & -1 & | \cdot (x-1) \\ 2x-1 & = & -x+1 & | +1+x \\ 3x & = & 2 & | : 3 \\ x & = & \frac{2}{3} & \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} & & \underline{\text{für } x < 2:} & \\ \frac{2x-1}{-x+2+1} & = & -1 & \\ \frac{2x-1}{-x+3} & = & -1 & | \cdot (-x+3) \\ 2x-1 & = & x-3 & | +1-x \\ x & = & -2 & \end{array}$$

Nur das Ergebnis des **rechten** Falles liegt **innerhalb** des untersuchten Bereiches, im **linken** Fall gehört das Ergebnis **nicht** zur Lösungsmenge.

$$\boxed{L = \{-2\}}$$

3.1.13 Aufgabe 13

$$\frac{|x-3|}{5} = x - 7 \qquad D = \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{rcll} & & \underline{\text{für } x \geq 3:} & \\ \frac{x-3}{5} & = & x-7 & | \cdot 5 \\ x-3 & = & 5x-35 & | +3-5x \\ -4x & = & -32 & | : (-4) \\ x & = & 8 & \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} & & \underline{\text{für } x < 3:} & \\ \frac{-x+3}{5} & = & x-7 & | \cdot 5 \\ -x+3 & = & 5x-35 & | -3-5x \\ -6x & = & -38 & | : (-6) \\ x & = & \frac{19}{3} & \\ x & \approx & 6,33 & \end{array}$$

Nur das Ergebnis des **linken** Falles liegt **innerhalb** des untersuchten Bereiches, im **rechten** Fall gehört das Ergebnis **nicht** zur Lösungsmenge.

$$\boxed{L = \{8\}}$$

3.1.14 Aufgabe 14

$$\frac{5x+5}{|3x+1|} = 2 \qquad D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$$

$$\begin{array}{rcll}
 & & \underline{\text{für } x \geq -\frac{1}{3}:} & \\
\frac{5x+5}{3x+1} & = & 2 & | \cdot (3x+1) \\
5x+5 & = & 2 \cdot (3x+1) & \\
5x+5 & = & 6x+2 & | -5-6x \\
-x & = & -3 & | \cdot (-1) \\
x & = & 3 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcll}
 & & \underline{\text{für } x < -\frac{1}{3}:} & \\
-\frac{5x+5}{3x+1} & = & 2 & | \cdot (3x+1) \\
-(5x+5) & = & 2 \cdot (3x+1) & \\
-5x-5 & = & 6x+2 & | +5-6x \\
-11x & = & 7 & | : (-11) \\
x & = & -\frac{7}{11} &
\end{array}$$

Beide Ergebnissse liegen **innerhalb** des jeweiligen untersuchten Bereiches, zur Lösungsmenge gehören demnach beide Zahlen.

$$\boxed{L = \{3; -\tfrac{7}{11}\}}$$

3.1.15 Aufgabe 15

$$\frac{8x+12}{|2x+10|} = 2 \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$$

$$\begin{array}{rcll}
 & & \underline{\text{für } x \geq -5:} & \\
\frac{8x+12}{2x+10} & = & 2 & | \cdot (2x+10) \\
8x+12 & = & 4x+20 & | -12-4x \\
4x & = & 8 & | : 4 \\
x & = & 2 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcll}
 & & \underline{\text{für } x < -5:} & \\
\frac{8x+12}{-2x-10} & = & 2 & | \cdot (-2x-10) \\
8x+12 & = & -4x-20 & | -12+4x \\
12x & = & -32 & | : 12 \\
x & = & -\frac{8}{3} \approx -2,7 &
\end{array}$$

Nur das Ergebnis des **linken** Falles liegt **innerhalb** des untersuchten Bereiches, im **rechten** Fall gehört das Ergebnis **nicht** zur Lösungsmenge.

$$\boxed{L = \{2\}}$$

3.1.16 Aufgabe 16

$$\frac{|x-4|}{x+2}=\frac{x-1}{x+7} \qquad D=\mathbb{R}\setminus\{-2;-7\}$$

Aus Platzgründen behandele ich die beiden Fälle nicht nebeneinander, sondern untereinander.

Untersuchung für $x \geq 4$:

$$\begin{aligned}
\frac{x-4}{x+2} &= \frac{x-1}{x+7} \quad |\cdot(x+2)(x+7)\\
(x-4)(x+7) &= (x-1)(x+2)\\
x^2+7x-4x-28 &= x^2+2x-x-2 \quad |-x^2\\
3x-28 &= x-2 \quad |+28-x\\
2x &= 26 \quad |:2\\
x &= 13
\end{aligned}$$

Diese Lösung liegt im untersuchten Bereich, ist also gültig. Es folgt der andere Fall:

Untersuchung für $x < 4$:

$$\begin{aligned}
\frac{-x+4}{x+2} &= \frac{x-1}{x+7} \quad |\cdot(x+2)(x+7)\\
(-x+4)(x+7) &= (x-1)(x+2)\\
-x^2-7x+4x+28 &= x^2+2x-x-2 \quad |-x^2\\
-2x^2-3x+28 &= x-2 \quad |-x+2\\
-2x^2-4x+30 &= 0 \quad |:(-2)\\
x^2+2x-15 &= 0\\
x_{1/2} &= -1\pm\sqrt{1+15}\\
x_{1/2} &= -1\pm 4\\
x_1 &= 3\\
x_2 &= -5
\end{aligned}$$

Beide Ergebnisse liegen im untersuchten Bereich. Dazu kommt noch die Lösung aus dem ersten Fall.

$$\boxed{L=\{-5;3;13\}}$$

3.1.17 Aufgabe 17

$$\frac{x-1}{x-4} = \frac{|x-5|}{x-8} \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{4; 8\}$$

Aus Platzgründen behandele ich die beiden Fälle nicht nebeneinander, sondern untereinander.

