

Lineargleichungssysteme: Additions- / Subtraktionsverfahren

W. Kippels

22. Februar 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Lineargleichungssysteme zweiten Grades	2
3	Lineargleichungssysteme höheren als zweiten Grades	5
4	Zusammenfassung	9
5	Nachtrag	10

1 Einleitung

Wie bei anderen Verfahren auch soll mit diesem Verfahren die Lösungsmenge eines Lineargleichungssystems bestimmt werden. Damit das Additions-/ Subtraktionsverfahren sinnvoll angewendet werden kann, muss es in der **Normalform** aufgestellt sein. Es eignet sich besonders gut für Gleichungssysteme 2. Grades sowie für Gleichungssysteme höheren Grades, wenn nicht in jeder Gleichung alle Variablen vertreten sind, oder wenn die Koeffizienten einer Variablen übereinstimmen.

2 Lineargleichungssysteme zweiten Grades

Ein mögliches Verfahren zum Lösen von Lineargleichungssystemen ist das Additions-/ Subtraktionsverfahren. Wir sehen uns das Prinzip an einem einfachen Beispiel an.

$$\begin{array}{l} (1) \quad 2x + 5y = 9 \\ (2) \quad 4x - 5y = 3 \end{array}$$

Hier ist das Verfahren besonders einfach anzuwenden. Wie man leicht sieht, ist die Vorkoeffizient (der Koeffizient) von y in beiden Gleichungen gleich, wenn man einmal vom Vorzeichen abzieht, nämlich einmal $+5$ und einmal -5 . Da das Vorzeichen unterschiedlich ist, kann man einfach beide Gleichungen **addieren**, so dass dabei y ganz wegfällt. Konkret: Addiert man Gleichung (1) zu Gleichung (2), dann ergibt sich:

$$\begin{array}{r} (1) \quad 2x + 5y = 9 \quad | \\ (2) \quad 4x - 5y = 3 \quad | + \\ \hline (3) \quad 6x + 0y = 12 \end{array}$$

Die sich daraus ergebende Gleichung (3) kann man nun sehr schnell nach x auflösen:

$$\begin{array}{r} 6x + 0y = 12 \\ 6x = 12 \quad | : 6 \\ x = 2 \end{array}$$

Damit ist die Lösung der ersten Variablen bekannt. Wie bei anderen Verfahren auch setzt man diesen Ergebnis zweckmäßigerweise in Gleichung (1) oder Gleichung (2) ein. So erhält man auch die andere Variable. Welche Gleichung man nimmt, ist im Prinzip gleichgültig; nehmen wir einfach mal Gleichung (1). Dann erhält man:

$$\begin{array}{l} (1) \quad 2x + 5y = 9 \quad | \text{Ergebnis von (3) für } x \text{ einsetzen} \\ 2 \cdot 2 + 5y = 9 \quad | \text{zusammenfassen} \\ 4 + 5y = 9 \quad | - 4 \\ 5y = 5 \quad | : 5 \\ y = 1 \end{array}$$

Zusammengefasstes Ergebnis: $x = 2 \quad y = 1$

Dargestellt als Lösungsmenge: $L = \{(2|1)\}$

Ähnlich einfach ist es, wenn die gleichen Koeffizienten einer Variablen auch das gleiche Vorzeichen haben, wie in folgendem Beispiel.

$$\boxed{\begin{array}{l} (1) \quad 6x + 5y = 21 \\ (2) \quad 6x + 3y = 15 \end{array}}$$

Würde man hier die Gleichungen **addieren**, dann würde x nicht wegfallen. Nein, wir würden ja $12x$ erhalten! Wir können aber auch die Gleichungen voneinander **subtrahieren**, dann heben sich die jeweils $6x$ auf. Ich bilde also die Differenz Gleichung (1) minus Gleichung (2):

$$\begin{array}{r} (1) \quad 6x + 5y = 21 \quad | \\ (2) \quad 6x + 3y = 15 \quad | - \\ \hline (3) \quad 0x + 2y = 6 \\ \quad \quad 2y = 6 \quad | : 2 \\ \quad \quad y = 3 \end{array}$$

