Zusammenfassung Extremwert- und Wendepunktbestimmung

Wolfgang Kippels

24. Februar 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Bestimmung der Extremwerte

Notwendige Bedingung für einen Extremwert ist: $f'(x_E) = 0$

Ich setze die erste Ableitung gleich 0 und löse die Gleichung nach x_E auf. So erhalte ich **alle Kandidaten** für Hoch-, und Tiefpunkte. Was bei dem jeweiligen Kandidaten vorliegt, muss im einzelnen geprüft werden.
Prüfung mit *zweiter* Ableitung:
$f''(x_E) > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Tiefpunkt bei x_E.
$f''(x_E) < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Hochpunkt bei x_E.

2 Bestimmung der Wendepunkte

Ansatz: $f''(x_w) = 0$
Ich setze die zweite Ableitung gleich 0 und löse die Gleichung nach x_w auf. So erhalte ich **alle Kandidaten** für Wendepunkte und Flachpunkte. Was bei dem jeweiligen Kandidaten vorliegt, muss im einzelnen geprüft werden.
Prüfung mit *dritter* Ableitung:
$f'''(x_w) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ Wendepunkt bei x_w.
$f'''(x_w) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Keine Aussage möglich!

3 Steigungswinkel einer Tangente an den Funktionsgraphen

Die Steigung der Funktion liefert immer die **erste** Ableitung. Nennt man die Steigung einer Tangenten an die Kurve m, dann gilt dieser Zusammenhang zwischen der Steigung m und dem Steigungswinkel φ:

$$m = \tan\varphi$$

Möchte man beispielsweise den Steigungswinkel an der steilsten Stelle ermitteln, dann kann man wie folgt vorgehen:

Die steilste Stelle liegt immer im Wendepunkt.

Der x-Wert des Wendepunktes wird gemäß vorangegangener Methode bestimmt. Will man den Steigungswinkel bestimmen, benötigt man die **Steigung** an der betreffenden Stelle. Im Wendepunkt ist das