<u>Untersuchung für $x \geq 5$:</u>

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{x-4} &= \frac{x-5}{x-8} \quad | \cdot (x-4)(x-8) \\
(x-1)\cdot(x-8) &= (x-5)\cdot(x-4) \\
x^2 - 8x - x + 8 &= x^2 - 4x - 5x + 20 \quad | - x^2 \\
-9x + 8 &= -9x + 20 \quad | + 9x \\
8 &= 20 \quad \text{(Falsche Aussage)}
\end{aligned}$$

Das Ergebnis ist eine **falsche Aussage**, es gibt also **keine** Lösung in diesem Bereich. Es folgt der andere Fall:

<u>Untersuchung für $x < 5$:</u>

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{x-4} &= \frac{-x+5}{x-8} \quad | \cdot (x-4)(x-8) \\
(x-1)\cdot(x-8) &= (-x+5)\cdot(x-4) \\
x^2 - 8x - x + 8 &= -x^2 + 4x + 5x - 20 \\
x^2 - 9x + 8 &= -x^2 + 9x - 20 \quad | + x^2 - 9x + 20 \\
2x^2 - 18x + 28 &= 0 \quad | : 2 \\
x^2 - 9x + 14 &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{56}{4}} \\
x_{1/2} &= \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \\
x_{1/2} &= \frac{9}{2} \pm \frac{5}{2} \\
x_1 &= 7 \\
x_2 &= 2
\end{aligned}$$

Das Ergebnis $x_1 = 7$ liegt **nicht** im untersuchten Bereich, nur $x_2 = 2$ liegt innerhalb. Damit ist diese Zahl die einzige gültige Lösung.

$$\boxed{L = \{2\}}$$

3.1.18 Aufgabe 18

$$\frac{x+5}{x+1} = \frac{|x-5|}{x-2} \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$$

Aus Platzgründen behandele ich die beiden Fälle nicht nebeneinander, sondern untereinander.

<u>Untersuchung für $x \geq 4$:</u>

$$\begin{aligned}
\frac{x+5}{x+1} &= \frac{x-5}{x-2} \quad |\cdot(x+1)(x-2)\\
(x+5)(x-2) &= (x-5)(x+1)\\
x^2 - 2x + 5x - 10 &= x^2 + x - 5x - 5 \quad |-x^2\\
3x - 10 &= -4x - 5 \quad |+10+4x\\
7x &= 5 \quad |:7\\
x &= \frac{5}{7}
\end{aligned}$$

Diese Lösung liegt **nicht** im untersuchten Bereich, ist also ungültig. Es folgt der andere Fall:

<u>Untersuchung für $x < 4$:</u>

$$\begin{aligned}
\frac{x+5}{x+1} &= \frac{-x+5}{x-2} \quad |\cdot(x+1)(x-2)\\
(x+5)(x-2) &= (-x+5)(x+1)\\
x^2 - 2x + 5x - 10 &= -x^2 - x + 5x + 5\\
x^2 + 3x - 10 &= -x^2 + 4x + 5 \quad |+x^2 - 4x - 5\\
2x^2 - x - 15 &= 0 \quad |:2\\
x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{15}{2} &= 0\\
x_{1/2} &= \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{120}{16}}\\
x_{1/2} &= \frac{1}{4} \pm \frac{11}{4}\\
x_1 &= 3\\
x_2 &= -2,5
\end{aligned}$$

Beide Ergebnisse liegen im untersuchten Bereich.

$$\boxed{L = \{-2,5; 3\}}$$

3.1.19 Aufgabe 19

$$|x+1|+5=|2x-4| \qquad D=\mathbb{R}$$

Hier müssen die beiden Beträge einzeln aufgelöst werden. Das führt zu mehr als zwei Fällen. Daher führe ich das aus Platzgründen **nacheinander** durch. Der linke Betrag wird zuerst aufgelöst.

$$\underline{\text{Untersuchung für } x \geq -1\text{:}}$$

$$\begin{aligned} x+1+5 &= |2x-4| \\ x+6 &= |2x-4| \end{aligned}$$

Beim Auflösen des zweiten Betrages ergeben sich wieder zwei Fälle:

$$\begin{array}{rcll} & & \underline{\text{für } x \geq 2:} & \\ x+6 &=& 2x-4 & |-6-2x \\ -x &=& -10 & |\cdot(-1) \\ x &=& 10 & \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} & & \underline{\text{für } x < 2:} & \\ x+6 &=& -2x+4 & |-6+2x \\ 3x &=& -2 & |:3 \\ x &=& -\frac{2}{3} & \end{array}$$

Beide Ergebnisse liegen in den untersuchten Bereichen, beide sind also gültig. Es folgt der andere Fall aus der ersten Fallunterscheidung:

$$\underline{\text{Untersuchung für } x < -1\text{:}}$$

$$\begin{aligned} -x-1+5 &= |2x-4| \\ -x+4 &= |2x-4| \end{aligned}$$

Beim Auflösen des zweiten Betrages ergeben sich eigentlich wieder zwei Fälle, nämlich $x \geq 2$ und $x < 2$. Da der erste aber komplett **außerhalb** des hier untersuchten Bereiches $x < 1$ liegt, erübrigt sich eine weitere Fallunterscheidung, der Betragsinhalt ist auf jeden Fall negativ.

$$\begin{array}{rcll} -x+4 &=& |2x-4| & \\ -x+4 &=& -2x+4 & |+2x-4 \\ x &=& 0 & \end{array}$$

Dieses Ergebnis liegt **nicht** im untersuchten Bereich. Es bleibt also bei den beiden Lösungen:

$$\boxed{L=\left\{10; -\frac{2}{3}\right\}}$$

3.1.20 Aufgabe 20

$$4 - |4x + 6| + |2x - 2| = 0 \qquad D = \mathbb{R}$$

Hier müssen die beiden Beträge einzeln aufgelöst werden. Das führt zu mehr als zwei Fällen. Daher führe ich das aus Platzgründen **nacheinander** durch. Der linke Betrag wird zuerst aufgelöst.

