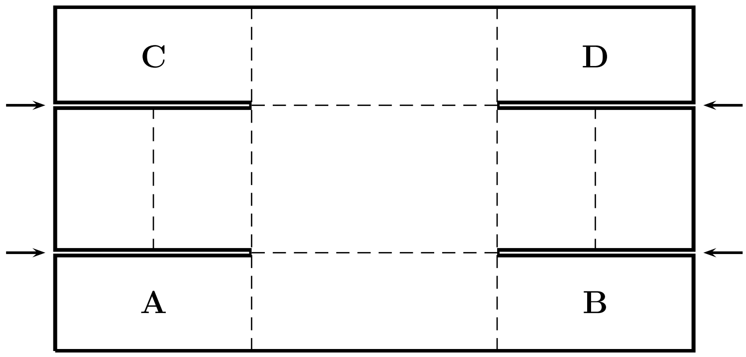
Aufgabe 20 (60 P.)



Aus einem rechteckigen Stück Pappe mit den Abmessungen 30 mal 60 Zentimeter soll ein oben offener quaderförmiger Karton hergestellt werden. Dazu wird die Pappe an den vier mit Pfeil gekennzeichneten Stellen eingeschnitten. Danach werden die vier dabei entstandenden Laschen **A**, **B**, **C** und **D** rechtwinklig nach oben hochgebogen. Anschließend wird die Pappe entlang der gestrichelten Linien in der Verlängerung der Einschnitte rechtwinklig hochgebogen. Dadurch kommt Lasche **A** auf Lasche **C** und Lasche **B** auf Lasche **D** zu liegen. Falls die Laschen zu lang sind, werden sie zuvor noch ein Stück gekürzt, dass es passt. Zum Schluss werden noch die Seitenteile rechts und links hochgebogen und um die Laschen **A**/**C** bzw. **B**/**D** zur Innenseite des dabei entstehenden Kartons herumgefaltet. Das jeweilige Seitenteil bedeckt dadurch die beiden zugehörigen Eck-Laschen sowohl von außen als auch von innen genau ganz ohne irgendwo „überzustehen“ oder eine Lücke zu lassen. Die Seitenteile sind also genau doppelt so lang, wie die Breite der Eck-Laschen.

Wie tief müssen die Einschnitte gemacht werden, damit ein Behälter mit **möglichst großem Volumen** entsteht? Geben Sie auch die **Abmessungen** des Behälters (Länge, Breite und Höhe) sowie sein **Volumen** an! Müssen die Laschen **A** bis **D** tatsächlich gekürzt werden?

Lösung:

Zunächst müssen Größen mit Formelbuchstaben benannt werden. Beispielhaft wird hier l für die Länge, b für die Breite und h für die Höhe des fertigen Behälters verwendet. Damit kann die **Hauptbedingung** aufgestellt werden:

$$\textbf{HB: } V = l \cdot b \cdot h \qquad (8\ P.)$$

Wir haben ***drei* Variablen**, deshalb sind ***zwei* Nebenbedingungen** erforderlich. Diese ergeben sich aus den Abmessungen des rechteckigen Kartons.

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{NB1:} & b + 2h & = & 30\,\text{cm} \\ \textbf{NB2:} & l + 4h & = & 60\,\text{cm} \quad (8\ P.) \end{array}$$

Die Nebenbedingungen werden nach b bzw. nach l umgestellt.

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{NB1:} & b & = & 30\,\text{cm} - 2h \\ \textbf{NB2:} & l & = & 60\,\text{cm} - 4h \end{array}$$

Die umgestellten Nebenbedingungen werden in die Hauptbedingung eingesetzt.

$$\begin{aligned} V &= l \cdot b \cdot h \\ V(h) &= (60\,\text{cm} - 4h) \cdot (30\,\text{cm} - 2h) \cdot h \\ V(h) &= 1\,800\,\text{cm}^2 \cdot h - 120\,\text{cm} \cdot h^2 - 120\,\text{cm} \cdot h^2 + 8 \cdot h^3 \\ V(h) &= 1\,800\,\text{cm}^2 \cdot h - 240\,\text{cm} \cdot h^2 + 8 \cdot h^3 \quad (10\ P.) \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für ein Maximum ist Nullwerden der ersten Ableitung.

$$\begin{aligned} V'(h) &= 1\,800\,\text{cm}^2 - 480\,\text{cm} \cdot h + 24 \cdot h^2 \\ 0 &= 1\,800\,\text{cm}^2 - 480\,\text{cm} \cdot h_E + 24 \cdot h_E^2 \quad |:24 \\ 0 &= h_E^2 - 20\,\text{cm} \cdot h_E + 75\,\text{cm}^2 \\ h_{E1/2} &= 10\,\text{cm} \pm \sqrt{100\,\text{cm}^2 - 75\,\text{cm}^2} \\ h_{E1/2} &= 10\,\text{cm} \pm 5\,\text{cm} \\ h_{E1} = 15\,\text{cm} & \qquad h_{E2} = 5\,\text{cm} \end{aligned}$$

Die Lösung $h_{E1} = 15\,\text{cm}$ entfällt, denn mit dieser Lösung „schrumpft“ die Breite b auf Null. Es bleibt also nur noch die Lösung $h_{E2} = 5\,\text{cm}$. (12 *P.*)

Mit Hilfe der zweiten Ableitung kann geprüft werden, ob ein Minimum oder ein (gewünschtes) Maximum vorliegt.

$$\begin{aligned} V''(h) &= -480\,\text{cm} + 48 \cdot h \\ V''(h_{E2}) &= -480\,\text{cm} + 48 \cdot 5\,\text{cm} \\ V''(h_{E2}) &= -240\,\text{cm} \end{aligned}$$

Es ist $V''(h_{E2}) < 0$. Es liegt also – wie gewünscht – ein **Maximum** vor. (7 *P.*)

Die Einschnitte sind $2 \cdot h_{E2} = 10\,\text{cm}$ tief. (3 *P.*)

Mit dem Wert $h_{E2} = 5\,\text{cm}$ und den umgestellten Nebenbedingungen werden die Länge l und die Breite b des Behälters bestimmt.

$$b = 30\,\text{cm} - 2h_{E2} = 30\,\text{cm} - 2 \cdot 5\,\text{cm} = 20\,\text{cm} \quad (3\ P.)$$

$$l = 60\,\text{cm} - 4h_{E2} = 60\,\text{cm} - 4 \cdot 5\,\text{cm} = 40\,\text{cm} \quad (3\ P.)$$

Das Volumen des Behälters soll auch angegeben werden.

$$V = l \cdot b \cdot h = 40\,\text{cm} \cdot 20\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} = 4\,000\,\text{cm}^3 \quad (3\ P.)$$

Die Längen der Laschen **A** bis **D** betragen $2 \cdot h_{E2} = 10\,\text{cm}$. Da dieses Maß genau die **halbe** Breite $\frac{b}{2}$ darstellt, passen die Laschen und müssen nicht gekürzt werden. Sie stoßen bündig aneinander. (3 *P.*)