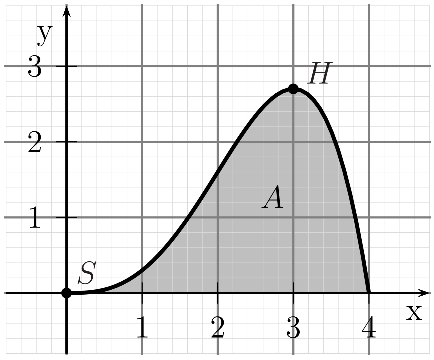
Aufgabe 21 (60 P.)

Eine Kinderrutschbahn hat die Form eines Polynoms 4. Grades. Die Rutschbahn hat links am unteren Endpunkt S im Koordinatenursprung einen Sattelpunkt und oben am Startpunkt H einen Hochpunkt. Dieser Hochpunkt liegt 2,70 m über dem Erdboden und waagerecht gemessen 3,00 m vom Endpunkt S entfernt. Rechts vom Hochpunkt sind Treppenstufen eingebaut, damit die Kinder zum Startpunkt hochklettern können. Es wird also auf der rechten Seite nach H hinaufgeklettert, und gerutscht wird dann von H nach S hinunter.



a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Rutsche. Während der Berechnungen können Sie die Einheit *Meter* zur Vereinfachung weglassen.

b) An welcher Stelle (horizontale Entfernung vom Endpunkt S und Höhe über dem Erdboden) hat die Rutschbahn ihre steilste Stelle? Wie groß ist dort ihre Steigung? Gehen Sie dabei von der Funktionsgleichung $f(x) = -0{,}1x^4 + 0{,}4x^3$ aus.

c) Berechnen Sie die markierte Fläche A, die unter der kompletten Rutsche liegt. Hier soll eine Stützmauer errichtet werden, die die Rutsche trägt.
Anmerkung: Die rechte Begrenzung der Fläche kann nicht aus der Skizze **abgelesen** werden, sie muss **berechnet** werden!

Lösung Teil a) **(20 P.)**

Zunächst wird das Polynom 4. Grades sowie seine ersten beiden Ableitungen in Normalform aufgestellt.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\ f'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \\ f''(x) &= 12ax^2 + 6bx + 2c \end{aligned}$$

Nun können die angegebenen Bedingungen in Gleichungen umgesetzt werden. Der Sattelpunkt $S(0|0)$ führt zu folgenden drei Gleichungen:

$$\begin{array}{llcclrclcrcl} (1) & f(0) & = & 0 & \Rightarrow & a\cdot 0^4 + b\cdot 0^3 + c\cdot 0^2 + d\cdot 0 + e & = & 0 & \Rightarrow & e & = & 0 \\ (2) & f'(0) & = & 0 & \Rightarrow & 4a\cdot 0^3 + 3b\cdot 0^2 + 2c\cdot 0 + d & = & 0 & \Rightarrow & d & = & 0 \\ (3) & f''(0) & = & 0 & \Rightarrow & 12a\cdot 0^2 + 6b\cdot 0 + 2c & = & 0 & \Rightarrow & c & = & 0 \end{array}$$

Diese Ergebnisse können sofort in die Funktion und die erste Ableitung eingesetzt werden. Mit der zweiten Ableitung ginge das zwar auch, das ist aber nicht erforderlich.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^4 + bx^3 \\ f'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 \end{aligned}$$

Der Hochpunkt bei $H(3|2{,}7)$ führt zu zwei weiteren Gleichungen:

$$\begin{array}{llcclrcl} (4) & f(3) & = & 2{,}7 & \Rightarrow & a\cdot 3^4 + b\cdot 3^3 & = & 2{,}7 \\ (5) & f'(3) & = & 0 & \Rightarrow & 4a\cdot 3^3 + 3b\cdot 3^2 & = & 0 \end{array}$$

Zusammengefasst erhält man dieses Lineargleichungssystem:

$$\boxed{\begin{array}{lrrcl} (4) & 81a & +27b & = & 2{,}7 \\ (5) & 108a & +27b & = & 0 \end{array}}$$

Dieses Gleichungssystem kann am einfachsten mit dem Subtraktionsverfahren, aber auch mit jedem beliebigen anderen Verfahren gelöst werden.

$$\begin{array}{lrrcll} (4) & 81a & +27b & = & 2{,}7 & |- \\ (5) & 108a & +27b & = & 0 & | \\ \hline & 27a & & = & -2{,}7 & |:27 \\ & a & & = & -0{,}1 & \end{array}$$