Untersuchung für $x \geq -1,5$:

$$\begin{aligned} 4 - (4x + 6) + |2x - 2| &= 0 \\ 4 - 4x - 6 + |2x - 2| &= 0 \\ -4x - 2 + |2x - 2| &= 0 \end{aligned}$$

Beim Auflösen des zweiten Betrages ergeben sich wieder zwei Fälle:

für $x \geq 2$:

$$\begin{aligned} -4x - 2 + 2x - 2 &= 0 \\ -2x - 4 &= 0 \quad | + 4 \\ -2x &= 4 \quad | : (-2) \\ x &= -2 \end{aligned}$$

für $x < 2$:

$$\begin{aligned} -4x - 2 - (2x - 2) &= 0 \\ -4x - 2 - 2x + 2 &= 0 \\ -6x &= 0 \quad | : (-6) \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Nur das Ergebnis des **rechten** Falls liegt im untersuchten Bereich, für den linken gilt das nicht. Es folgt der andere Fall aus der ersten Fallunterscheidung:

Untersuchung für $x < -1,5$:

$$\begin{aligned} 4 + (4x + 6) + |2x - 2| &= 0 \\ 4 + 4x + 6 + |2x - 2| &= 0 \\ 4x + 10 + |2x - 2| &= 0 \end{aligned}$$

Beim Auflösen des zweiten Betrages ergeben sich eigentlich wieder zwei Fälle, nämlich $x \geq 1$ und $x < 1$. Da der erste aber komplett **außerhalb** des hier untersuchten Bereiches $x < -1,5$ liegt, erübrigt sich eine weitere Fallunterscheidung, der Betragsinhalt ist auf jeden Fall negativ.

$$\begin{aligned} 4x + 10 - (2x - 2) &= 0 \\ 4x + 10 - 2x + 2 &= 0 \\ 2x + 12 &= 0 \quad | - 12 \\ 2x &= -12 \quad | : 2 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis liegt im untersuchten Bereich. Es gibt also zwei Lösungen:

$$\boxed{L = \{-6; 0\}}$$

3.1.21 Aufgabe 21

$$|2x+8|+6=|2x-6| \qquad D=\mathbb{R}$$

Hier müssen die beiden Beträge einzeln aufgelöst werden. Das führt zu mehr als zwei Fällen. Daher führe ich das aus Platzgründen **nacheinander** durch. Der linke Betrag wird zuerst aufgelöst.

Untersuchung für $x \geq -4$:

$$\begin{aligned} 2x+8+6 &= |2x-6| \\ 2x+14 &= |2x-6| \end{aligned}$$

Beim Auflösen des zweiten Betrages ergeben sich wieder zwei Fälle:

$$\begin{array}{rcll} & & \underline{\text{für } x \geq 3:} & \\ 2x+14 &=& 2x-6 & |-2x \\ 14 &=& -6 & \text{(falsche Aussage)} \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} & & \underline{\text{für } x < 3:} & \\ 2x+14 &=& -2x+6 & |-14+2x \\ 4x &=& -8 & |:4 \\ x &=& -2 & \end{array}$$

Nur das Ergebnis des **rechten** Falls liegt im untersuchten Bereich, für den linken ergibt sich eine **falsche Aussage**, hier gibt es keine Lösung. Es folgt der andere Fall aus der ersten Fallunterscheidung:

Untersuchung für $x < -4$:

$$\begin{aligned} -2x-8+6 &= |2x-6| \\ -2x-2 &= |2x-6| \end{aligned}$$

Beim Auflösen des zweiten Betrages ergeben sich eigentlich wieder zwei Fälle, nämlich $x \geq 3$ und $x < 3$. Da der erste aber komplett **außerhalb** des hier untersuchten Bereiches $x < -4$ liegt, erübrigt sich eine weitere Fallunterscheidung, der Betragsinhalt ist auf jeden Fall negativ.

$$\begin{aligned} -2x-2 &= -2x+6 \quad |+2x \\ -2 &= 6 \quad \text{(falsche Aussage)} \end{aligned}$$

Da sich eine **falsche Aussage** ergeben hat, gibt es auch in diesem Bereich keine Lösung. Es bleibt also bei der einzigen Lösung:

$$\boxed{L=\{-2\}}$$

3.1.22 Aufgabe 22

$$|x-3| - |x-5| = 2$$

Auch hier müssen die beiden Beträge einzeln aufgelöst werden. Das führt zu mehr als zwei Fällen. Daher führe ich das aus Platzgründen **nacheinander** durch. Der linke Betrag wird zuerst aufgelöst.

$$\underline{\text{Untersuchung für } x \geq 3\text{:}}$$

$$x - 3 - |x-5| \quad = \quad 2$$

Beim Auflösen des zweiten Betrages ergeben sich wieder zwei Fälle:

$$\begin{array}{rcll} & \underline{\text{für } x \geq 5:} & & \\ x-3-(x-5) & = & 2 & \\ x-3-x+5 & = & 2 & \\ 2 & = & 2 & \text{(wahre Aussage)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} & \underline{\text{für } x < 5:} & & \\ x-3+(x-5) & = & 2 & \\ x-3+x-5 & = & 2 & \\ 2x-8 & = & 2 & |+8 \\ 2x & = & 10 & |:2 \\ x & = & 5 & \end{array}$$

Alle x aus dem linken Fall gehören zur Lösungsmenge, da sich eine **wahre Aussage** ergibt. Die „5“ aus dem rechten Fall gehört gerade eben **nicht** mehr zum untersuchten Bereich. Die Bedingungen für den **linken** Fall können wie folgt zusammengefasst werden:

$$L_1 = \{x|x \geq 3 \wedge x \geq 5\} = \{x|x \geq 5\}$$

Es folgt der andere Fall aus der ersten Fallunterscheidung:

$$\underline{\text{Untersuchung für } x < 3\text{:}}$$

$$-x + 3 - |x-5| \quad = \quad 2$$

Beim Auflösen des zweiten Betrages ergeben sich eigentlich wieder zwei Fälle, nämlich $x \geq 5$ und $x < 5$. Da der erste aber komplett **außerhalb** des hier untersuchten Bereiches $x < 3$ liegt, erübrigt sich eine weitere Fallunterscheidung, der Betragsinhalt ist auf jeden Fall negativ.

$$\begin{array}{rcll} -x+3+x-5 & = & 2 & \\ -2 & = & 2 & \text{(falsche Aussage)} \end{array}$$

Da sich eine **falsche Aussage** ergeben hat, gibt es auch in diesem Bereich keine Lösung. Es bleibt also bei der Lösung:

$$\boxed{L = \{x|x \geq 5\}}$$

3.1.23 Aufgabe 23

$$|2x+3|-20=|3x-12|$$

Hier haben wir *zwei verschiedene* Beträge. Um sie aufzulösen, müssen wir eine *doppelte* Fallunterscheidung machen. Zweckmäßigerweise führen wir diese nacheinander durch. Aus Platzgründen beginnen wir mit dem ersten Fall, in dem der Inhalt des linken Betrages größer oder gleich Null ist.

