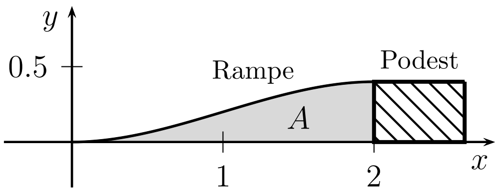
Aufgabe 26

An ein 40 Zentimeter hohes Podest soll eine Rampe angebaut werden, die ein ruhiges ruckelfreies Hinauf- und Hinunterfahren mit Materialwagen ermöglichen soll. Zu diesem Zweck hat die Rampe die Form eines Polynomes dritten Grades und mündet sowohl auf Bodenniveau als auch oben auf dem Podest waagerecht ein. Die waagerecht gemessene Länge der Rampe beträgt 2 Meter.



a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms!

b) An welcher Stelle verläuft die Rampe am steilsten, und welche Steigung hat sie dort? Gehen Sie dabei von der Funktion $f(x) = -0{,}1x^3 + 0{,}3x^2$ aus.

c) Bestimmen Sie die Querschnittfläche A für den Unterbau der Rampe!

Lösung:

zu a)

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & ax^3+bx^2+cx+d \\ f'(x) & = & 3a^2+2b+c \end{array}$$

Zur Vereinfachung wird in der Einheit *Meter* gerechnet. In der Rechnung kann die Einheit dann weggelassen werden.

Gegeben sind: $T(0|0)$ und $H(2|0{,}4)$

$$\begin{array}{lrcccrcl} (1) & f(0) & = & 0 & \Rightarrow & a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d & = & 0 \\ (2) & f'(0) & = & 0 & \Rightarrow & 3\cdot a\cdot 0^2+2\cdot b\cdot 0+c & = & 0 \\ (3) & f(2) & = & 0 & \Rightarrow & a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+c\cdot 2+d & = & 0{,}4 \\ (4) & f'(2) & = & 0 & \Rightarrow & 3\cdot a\cdot 2^2+2\cdot b\cdot 2+c & = & 0 \end{array}$$

Aus (1) erhält man sofort d.

$$\begin{array}{rcl} 0+0+0+d & = & 0 \\ d & = & 0 \end{array}$$

Aus (2) erhält man sofort c.

$$\begin{array}{rcl} 0+0+c & = & 0 \\ c & = & 0 \end{array}$$

Beide Werte können in die Gleichungen (3) und (4) eingesetzt werden. Durch Zusammenfassen erhält man:

$$\boxed{\begin{array}{lrcl} (3) & 8a+4b & = & 0{,}4 \\ (4) & 12a+4b & = & 0 \end{array}}$$

Es bietet sich an, die Gleichungen voneinandr zu subtrahieren.

$$\begin{array}{lrrcll} (3) & 8a & +4b & = & 0{,}4 & |- \\ (4) & 12a & +4b & = & 0 & | \\ \hline & 4a & & = & -0{,}4 & |:4 \\ & a & & = & -0{,}1 & \end{array}$$

Das Ergebnis wird z.B. in Gleichung (4) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcll} 12a+4b & = & 0 & \\ 12\cdot(-0{,}1)+4b & = & 0 & \\ -1{,}2+4b & = & 0 & |+1{,}2 \\ 4b & = & 1{,}2 & |:4 \\ b & = & 0{,}3 & \end{array}$$

Damit lautet die Funktionsgleichung: $\boxed{f(x)=-0{,}1x^3+0{,}3x^2}$

zu b) Die steilste Stelle liegt am Wendepunkt. Vorweg werden die erforderlichen Ableitungen bestimmt.

$$\begin{aligned} f(x) &= -0{,}1x^3 + 0{,}3x^2 \\ f'(x) &= -0{,}3x^2 + 0{,}6x \\ f''(x) &= -0{,}6x + 0{,}6 \\ f'''(x) &= -0{,}6 \end{aligned}$$

Zur Wendepunktbestimmung muss die zweite Ableitung gleich Null sein.

$$\begin{aligned} f''(x_W) &= 0 & \\ -0{,}6x_W + 0{,}6 &= 0 & \mid -0{,}6 \\ -0{,}6x_W &= -0{,}6 & \mid :(-0{,}6) \\ x_W &= 1 & \end{aligned}$$

Zur Prüfung, ob tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt, kann am einfachsten die dritte Ableitung verwendet werden.

$$f'''(x_W) = -0{,}6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt bei } x_W = 1$$

$$y_W = -0{,}1x_W^3 + 0{,}3x_W^2 = -0{,}1 \cdot 1 + 0{,}3 \cdot 1 = 0{,}2$$

Die Steigung dort muss bestimmt werden:

$$m = f'(x_W) = -0{,}3x_W^2 + 0{,}6x_W = -0{,}3 \cdot 1 + 0{,}6 \cdot 1 = 0{,}3$$

Die steilste Stelle liegt 1 m hinter dem Startpunkt 20 cm hoch mit der Steigung 0,3.

zu c) Die gesuchte Fläche wird mit Hilfe eines Integrales bestimmt.

$$\begin{aligned} A &= \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \\ &= \int_0^2 -0{,}1x^3 + 0{,}3x^2\,dx \\ &= \left[-0{,}025x^4 + 0{,}1x^3\right]_0^2 \\ &= (-0{,}025 \cdot 2^4 + 0{,}1 \cdot 2^3) - (-0{,}025 \cdot 0^4 + 0{,}1 \cdot 0^3) \\ &= (-0{,}4 + 0{,}8) - 0 \\ A &= 0{,}4 \end{aligned}$$

Die Querschnittfläche unter der Rampe beträgt $0{,}4\,\mathrm{m}^2$.