Wie auch bei dem ersten Beispiel erhalten wir die andere Variable, indem wir das Ergebnis in (1) oder (2) einsetzen. Nehmen wir einfach mal Gleichung (2):

$$\begin{array}{r} (2) \quad 6x + 3y = 15 \quad | \text{Ergebnis } y = 3 \text{ einsetzen} \\ \quad 6x + 3 \cdot 3 = 15 \quad | \text{zusammenfassen} \\ \quad 6x + 9 = 15 \quad | - 9 \\ \quad 6x = 6 \quad | : 6 \\ \quad x = 1 \end{array}$$

Zusammengefasstes Ergebnis: $x = 1 \quad y = 3$

Dargestellt als Lösungsmenge: $L = \{(1|3)\}$

Schaun wir uns nun das folgende Beispiel an:

$$\begin{array}{r} (1) \quad -3x + 5y = 8 \\ (2) \quad 2x + 3y = 1 \end{array}$$

Hier gibt es keine Übereinstimmung in den Koeffizienten, weder von x noch von y . Trotzdem kann man das Verfahren anwenden. Es ist nur notwendig, eine oder beide Gleichungen mit einem **geeigneten Faktor** zu multiplizieren, so dass bei einer der Variablen eine Übereinstimmung entsteht. Es stellt sich natürlich die Frage: **Mit welchem Faktor muss ich denn welche Gleichung multiplizieren?**

Um diese Frage zu klären, muss man sich zunächst entscheiden, ob man die Koeffizienten von x oder die Koeffizienten von y gleich machen will. In unserem Beispiel wähle ich willkürlich die Koeffizienten von x aus, weil da die Zahlen etwas kleiner sind. Der neue gemeinsame Koeffizient, auf den man dann nach der Multiplikation kommt, ist das **kleinste gemeinsame Vielfache** der beiden ursprünglichen Koeffizienten. Das kleinste gemeinsame Vielfache ist vielleicht bekannter unter dem Namen „Hauptnenner“, auch wenn wir hier keine Brüche haben. Auf jeden Fall ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 3 und 2 die 6.

Damit die Koeffizienten von x beide auf 6 kommen, muss ich die erste Gleichung mit 2 und die zweite Gleichung mit 3 multiplizieren. Ich erhalte dann:

$$\begin{array}{r} (1) \quad -3x + 5y = 8 \quad | \cdot 2 \\ (2) \quad 2x + 3y = 1 \quad | \cdot 3 \\ \hline (1a) \quad -6x + 10y = 16 \\ (2a) \quad 6x + 9y = 3 \end{array}$$

Jetzt sind die Koeffizienten von x beide gleich, nur das Vorzeichen ist unterschiedlich. Daher kann ich die Gleichungen nun addieren und erhalte:

$$\begin{array}{r} (1a) \quad -6x + 10y = 16 \quad | \\ (2a) \quad 6x + 9y = 3 \quad | + \\ \hline \quad \quad \quad 19y = 19 \quad | : 19 \\ \quad \quad \quad y = 1 \end{array}$$

Um das noch fehlende x zu bestimmen, wählen wir eine möglichst einfache Gleichung aus, also nicht die erweiterten Gleichungen (1a) oder (2a), sondern besser (1) oder (2). Weil die Zahlen in (2) kleiner sind, wähle ich diese aus und setze das Ergebnis ein:

$$\begin{array}{r} (2) \quad 2x + 3y = 1 \quad | \text{für } y \text{ die 1 einsetzen} \\ 2x + 3 \cdot 1 = 1 \quad | \text{zusammenfassen} \\ 2x + 3 = 1 \quad | - 3 \\ 2x = -2 \quad | : 2 \\ x = -1 \end{array}$$

Zusammengefasstes Ergebnis: $x = -1 \quad y = 1$ Als Lösungsmenge: $L = \{(-1|1)\}$