$$\underline{\text{Untersuchung für } x \geq -1,5:}$$

$$\begin{aligned} 2x+3-20 &= |3x-12| \\ 2x-17 &= |3x-12| \end{aligned}$$

$$\underline{\text{für } x \geq 4:}$$

$$\begin{aligned} 2x-17 &= 3x-12 && |-3x+17 \\ -x &= 5 && |:(-1) \\ x &= -5 && \text{(entfällt)} \end{aligned}$$

$$\underline{\text{für } x < 4:}$$

$$\begin{aligned} 2x-17 &= -3x+12 && |+3x+17 \\ 5x &= 29 && |:5 \\ x &= 5,8 && \text{(entfällt)} \end{aligned}$$

$$\underline{\text{Untersuchung für } x < -1,5:}$$

$$\begin{aligned} -2x-3-20 &= |3x-12| \\ -2x-23 &= |3x-12| \end{aligned}$$

$$\underline{\text{für } x \geq 4:}$$

(entfällt)

$$\underline{\text{für } x < 4:}$$

$$\begin{aligned} -2x-23 &= -3x+12 && |+3x+23 \\ x &= 35 && \text{(entfällt)} \end{aligned}$$

Keine der drei Teillösungen liegt innerhalb der jeweiligen untersuchten Bereiche. Daher ist die Lösungsmenge leer.

$$\boxed{L=\{\ \}}$$

3.1.24 Aufgabe 24

$$|x-1| + |x+5| = 6$$

Hier haben wir *zwei verschiedene* Beträge. Um sie aufzulösen, müssen wir eine *doppelte* Fallunterscheidung machen. Zweckmäßigerweise führen wir diese nacheinander durch. Aus Platzgründen beginnen wir mit dem ersten Fall, in dem der Inhalt des linken Betrages größer oder gleich Null ist.

$$\underline{\text{Untersuchung für } x \geq 1:}$$

$$\begin{array}{rcll} x-1+|x+5| & = & 6 & |+1 \\ x+|x+5| & = & 7 & \end{array}$$

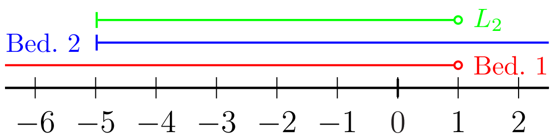
$$\begin{array}{cc} \underline{\text{für } x \geq -5:} & \underline{\text{für } x < -5:} \\ \begin{array}{rcll} x+x+5 & = & 7 & \\ 2x+5 & = & 7 & |-5 \\ 2x & = & 2 & |:2 \\ x & = & 1 & \\ L_1 & = & \{1\} & \end{array} & \text{(entfällt)} \end{array}$$

$$\underline{\text{Untersuchung für } x < 1:}$$

$$\begin{array}{rcll} -(x-1)+|x+5| & = & 6 & \\ -x+1+|x+5| & = & 6 & |-1 \\ -x+|x+5| & = & 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \underline{\text{für } x \geq -5:} & \underline{\text{für } x < -5:} \\ \begin{array}{rcll} -x+x+5 & = & 5 & \\ 5 & = & 5 & \text{(wahre Aussage)} \end{array} & \begin{array}{rcll} -x-(x+5) & = & 5 & \\ -x-x-5 & = & 5 & \\ -2x-5 & = & 5 & |+5 \\ -2x & = & 10 & |:(-2) \\ x & = & -5 & \text{(entfällt)} \end{array} \end{array}$$

Der zweite untersuchte Bereich entfällt, da $x \geq 1$ und $x < -5$ nie gleichzeitig möglich ist. Bleibt noch der dritte Bereich. Hier haben wir eine wahre Aussage erhalten, alle x im untersuchten Bereich gehören also zur Lösungsmenge. Wir legen die beiden Bedingungen übereinander, um die erste Lösungsmenge L_1 zu bestimmen.



Hinzu kommt die erste Lösung $L_1 = \{1\}$. Sie passt genau oben an L_2. Wir erhalten:

$$\boxed{L = \{x | -5 \leq x \leq 1\}}$$

3.1.25 Aufgabe 25

$$\Big||x-2|-2\Big|=1$$

Hier haben wir verschachtelte Beträge. Um sie aufzulösen, müssen wir eine *doppelte* Fallunterscheidung machen. Zweckmäßigerweise führen wir diese nacheinander durch. Aus Platzgründen beginnen wir mit dem ersten Fall, in dem der Inhalt des **inneren** Betrages größer oder gleich Null ist.

$$\underline{\text{Untersuchung für } x \geq 2:}$$

$$\begin{array}{rcl} |x-2-2| &=& 1 \\ |x-4| &=& 1 \end{array}$$

$$\underline{\text{für } x \geq 5:}$$

$$\begin{array}{rcll} x-4 &=& 1 & |+4 \\ x &=& 5 & \\ L_1 &=& \{5\} & \end{array}$$

$$\underline{\text{für } x < 5:}$$

$$\begin{array}{rcll} -(x-4) &=& 1 & \\ -x+4 &=& 1 & |-4 \\ -x &=& -3 & |:(-1) \\ x &=& 3 & \\ L_2 &=& \{3\} & \end{array}$$

$$\underline{\text{Untersuchung für } x < 2:}$$

$$\begin{array}{rcl} |-(x-2)-2| &=& 1 \\ |-x+2-2| &=& 1 \\ |-x| &=& 1 \end{array}$$

$$\underline{\text{für } x \leq 0:}$$

$$\begin{array}{rcll} -x &=& 1 & |:(-1) \\ x &=& -1 & \\ L_3 &=& \{-1\} & \end{array}$$

$$\underline{\text{für } x > 0:}$$

$$\begin{array}{rcl} -(-x) &=& 1 \\ x &=& 1 \\ L_4 &=& \{1\} \end{array}$$

Wir fassen die Lösungsmengen zusamen:

$$\boxed{L=\{-1;1;3;5\}}$$

3.1.26 Aufgabe 26

$$\Big||x-1|-4\Big| = 4$$

Hier haben wir verschachtelte Beträge. Um sie aufzulösen, müssen wir eine *doppelte* Fallunterscheidung machen. Zweckmäßigerweise führen wir diese nacheinander durch. Aus Platzgründen beginnen wir mit dem ersten Fall, in dem der Inhalt des **inneren** Betrages größer oder gleich Null ist.