Das Ergebnis kann in (4) oder (5) eingesetzt werden, um b zu bestimmen. Ich führe dies mit Gleichung (5) durch.

$$\begin{array}{rcll} 108a + 27b & = & 0 & \\ 108\cdot(-0{,}1) + 27b & = & 0 & \\ -10{,}8 + 27b & = & 0 & |+10{,}8 \\ 27b & = & 10{,}8 & |:27 \\ b & = & 0{,}4 & \end{array}$$

Die Funktionsgleichung lautet damit: $\boxed{f(x) = -0{,}1x^4 + 0{,}4x^3}$

Lösung Teil b) **(20 P.)**

Die steilste Stelle liegt im Wendepunkt. Zur Wendepunktbestimmung wird die zweite und dritte Ableitung benötigt.

$$\begin{aligned} f(x) &= -0{,}1x^4 + 0{,}4x^3 \\ f'(x) &= -0{,}4x^3 + 1{,}2x^2 \\ f''(x) &= -1{,}2x^2 + 2{,}4x \\ f'''(x) &= -2{,}4x + 2{,}4 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist das Nullwerden der zweiten Ableitung.

$$\begin{aligned} f''(x_w) &= 0 \\ -1{,}2x_w^2 + 2{,}4x_w &= 0 \quad | \cdot (-1{,}2) \\ x_w^2 - 2x_w &= 0 \\ x_w \cdot (x_w - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Damit erhält man:

$$\begin{aligned} x_{w1} &= 0 \\ x_{w2} &= 2 \end{aligned}$$

An der Stelle $x_{w1} = 0$ liegt der vorgegebene Sattelpunkt. In Frage kommt also nur noch $x_{w2} = 2$. Dieser Punkt liegt im Bereich der Rutschbahn. Ob dort tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt, kann mit der dritten Ableitung geprüft werden.

$$f'''(2) = -2{,}4 \cdot 2 + 2{,}4 = -2{,}4 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Wendepunkt bei } x_{w2} = 2$$

Der zugehörige y-Wert wird bestimmt:

$$y_{w2} = f(x_{w2}) = -0{,}1 \cdot 2^4 + 0{,}4 \cdot 2^3 = 1{,}6$$

Wendepunkt bei: $\boxed{W(2|1{,}6)}$

Die zugehörige Steigung liefert die 1. Ableitung:

$$m = f'(x_{w2}) = -0{,}4 \cdot 2^3 + 1{,}2 \cdot 2^2 = 1{,}6$$

Die steilste Stelle liegt 2 Meter vom Endpunkt entfernt in 1,6 Metern Höhe mit einer Steigung von 1,6.

Lösung Teil c) **(20 P.)**

Die Fläche kann mit einem Integral bestimmt werden. Dazu müssen zunächst die Nullstellen der Funktion berechnet werden, denn sie stellen die Integrationsgrenzen dar. Die untere Grenze ist mit $x_{01} = 0$ ist zwar schon bekannt, weil dort ein Sattelpunkt gegeben ist, aber die obere Grenze x_{02} fehlt noch. Zur Berechnung wird die Funktion gleich Null gesetzt.

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= 0 \\
-0{,}1x_0^4 + 0{,}4x_0^3 &= 0 \quad |:(-0{,}1) \\
x_0^4 - 4x_0^3 &= 0 \\
x_0^3 \cdot (x_0 - 4) &= 0 \\
x_{01} &= 0 \\
x_{02} - 4 &= 0 \quad |+4 \\
x_{02} &= 4
\end{aligned}$$

Mit $x_{01} = 0$ und $x_{02} = 4$ als Integrationsgrenzen kann die gesuchte Fläche unter der Kurve als Integral bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
A &= \int\limits_{x_{01}}^{x_{02}} f(x)\ dx \\
&= \int\limits_0^4 -0{,}1x^4 + 0{,}4x^3\ dx \\
&= \left[-0{,}02x^5 + 0{,}1x^4\right]_0^4 \\
&= (-0{,}02 \cdot 4^5 + 0{,}1 \cdot 4^4) - (-0{,}02 \cdot 0^5 + 0{,}1 \cdot 0^4) \\
A &= 5{,}12
\end{aligned}$$

Die gesuchte Fläche beträgt: $\boxed{A = 5{,}12\,\mathrm{m}^2}$