Zentralklausur 2016 Aufgabe 1, ohne Hilfsmittel

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 16 \cdot x - 2$.

Untersuchen Sie die Funktion f rechnerisch auf lokale Minimal- und Maximalstellen.

Lösung: Notwendige Bedingung für ein Extremum ist das Nullwerden der ersten Ableitung.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{3} \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 16 \cdot x - 2 \\
f'(x) &= x^2 - 10x + 16 \\
0 &= x_E^2 - 10x_E + 16 \\
x_{E1/2} &= 5 \pm \sqrt{25 - 16} \\
x_{E1/2} &= 5 \pm \sqrt{9} \\
x_{E1/2} &= 5 \pm 3 \\
x_{E1} = 8 & \qquad x_{E2} = 2
\end{aligned}$$

$$\underline{\textbf{Untersuchung für } \mathbf{x_{E1} = 8}:}$$

$$\begin{aligned}
f'(7) &= 7^2 - 10 \cdot 7 + 16 = -5 < 0 \\
f'(9) &= 9^2 - 10 \cdot 9 + 16 = 7 > 0
\end{aligned}$$

Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ $\quad\Rightarrow\quad$ Tiefpunkt bei $x_{E1} = 8$

$$\underline{\textbf{Untersuchung für } \mathbf{x_{E2} = 2}:}$$

$$\begin{aligned}
f'(1) &= 1^2 - 10 \cdot 1 + 16 = 7 > 0 \\
f'(3) &= 3^2 - 10 \cdot 3 + 16 = -5 < 0
\end{aligned}$$

Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ $\quad\Rightarrow\quad$ Hochpunkt bei $x_{E2} = 2$

Anmerkung: Die zugehörigen y-Werte müssen nicht bestimmt werden, da nur nach den „Stellen“, nicht aber nach den „Punkten“ gefragt wurde.