$$\underline{\text{Untersuchung für } x \geq 1:}$$

$$\begin{aligned} |x-1-4| &= 4 \\ |x-5| &= 4 \end{aligned}$$

$$\underline{\text{für } x \geq 5:}$$

$$\begin{aligned} x-5 &= 4 \quad |+5 \\ x &= 9 \\ L_1 &= \{9\} \end{aligned}$$

$$\underline{\text{für } x < 5:}$$

$$\begin{aligned} -(x-5) &= 4 \\ -x+5 &= 4 \quad |-5 \\ -x &= -1 \quad |:(-1) \\ x &= 1 \\ L_2 &= \{1\} \end{aligned}$$

$$\underline{\text{Untersuchung für } x < 1:}$$

$$\begin{aligned} |-(x-1)-4| &= 4 \\ |-x+1-4| &= 4 \\ |-x-3| &= 4 \end{aligned}$$

$$\underline{\text{für } x \leq -3:}$$

$$\begin{aligned} -x-3 &= 4 \quad |+3 \\ -x &= 7 \quad |:(-1) \\ x &= -7 \\ L_3 &= \{-7\} \end{aligned}$$

$$\underline{\text{für } x > -3:}$$

$$\begin{aligned} -(-x-3) &= 4 \\ x+3 &= 4 \quad |-3 \\ x &= 1 \\ L_4 &= \{\ \} \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge L_4 ist leer, da das Ergebniss (zwar nur knapp, aber eben doch) außerhalb des untersuchten Bereiches liegt. Wir fassen die Lösungsmengen zusamen:

$$\boxed{L = \{-7; 1; 9\}}$$

3.1.27 Aufgabe 27

$$\Big||x+3|-1\Big| = 2$$

Hier haben wir verschachtelte Beträge. Um sie aufzulösen, müssen wir eine *doppelte* Fallunterscheidung machen. Zweckmäßigerweise führen wir diese nacheinander durch. Aus Platzgründen beginnen wir mit dem ersten Fall, in dem der Inhalt des **inneren** Betrages größer oder gleich Null ist.

$$\underline{\text{Untersuchung für } x \geq -3:}$$

$$\begin{aligned} |x+3-1| &= 2 \\ |x+2| &= 2 \end{aligned}$$

$$\underline{\text{für } x \geq -2:}$$

$$\begin{aligned} x+2 &= 2 && \mid -2 \\ x &= 0 \\ L_1 &= \{0\} \end{aligned}$$

$$\underline{\text{für } x < -2:}$$

$$\begin{aligned} -(x+2) &= 2 \\ -x-2 &= 2 && \mid +2 \\ -x &= 4 && \mid :(-1) \\ x &= -4 \\ L_2 &= \{\ \} \end{aligned}$$

$$\underline{\text{Untersuchung für } x < -3:}$$

$$\begin{aligned} |-(x+3)-1| &= 2 \\ |-x-3-1| &= 2 \\ |-x-4| &= 2 \end{aligned}$$

$$\underline{\text{für } x \leq -4:}$$

$$\begin{aligned} -x-4 &= 2 && \mid +4 \\ -x &= 6 && \mid :(-1) \\ x &= -6 \\ L_3 &= \{-6\} \end{aligned}$$

$$\underline{\text{für } x > -4:}$$

$$\begin{aligned} -(-x-4) &= 2 \\ x+4 &= 2 && \mid -4 \\ x &= -2 \\ L_4 &= \{\ \} \end{aligned}$$

Die Lösungsmengen L_2 und L_4 sind leer, da die Ergebnisse jeweils außerhalb des untersuchten Bereiches liegen. Wir fassen die Lösungsmengen zusamen:

$$\boxed{L = \{-6; 0\}}$$

3.1.28 Aufgabe 28

$$\Big||2x-8|-3x\Big| = 4$$

Hier haben wir verschachtelte Beträge. Um sie aufzulösen, müssen wir eine *doppelte* Fallunterscheidung machen. Zweckmäßigerweise führen wir diese nacheinander durch. Aus Platzgründen beginnen wir mit dem ersten Fall, in dem der Inhalt des **inneren** Betrages größer oder gleich Null ist.

$$\underline{\text{Untersuchung für } x \geq 4:}$$

$$\begin{aligned} |2x-8-3x| &= 4 \\ |-x-8| &= 4 \end{aligned}$$

$\underline{\text{für } x \leq -8:}$

$$\begin{aligned} -x-8 &= 4 && |+8 \\ -x &= 12 && |:(-1) \\ x &= -12 \\ L_1 &= \{\,\} \end{aligned}$$

$\underline{\text{für } x > -8:}$

$$\begin{aligned} -(-x-8) &= 4 \\ x+8 &= 4 && |-8 \\ x &= -4 \\ L_2 &= \{\,\} \end{aligned}$$

$$\underline{\text{Untersuchung für } x < 4:}$$

$$\begin{aligned} |-(2x-8)-3x| &= 4 \\ |-2x+8-3x| &= 4 \\ |-5x+8| &= 4 \end{aligned}$$

$\underline{\text{für } x \leq 1,6:}$

$$\begin{aligned} -5x+8 &= 4 && |-8 \\ -5x &= -4 && |:(-5) \\ x &= 0,8 \\ L_3 &= \{0,8\} \end{aligned}$$

$\underline{\text{für } x > 1,6:}$

$$\begin{aligned} -(-5x+8) &= 4 \\ 5x-8 &= 4 && |+8 \\ 5x &= 12 && :5 \\ x &= 2,4 \\ L_4 &= \{2,4\} \end{aligned}$$

Die Lösungsmengen L_1 und L_2 sind leer, da die Ergebnisse jeweils außerhalb des untersuchten Bereiches liegen. Wir fassen die Lösungsmengen zusamen:

$$\boxed{L = \{0,8; 2,4\}}$$

3.2 Ungleichungen mit Beträgen

3.2.1 Aufgabe 1

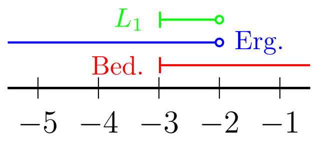
$$2 + |x + 3| < 3 \qquad D = \mathbb{R}$$

$$\underline{\text{für } x \geq -3:}$$

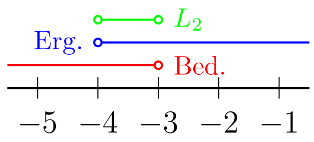
$$\begin{array}{rcll} 2 + x + 3 & < & 3 & | -5 \\ x & < & -2 & \end{array}$$

$$\underline{\text{für } x < -3:}$$

$$\begin{array}{rcll} 2 - (x + 3) & < & 3 & \\ 2 - x - 3 & < & 3 & | +1 \\ -x & < & 4 & | : (-1) \\ x & > & -4 & \end{array}$$

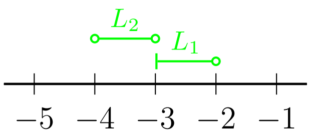


$L_1 = \{x| -3 \leq x < -2\}$



$L_2 = \{x| -4 < x < -3\}$

Zusammengefasst werden die Lösungsmengen in der Vereinigungsmenge $L = L_1 \cup L_2$.