3 Lineargleichungssysteme höheren als zweiten Grades

Haben wir drei Gleichungen mit drei Variablen (oder noch mehr), dann kann man das Additions-/ Subtraktionsverfahren auch erfolgreich anwenden. Hierbei gibt es jedoch einige Fallstricke, die es zu beachten gilt. Sehen wir uns folgendes Beispiel an:

$$\begin{array}{l} (1) \quad 3x \quad -2y \quad +2z = 10 \\ (2) \quad 4x \quad +2y \quad -3z = 1 \\ (3) \quad 2x \quad -3y \quad +2z = 7 \end{array}$$

Wenn wir erfolgreich einen Reduktionsschritt durchgeführt, dann haben wir anschließend eine Gleichung und eine Variable weniger als zuvor, also nur noch zwei Gleichungen mit zwei Variablen. Um entsprechend diesem Ziel **zwei** Gleichungen zu erhalten, müssen wir **zwei** mal zwei Gleichungen addieren oder subtrahieren. Der häufigste Fehler, der dabei gemacht wird, ist der, dass dabei nicht jedes mal die **gleiche** Variable wegfällt. Beachtet man das nicht, dann hat man letztlich zwar nur zwei Gleichungen, die aber insgesamt immer noch **alle drei** Variablen enthalten.

Um einmal zu zeigen, wie es **nicht** geht, betrachten wir die obenstehende Beispielaufgabe. Sinnvoll ist sicher, dass man zunächst einmal die ersten beiden Gleichungen, also die Gleichungen (1) und (2) addiert, um y entfallen zu lassen. Wir erhalten dann:

$$\begin{array}{l} (1) \quad 3x \quad -2y \quad +2z = 10 \quad | \\ (2) \quad 4x \quad +2y \quad -3z = 1 \quad | + \\ \hline (4) \quad 7x \quad \quad \quad -z = 11 \end{array}$$

Unser Beispiel könnte nun leicht dazu verführen, die Gleichungen (1) und (3) voneinander zu subtrahieren, weil dann z wegfällt. Bildet man Gleichung (1) minus (3), dann erhält man:

$$\begin{array}{l} (1) \quad 3x \quad -2y \quad +2z = 10 \quad | \\ (3) \quad 2x \quad -3y \quad +2z = 7 \quad | - \\ \hline (5) \quad x \quad +y \quad \quad = 3 \end{array}$$

Mit den Gleichungen (4) und (5) hätten wir nur auf den ersten Blick zwei Gleichungen mit nur zwei Variablen. Die Gleichung (4) enthält zwar kein y mehr, in Gleichung (5) ist es aber enthalten. **Unser neues Gleichungssystem enthält also insgesamt immer noch alle drei Variablen!**

Das bringt uns also nicht weiter. Wir hätten beim Bilden der zweiten Gleichung darauf achten müssen, dass dabei **die gleiche** Variable wegfällt, wie beim Bilden der ersten Gleichung. Das ist auch ohne weiteres möglich. Wir müssen nur **vor** dem Kombinieren der Gleichungen (1) und (3) die Koeffizienten von y gleich machen! Wenn wir Gleichung (1) mit 3 und Gleichung (3) mit 2 multiplizieren, dann sind beide Koeffizienten von y mit -6 gleich groß. Das ganze sieht dann so aus:

$$\begin{array}{rcl}
(1) & 3x & -2y + 2z = 10 \quad | \cdot 3 \\
(3) & 2x & -3y + 2z = 7 \quad | \cdot 2 \\
\hline
(1a) & 9x & -6y + 6z = 30 \\
(3a) & 4x & -6y + 4z = 14
\end{array}$$

Diese umgeformten Gleichungen haben nun gleiche y -Koeffizienten, ich bilde daher die Differenz Gleichung (1a) minus (3a):

$$\begin{array}{rcl}
(1a) & 9x & -6y + 6z = 30 \quad | \\
(3a) & 4x & -6y + 4z = 14 \quad | - \\
\hline
(5) & 5x & +2z = 16
\end{array}$$

Mit den Gleichungen (4) und (5) haben wir nun tatsächlich ein Gleichungssystem mit nur noch zwei Variablen erhalten. Schreiben wir die Gleichungen noch einmal untereinander.

