Zinsrechnung

W. Kippels

6. Mai 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Grundlagen

Die Zinsrechnung ist in erster Näherung nur eine Prozentrechnung für besondere Anwendungen im Bereich der Finanzen. Die Grundlagen zur Prozentrechnung kann man beispielsweise hier nachlesen:

https://dk4ek.de/lib/exe/prozent.pdf

In der Zinsrechnung geht es immer darum, dass einer (der „Gläubiger") einem anderen (dem „Schuldner") für eine gewisse Zeit Geld (das *Kapital*) leiht. Dabei muss der Schuldner etwas mehr zurückbezahlen, als er geliehen bekommen hat. Diesen Mehrbetrag nennt man *Zinsen*.

Meist ist einer der Beteiligten eine Bank, sei es als Gläubiger oder als Schuldner. Zahlt ein Bürger Geld auf ein Sparkonto bei seiner Bank ein, dann ist die Bank der Schuldner. In diesem Fall spricht man von *Guthabenzinsen*. Aus Sicht des Bürgers hat er ein Guthaben bei der Bank. Leiht sich der Bürger bei der Bank Geld, dann ist die Bank der Gläubiger. Hier spricht man dann von *Sollzinsen*. Damit eine Bank Geld verdienen kann, ist ihr Sollzinssatz stets höher als der Guthabenzinssatz.

Bei der Zinsrechnung treten einige neue Begriffe auf, die hier zunächst erklärt werden müssen.

Kapital: Mit *Kapital* wird das bezeichnet, was in der Prozentrechnung *Grundwert* heißt. Das Formelzeichen für das Kapital ist das $\boldsymbol{K}$. Es handelt sich um den Geldbetrag, der verliehen wird und für den irgendwann Zinsen bezahlt werden müssen. Die Einheit ist immer eine Währungseinheit wie beispielsweise €.

Zinsen: Unter *Zinsen* versteht man den Betrag, der **zusätzlich** zum geliehenen Betrag zurückbezahlt werden muss. Das Formelzeichen für die Zinsen ist das $\boldsymbol{Z}$. Die Zinsen entsprechen dem *Prozentwert* aus der Prozentrechnung. Die Einheit ist immer die selbe, wie beim Kapital, also beispielsweise €.

Zinssatz: Der *Zinssatz* entspricht dem *Prozentsatz* aus der Prozentrechnung. Das Formelzeichen für den Prozentsatz ist das $\boldsymbol{p}$. Die Einheit ist immer %. Daran erkennt man am einfachsten, welche Größe der Zinssatz ist.
Anmerkung: Der Zinssatz wird manchmal auch als *Zinsfuß* bezeichnet.

Zeit: In der Zinsrechnung kommt im Vergleich zur Prozentrechnung noch eine neue Größe dazu: die *Zeit*. Das Formelzeichen für die Zeit ist das $\boldsymbol{i}$. Je nachdem, für welchen Zeitraum Geld verliehen wird, sind unterschiedlich hohe Zinsen zu zahlen. Der Zinssatz bezieht sich in der Regel immer auf ein ganzes Jahr. Man spricht dann auch von *Jahreszinsen*. Gelegentlich werden Zinsen aber auch für ein Quartal, einen Monat oder einen Tag angegeben. Quartalszinsen, Monatszinsen oder Tageszinsen sind jedoch die Ausnahme.

Anmerkung: Unter Bankkaufleuten ist es üblich, dass man so tut, als ob **jeder** Monat **genau** 30 Tage hat. Das führt zu einem Jahr mit 360 (statt eigentlich 365 bis 366) Tagen. Das liegt aber nicht an einer Unwissenheit der Kaufleute über den Aufbau des Kalenders. Vielmehr stammt dieser „Fehler“ aus einer Zeit, als es noch keine Computer gab. Damals mussten alle Zinsen „von Hand“ ausgerechnet werden. Mit dieser Gleichschaltung aller Monate war die Berechnung einfacher. Man hat diese Vereinfachung aus traditionellen Gründen unter dem Namen „Deutsche Zinsmethode“ bis heute beibehalten. Das korrekte Verfahren nennt man auch „Tagesgenaue Zinsmethode“. Hier müssen dann auch Schaltjahre unterschiedlich behandelt werden.