Bei $x = -3$ stoßen die beiden Bereiche „nahtlos" aneinander. Die Zahlen knapp unter -3 gehören zu L_2, ab -3 dann zu L_1. Daher kann man die Lösungsmenge zusammenfassen:

$$\boxed{L = \{x| -4 < x < -2\}}$$

3.2.2 Aufgabe 2

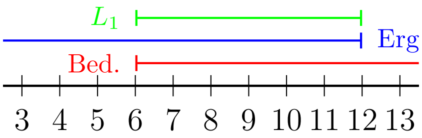
$$x - |2x - 12| \geq 0 \qquad D = \mathbb{R}$$

<u>für $x \geq 6$:</u>

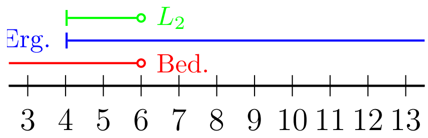
$$\begin{array}{rcll} x - (2x - 12) & \geq & 0 & \\ x - 2x + 12 & \geq & 0 & | - 12 \\ -x & \geq & -12 & | : (-1) \\ x & \leq & 12 & \end{array}$$

<u>für $x < 6$:</u>

$$\begin{array}{rcll} x + (2x - 12) & \geq & 0 & \\ x + 2x - 12 & \geq & 0 & | + 12 \\ 3x & \geq & 12 & | : 3 \\ x & \geq & 4 & \end{array}$$



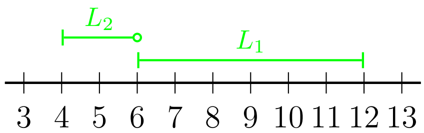
$L_1 = \{x|6 \leq x \leq 12\}$



$L_2 = \{x|4 \leq x < 6\}$

Rot: Bedingung, Blau: Ergebnisterm, Grün: Teil-Lösungsmenge

Zusammengefasst werden die Lösungsmengen in der Vereinigungsmenge $L = L_1 \cup L_2$.



Bei $x = 6$ stoßen die beiden Bereiche „nahtlos“ aneinander. Die Zahlen knapp unter 6 gehören zu L_2, ab 6 dann zu L_1. Daher kann man die Lösungsmenge zusammenfassen:

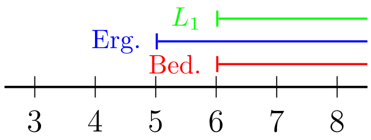
$$\boxed{L = \{x|4 \leq x \leq 12\}}$$

3.2.3 Aufgabe 3

$$5 - 3 \cdot |x-6| \leq 3x - 7 \qquad D = \mathbb{R}$$

$$\underline{\text{für } x \geq 6:}$$

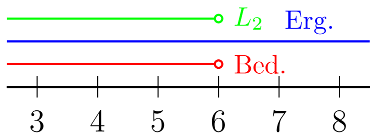
$$\begin{aligned}
5 - 3 \cdot (x-6) &\leq 3x - 7 & \\
5 - 3x + 18 &\leq 3x - 7 & |-3x \\
23 - 6x &\leq -7 & |-23 \\
-6x &\leq -30 & |:(-6) \\
x &\geq 5 &
\end{aligned}$$



$$L_1 = \{x | x \geq 6\}$$

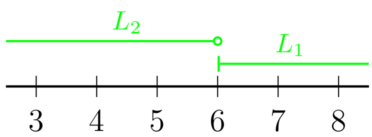
$$\underline{\text{für } x < 6:}$$

$$\begin{aligned}
5 + 3 \cdot (x-6) &\leq 3x - 7 & \\
5 + 3x - 18 &\leq 3x - 7 & |-3x \\
-13 &\leq -7 &
\end{aligned}$$



$$L_2 = \{x | x < 6\}$$

Die Untersuchung des rechten Falles hat eine *wahre Aussage* ergeben. Die ist natürlich im gesamten rechts untersuchten Bereich wahr, also ist die Bedingung für den rechten Bereich auch schon die entsprechende Teillösungsmenge. Zusammengefasst werden die Lösungsmengen in der Vereinigungsmenge $L = L_1 \cup L_2$.



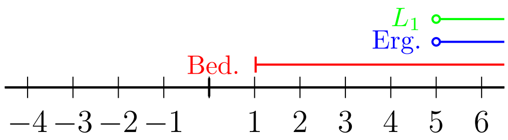
Schaut man sich die beiden Teillösungsmengen genau an, wird man feststellen, dass sie zusammengenommen die Menge *aller* Reellen Zahlen ist. Die Betragsungleichung ist also immer erfüllt.

$$\boxed{L = \mathbb{R}}$$

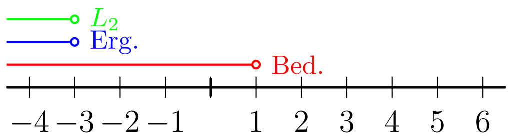
3.2.4 Aufgabe 4

$$2 \cdot |x-1| > 8 \qquad D = \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{rcll}
\multicolumn{4}{c}{\underline{\text{für } x \geq 1:}} \\
2 \cdot (x-1) & > & 8 & \\
2x - 2 & > & 8 & |+2 \\
2x & > & 10 & |:2 \\
x & > & 5 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rcll}
\multicolumn{4}{c}{\underline{\text{für } x < 1:}} \\
-2 \cdot (x-1) & > & 8 & \\
-2x + 2 & > & 8 & |-2 \\
-2x & > & 6 & |:(-2) \\
x & < & -3 &
\end{array}$$

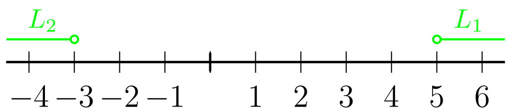


$L_1 = \{x | x > 5\}$



$L_2 = \{x | x < -3\}$

Zusammengefasst werden die Lösungsmengen in der Vereinigungsmenge $L = L_1 \cup L_2$.