$$\boxed{
\begin{array}{rcl}
(4) & 7x & -z = 11 \\
(5) & 5x & +2z = 16
\end{array}
}$$

Dieses Gleichungssystem kann man nun mit jedem beliebigen Verfahren lösen. Weil wir hier das Additions-/ Subtraktionsverfahren lernen wollen, arbeiten wir auch mit diesem Verfahren weiter. Es bietet sich hier an, die Koeffizienten von z gleich zu machen, indem wir die Gleichung (4) mit 2 multiplizieren. Da die Vorzeichen des Koeffizienten von z unterschiedlich sind, können wir diese Gleichungen anschließend addieren:

$$\begin{array}{rcl}
(4) & 7x & -z = 11 \quad | \cdot 2 \\
(5) & 5x & +2z = 16 \\
\hline
(4a) & 14x & -2z = 22 \quad | \\
(5) & 5x & +2z = 16 \quad | + \\
\hline
& 19x & = 38 \quad | : 19 \\
& x & = 2
\end{array}$$

Es müssen jetzt nur noch die Variablen y und z bestimmt werden. Wir gehen wieder rückwärts, bis wir eine möglichst einfache Gleichung **mit nur zwei Variablen** finden. Mir gefällt die Gleichung (4). Dort setzen wir die Lösung $x = 2$ ein.

$$\begin{array}{rcl}
(4) & 7x - z & = 11 \quad | x \text{ durch } 2 \text{ ersetzen} \\
& 7 \cdot 2 - z & = 11 \quad | \text{ zusammenfassen} \\
& 14 - z & = 11 \quad | - 14 \\
& -z & = -3 \quad | : (-1) \\
& z & = 3
\end{array}$$

Die Ergebnisse setzen wir in eine Gleichung ein, in der auch y vorkommt, beispielsweise in Gleichung (2):

$$\begin{array}{rcll} (2) & 4x + 2y - 3z & = & 1 \quad | \text{ } x \text{ und } z \text{ ersetzen} \\ & 4 \cdot 2 + 2y - 3 \cdot 3 & = & 1 \quad | \text{ zusammenfassen} \\ & 8 + 2y - 9 & = & 1 \quad | \text{ zusammenfassen} \\ & -1 + 2y & = & 1 \quad | + 1 \\ & 2y & = & 2 \quad | : 2 \\ & y & = & 1 \end{array}$$

Zusammengefasstes Ergebnis: $x = 2 \quad y = 1 \quad z = 3$

Dargestellt als Lösungsmenge: $L = \{(2|1|3)\}$

Wir können das gleiche Gleichungssystem auch ganz anders lösen. Hier noch einmal das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} (1) \quad 3x - 2y + 2z = 10 \\ (2) \quad 4x + 2y - 3z = 1 \\ (3) \quad 2x - 3y + 2z = 7 \end{array}$$

Zur Abwechslung wollen wir das System einmal so lösen, dass nicht y , sondern z wegfällt. Dazu müssen wieder – wie immer – zwei mal je zwei Gleichungen so miteinander kombiniert werden, dass diese Variable wegfällt. Als erstes bietet es sich an, die Gleichungen (3) und (1) voneinander zu subtrahieren. Bildet man Gleichung (1) minus (3), dann erhält man:

$$\begin{array}{l} (1) \quad 3x - 2y + 2z = 10 \quad | \\ (3) \quad 2x - 3y + 2z = 7 \quad | - \\ \hline (4) \quad x + y = 3 \end{array}$$

Nicht verwendet wurde hierbei Gleichung (2). Daher muss nun diese mit einer der beiden anderen kombiniert werden. Ich wähle Gleichung (3) aus, weil dort die Zahlen etwas kleiner sind. Das kleinste gemeinsame Vielfache von 2 und 3 (das sind die Koeffizienten von z in beiden Gleichungen) ist 6. Also muss Gleichung (2) mit 2 und Gleichung (3) mit 3 multipliziert werden. Wir erhalten:

$$\begin{array}{l} (2) \quad 4x + 2y - 3z = 1 \quad | \cdot 2 \\ (3) \quad 2x - 3y + 2z = 7 \quad | \cdot 3 \\ \hline (2a) \quad 8x + 4y - 6z = 2 \\ (3a) \quad 6x - 9y + 6z = 21 \end{array}$$