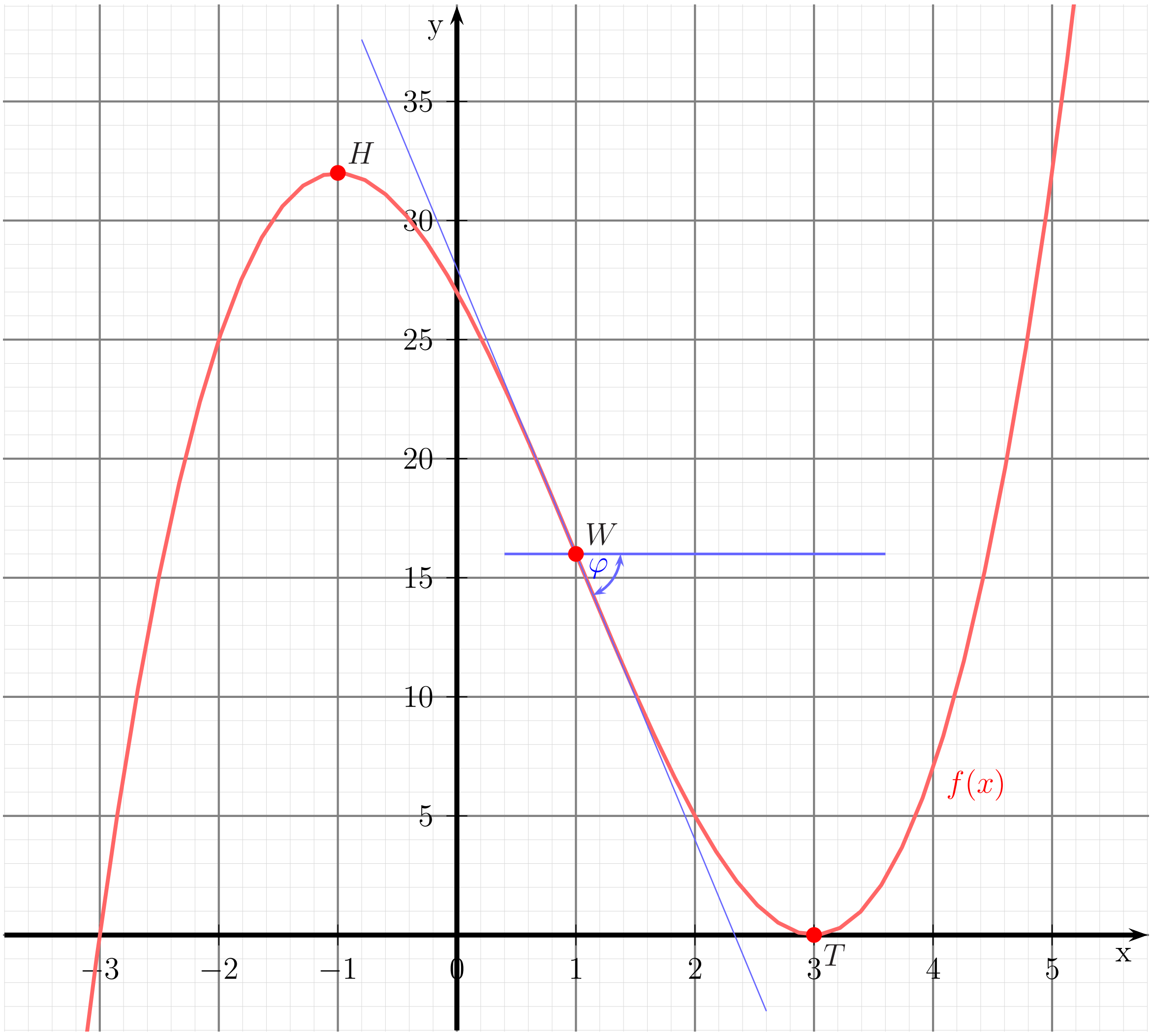
$$m = f'(x_W)$$

Mit der oben angegebenen Formel $m = \tan\varphi$ kann dann der Steigungswinkel φ berechnet werden.

4 Darstellung an einem Beispiel

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$$

Zum besseren Verständnis sehen wir uns zunächst den Funktionsgraphen an.



Mit eingezeichnet ist neben der blau dargestellten Wendetangente auch der zugehörige Steigungswinkel φ. Weil er **negativ** ist, könnte man auch eher von einem Gefällewinkel sprechen.

Bestimmung der Extrema:
Zunächst bestimmen wir alle Ableitungen, die man eventuell braucht.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x - 9 \\ f''(x) &= 6x - 6 \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für das Auftreten eines Extremums ist, dass die erste Ableitung dort gleich Null ist.

$$\begin{aligned} f'(x_E) &= 0 \\ 3x_E^2 - 6x_E - 9 &= 0 \qquad\qquad |:3 \\ x_E^2 - 2x_E - 3 &= 0 \\ x_{E1/2} &= 1 \pm \sqrt{1+3} \\ x_{E1/2} &= 1 \pm 2 \\ x_{E1} = -1 & \qquad x_{E2} = 3 \end{aligned}$$

Zur Prüfung, ob ein Maximum oder ein Minimum vorliegt, wird die zweite Ableitung verwendet. Ist $f''(x_E) > 0$, dann liegt ein Tiefpunkt vor, ist $f''(x_E) < 0$, dann haben wir einen Hochpunkt.

$$\begin{aligned} f''(x_{E1}) &= 6 \cdot (-1) - 6 = -12 < 0 & \Rightarrow \text{ Hochpunkt bei } x_{E1} = -1 \\ f''(x_{E2}) &= 6 \cdot 3 - 6 = 12 > 0 & \Rightarrow \text{ Tiefpunkt bei } x_{E2} = 3 \end{aligned}$$

Die zugehörigen y-Werte bestimmen wir als Funktionswerte der Extremstellen x_{E1} und x_{E2}.

$$\begin{aligned} y_{E1} &= f(x_{E1}) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 27 = 32 \\ y_{E2} &= f(x_{E2}) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 27 = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Hochpunkt: } H(-1|32)} \text{ und } \boxed{\text{Tiefpunkt: } T(3|0)}$$

Bestimmung der Wendepunkte:
Notwendige Bedingung für eine Wendestelle ist, dass die zweite Ableitung dort gleich Null ist.

$$\begin{aligned} f''(x_w) &= 0 \\ 6x_W - 6 &= 0 \quad |+6 \\ 6x_W &= 6 \quad |:6 \\ x_W &= 1 \end{aligned}$$

Mit der dritten Ableitung können wir prüfen, ob die gefundene Stelle tatsächlich zu einem Wendepunkt gehört. Dazu muss gelten: $f'''(x_W) \neq 0$.

$$f'''(1) = 6 \neq 0 \quad \text{Wendepunkt bei } x_W = 1$$

Den zugehörigen y-Wert bestimmen wir mit der Funktionsgleichung durch Einsetzen von x_W.

$$y_W = f(x_W) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 27 = 16$$

$$\boxed{\text{Wendepunkt: } W(1|16)}$$

Bestimmung des Steigungswinkels im Wendepunkte:

$$\begin{aligned}
m &= f'(x_W) \\
&= f'(1) \\
&= 3x_W^2 - 6x_W - 9 \\
&= 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 - 9 \\
m &= -12 \\
\tan\varphi &= -12 \\
\varphi &= \arctan(-12) \\
\varphi &\approx -85{,}236^\circ
\end{aligned}$$