Diese beiden Bereiche stoßen *nicht* aneinander, sie können also nur in aufzählender Form in die Lösungsmenge aufgenommen werden.

$$\boxed{L = \{x | x < -3 \vee x > 5\}}$$

3.2.5 Aufgabe 5

$$|x+1| - |2x-6| \leq 10 \qquad D = \mathbb{R}$$

Hier haben wir *zwei verschiedene* Beträge. Um sie aufzulösen, müssen wir eine *doppelte* Fallunterscheidung machen. Zweckmäßigerweise führen wir diese nacheinander durch. Aus Platzgründen beginnen wir mit dem ersten Fall, in dem der Inhalt des linken Betrages größer oder gleich Null ist.

$$\underline{\text{Untersuchung für } x \geq -1:}$$

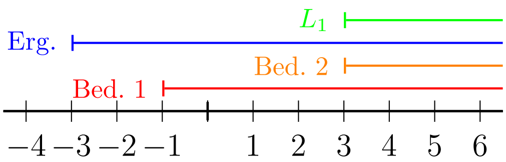
$$x + 1 - |2x-6| \leq 10$$

$\underline{\text{für } x \geq 3:}$

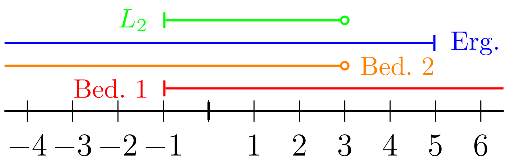
$$\begin{array}{rcll} x+1-(2x-6) & \leq & 10 & \\ x+1-2x+6 & \leq & 10 & \\ -x+7 & \leq & 10 & \mid -7 \\ -x & \leq & 3 & \mid :(-1) \\ x & \geq & -3 & \end{array}$$

$\underline{\text{für } x < 3:}$

$$\begin{array}{rcll} x+1+2x-6 & \leq & 10 & \\ 3x-5 & \leq & 10 & \mid +5 \\ 3x & \leq & 15 & \mid :3 \\ x & \leq & 5 & \end{array}$$



$L_1 = \{x | x \geq 3\}$

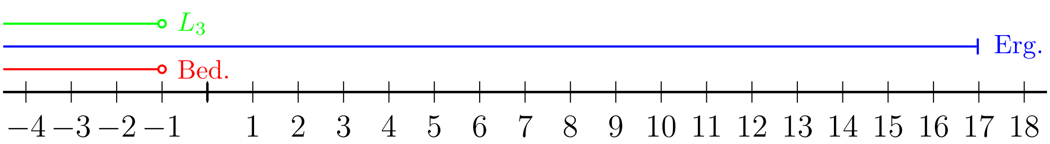


$L_2 = \{x | -1 \leq x < 3\}$

Der andere Fall war $x < -1$. In diesem Bereich ist der Inhalt des rechten Betrages *stets negativ*. Eine weitere Fallunterscheidung ist hier also nicht notwendig.

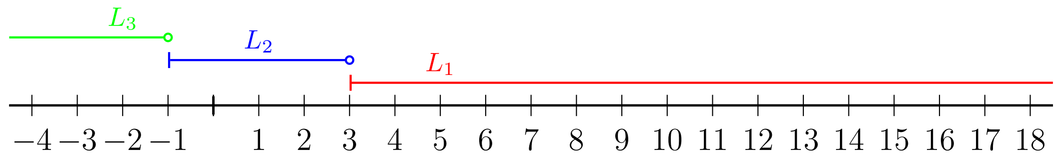
$$\underline{\text{Untersuchung für } x < -1:}$$

$$\begin{array}{rcll} -(x+1) - |2x-6| & \leq & 10 & \\ -(x+1) + (2x-6) & \leq & 10 & \\ -x-1+2x-6 & \leq & 10 & \\ x-7 & \leq & 10 & \mid +7 \\ x & \leq & 17 & \end{array}$$



$$L_3 = \{x | x \leq -1\}$$

Wir erhalten insgesamt 3 Teillösungsmengen. Zusammengefasst werden die Lösungsmengen in der Vereinigungsmenge $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$.



Die drei Teillösungsmengen stoßen „nahtlos“ aneinander. Zusammen decken sie die Menge aller Reellen Zahlen ab.

$$\boxed{L = \mathbb{R}}$$

3.2.6 Aufgabe 6

$$||x-5|-3| \leq 4 \qquad D = \mathbb{R}$$

In dieser Aufgabe haben wir zwei ineinander verschachtelte Beträge. Das bedingt entsprechend eine doppelte Fallunterscheidung. Wir beginnen damit, den *inneren* Betrag aufzulösen, weil das einfacher ist. Aus Platzgründen werden die beiden sich ergebende Fälle untereinander bearbeitet.

$$\underline{\text{Untersuchung für } x \geq 5:}$$

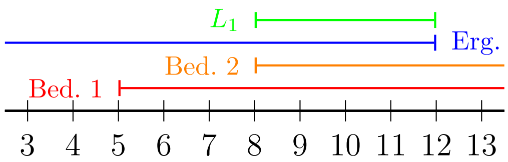
$$\begin{array}{rcl} |x-5-3| & \leq & 4 \\ |x-8| & \leq & 4 \end{array}$$

$$\underline{\text{für } x \geq 8:}$$

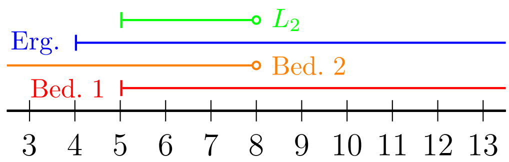
$$\begin{array}{rcll} x-8 & \leq & 4 & |+8 \\ x & \leq & 12 & \end{array}$$

$$\underline{\text{für } x < 8:}$$

$$\begin{array}{rcll} -(x-8) & \leq & 4 & \\ -x+8 & \leq & 4 & |-8 \\ -x & \leq & -4 & |:(-1) \\ x & \geq & 4 & \end{array}$$



$$L_1 = \{x | 8 \leq x \leq 12\}$$



$$L_2 = \{x | 5 \leq x < 8\}$$

Es folgt der zweite Fall aus der ersten Fallunterscheidung. Beide Fälle existieren, die Fallunterscheidung muss also durchgeführt werden.