Die Vorzeichen der Koeffizienten von z in beiden Gleichungen sind verschieden, also müssen die Gleichungen **addiert** werden, damit z wegfällt. Man erhält dann:

$$\begin{array}{l} (2a) \quad 8x + 4y - 6z = 2 \quad | \\ (3a) \quad 6x - 9y + 6z = 21 \quad | + \\ \hline (5) \quad 14x - 5y = 23 \end{array}$$

Mit den Gleichungen (4) und (5) geht es nun weiter.

$$\begin{array}{l} (4) \quad x + y = 3 \\ (5) \quad 14x - 5y = 23 \end{array}$$

Ich will y eliminieren und multipliziere daher Gleichung (4) mit 5. Anschließend können die Gleichungen addiert werden.

$$\begin{array}{l} (4) \quad x + y = 3 \quad | \cdot 5 \\ (5) \quad 14x - 5y = 23 \\ \hline (4a) \quad 5x + 5y = 15 \quad | \\ (5) \quad 14x - 5y = 23 \quad | + \\ \hline 19x = 38 \quad | : 19 \\ x = 2 \end{array}$$

Die anderen Variablen finden wir wie oben durch Einsetzen in Gleichungen weiter oben. Gleichung (4) bietet sich an, weil nur zwei Variablen darin stehen und sie so schön einfach ist.

$$(4) \quad \begin{array}{rcl} x + y & = & 3 \quad | \text{ } x \text{ einsetzen} \\ 2 + y & = & 3 \quad | - 2 \\ y & = & 1 \end{array}$$

Beide Ergebnisse setze ich in (1) ein:

$$(1) \quad \begin{array}{rcl} 3x - 2y + 2z & = & 10 \quad | \text{ } x \text{ und } y \text{ einsetzen} \\ 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 2z & = & 10 \quad | \text{ zusammenfassen} \\ 6 - 2 + 2z & = & 10 \quad | \text{ zusammenfassen} \\ 4 + 2z & = & 10 \quad | - 4 \\ 2z & = & 6 \quad | : 2 \\ z & = & 3 \end{array}$$

Zusammengefasstes Ergebnis: $x = 2 \quad y = 1 \quad z = 3$

Dargestellt als Lösungsmenge: $L = \{(2|1|3)\}$

4 Zusammenfassung

Zusammengefasst könnte man folgendes „Lösungsrezept“ formulieren:

1. Zuerst legt man fest, **welche Variable** man zuerst eliminieren will.
2. Nun werden die Gleichungen **paarweise** so kombiniert, dass jeweils **genau diese Variable** wegfällt. Dazu bestimmt man das **kleinste gemeinsame Vielfache** der **zugehörigen Koeffizienten** und berechnet daraus den **jeweiligen Faktor**, mit dem die betreffende Gleichung multipliziert werden muss und addiert bzw. subtrahiert die erweiterten Gleichungen.
3. Dies führt man so oft durch, bis man **genau eine** Gleichung weniger hat, als zuvor. Auch die Zahl der vorkommenden Variablen hat sich um 1 vermindert.
4. Diesen Reduktionsschritt (Verringerung der Zahl der Gleichungen und der Variablen) führt man so oft durch, bis nur noch eine einzige Gleichung mit einer einzigen Variablen übrig bleibt.
5. Nun geht man **rückwärts** die Rechnung durch und setzt die gefundene Ergebnisse jeweils in eine Gleichung ein, die nur **genau eine** Variable enthält, die noch nicht bekannt ist. Diese wird dadurch bestimmt.

5 Nachtrag

Übungsaufgaben, die mit dem Additions-/Subtraktionsverfahren gelöst werden können, sind zusammen mit kompletten Musterlösungen hier zu finden:

<http://www.dk4ek.de/mathematik/lingsys.pdf>