$$\underline{\text{Untersuchung für } x < 5:}$$

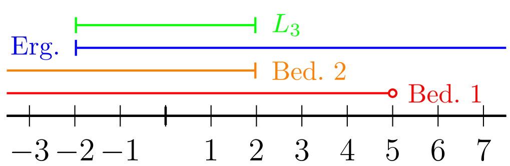
$$\begin{array}{rcl} |-(x-5)-3| & \leq & 4 \\ |-x+5-3| & \leq & 4 \\ |-x+2| & \leq & 4 \end{array}$$

$$\underline{\text{für } x \leq 2:}$$

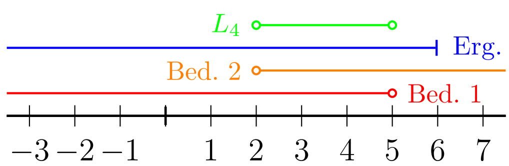
$$\begin{array}{rcll} -x+2 & \leq & 4 & |-2 \\ -x & \leq & 2 & |:(-1) \\ x & \geq & -2 & \end{array}$$

$$\underline{\text{für } x > 2:}$$

$$\begin{array}{rcll} -(-x+2) & \leq & 4 & \\ x-2 & \leq & 4 & |+2 \\ x & \leq & 6 & \end{array}$$

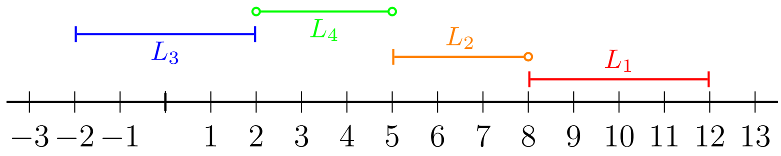


$$L_3 = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$$



$$L_4 = \{x | 2 < x < 5\}$$

Wir erhalten also 4 Teillösungsmengen. Zusammengefasst werden die Lösungsmengen in der Vereinigungsmenge $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$.



Die Teillösungsmengen passen lückenlos aneinander, wenn man sie in der Reihenfolge $L_3 - L_4 - L_2 - L_1$ aneinanderlegt. Die Gesamtlösungsmenge ergibt sich als:

$$\boxed{L = \{x | -2 \leq x \leq 12\}}$$

3.2.7 Aufgabe 7

$$x - |2x + 4| > 1 - |x - 2| \qquad D = \mathbb{R}$$

Hier haben wir *zwei verschiedene* Beträge. Um sie aufzulösen, müssen wir eine *doppelte* Fallunterscheidung machen. Zweckmäßigerweise führen wir diese nacheinander durch. Aus Platzgründen beginnen wir mit dem ersten Fall, in dem der Inhalt des linken Betrages größer oder gleich Null ist.

$$\underline{\text{Untersuchung für } x \geq -2:}$$

$$\begin{aligned} x - (2x + 4) &> 1 - |x - 2| \\ x - 2x - 4 &> 1 - |x - 2| \\ -x - 4 &> 1 - |x - 2| \end{aligned}$$

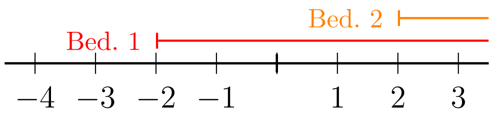
$$\underline{\text{für } x \geq 2:}$$

$$\begin{aligned} -x - 4 &> 1 - (x - 2) \\ -x - 4 &> 1 - x + 2 \\ -x - 4 &> 3 - x \qquad |+x \\ -4 &> 3 \end{aligned}$$

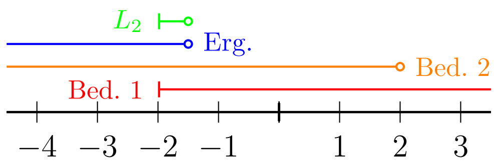
(falsche Aussage)

$$\underline{\text{für } x < 2:}$$

$$\begin{aligned} -x - 4 &> 1 + (x - 2) \\ -x - 4 &> 1 + x - 2 \\ -x - 4 &> -1 + x \qquad | - x + 4 \\ -2x &> 3 \qquad | : (-2) \\ x &< -1,5 \end{aligned}$$



$$L_1 = \{\ \}$$



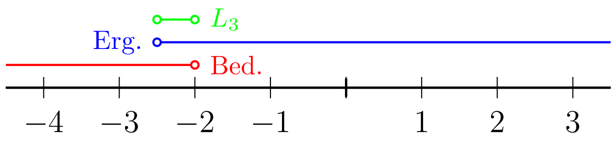
$$L_2 = \{x | -2 \leq x < -1,5\}$$

Eine Besonderheit liegt bei der ersten Teillösungsmenge L_1 vor. Der Ergebnisterm $-4 > 3$ ist *stets falsch*, ist also eine ***falsche Aussage***. Daher ist L_1 eine leere Menge.

Der andere Fall war $x < -2$. In diesem Bereich ist der Inhalt des rechten Betrages *stets negativ*. Eine weitere Fallunterscheidung ist hier also nicht notwendig.

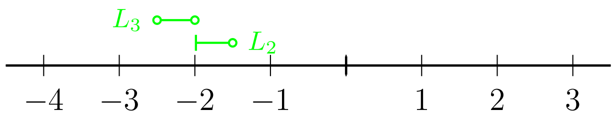
Untersuchung für $x < -2$:

$$\begin{array}{rcll} x + (2x + 4) & > & 1 - |x - 2| & \\ x + 2x + 4 & > & 1 + (x - 2) & \\ 3x + 4 & > & 1 + x - 2 & \\ 3x + 4 & > & x - 1 & | - x - 4 \\ 2x & > & -5 & | : 2 \\ x & > & -2,5 & \end{array}$$



$$L_3 = \{x| - 2,5 < x < -2\}$$

Wir haben insgesamt 3 Teillösungsmengen erhalten. Sie ergeben sich jeweils aus der UND-Verknüpfung der Bedingung(en) und des Lösungsterms. Da L_1 leer ist, ergibt sich L nur aus der Vereinigung von L_2 und L_3.



Die beiden Bereiche stoßen „bündig“ aneinander, die Gesamt-Lösungsmenge lässt sich also wie folgt zusammenfassen:

$$\boxed{L = \{x| - 2,5 < x < -1,5\}}$$