3 Einfache Zinsrechnung

3.1 Jährliche Verzinsung

Im Folgenden gehe ich immer von einen **Jahreszinssatz** $\boldsymbol{p}$ aus, es sein denn, es wird ausdrücklich etwas anderes beschrieben. Die Zeit $\boldsymbol{i}$ muss dann immer **in der Einheit** ***Jahre*** angegeben werden. Mit dieser Vereinbarung kommt man zu dieser Formel für die einfache Zinsrechnung:

$$\boxed{Z = \frac{K \cdot i \cdot p}{100\,\%}}$$

Man spricht hierbei manchmal auch von der „Kip-Formel“. So kann man sie sich vielleicht besser merken.
Anmerkung: Wenn $i = 1$ ist, entspricht die Formel genau der Hauptformel aus der Prozentrechnung:

$$P_w = \frac{G \cdot P_s}{100\,\%}$$

Beispiel 1: Ferdinand hat ein Guthaben von 360,00 € auf seinem Sparbuch angelegt. Dafür erhält er einen Jahreszinssatz von 1,2 %. Wie groß ist sein Guthaben ein Jahr später?

Lösung: Zunächst werden die Zinsen berechnet.

$$\begin{aligned} Z &= \frac{K \cdot i \cdot p}{100\,\%} \\ &= \frac{360{,}00\,€ \cdot 1 \cdot 1{,}2\,\%}{100\,\%} \\ Z &= 4{,}32\,€ \end{aligned}$$

Da die Zinsen nach einem Jahr gutgeschrieben werden, erhöht sich sein Kapital auf den neuen Wert von 364,32 €.

3.2 Unterjährige Verzinsung

Wenn die Zinsen sich nicht auf genau ein Jahr beziehen, sondern weniger, dann spricht man von *unterjähriger Verzinsung*. Das Problem kann man lösen, indem man beispielsweise den Zinssatz auf die kürzere Zeitspanne umrechnet. So entspricht bei einem Jahreszinssatz von 6 % der Zinssatz für einen Monat $\frac{6\,\%}{12} = 0{,}5\,\%$, der Zinssatz für ein Quartal $\frac{6\,\%}{4} = 1{,}5\,\%$ oder für einen Tag $\frac{6\,\%}{360} \approx 0{,}0167\,\%$.

Alternativ kann man natürlich auch den Faktor i, der ja die Anzahl der Jahre angibt, durch 12, durch 4 bzw. durch 360 dividieren. In diesem Fall müsste man beispielsweise für die Quartalszinsen mit $i = \frac{1}{4} = 0{,}25$ rechnen.

Beispiel 2: Stefanie benötigt für einen teuren Umzug 2 500 €. Sie leiht sich das Geld bei einer Bank für einen Jahreszinssatz von 11,5 %. Sie möchte den Kredit nach einem halben Jahr auf einmal zurückzahlen. Wieviel muss sie an Zinsen bezahlen?

Lösung:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{K \cdot i \cdot p}{100\,\%} \\ &= \frac{2\,500\,€ \cdot 0{,}5 \cdot 11{,}5\,\%}{100\,\%} \\ Z &= 143{,}75\,€ \end{aligned}$$

Stefanie muss für den Kredit 143,75 € an Zinsen bezahlen.

Beispiel 3: Für den Kauf eines Hauses wird ein Kredit von 150 000 € aufgenommen, der nach einigen Jahren bei der Fälligkeit einer Lebensversicherung zurückgezahlt werden soll. Der Jahreszinssatz beträgt 2,8 %. Die Zinsen müssen jeden Monat bezahlt werden, solange der Kredit nicht zurückbezahlt wurde. Eine Tilgung[1] findet nicht statt. Wie groß ist dadurch die monatliche Belastung?

Lösung: Weil ein Jahr 12 Monate hat, bedeutet eine monatliche Zinszahlung: $i = \frac{1}{12}$

$$\begin{aligned} Z &= \frac{K \cdot i \cdot p}{100\,\%} \\ &= \frac{150\,000\,€ \cdot \frac{1}{12} \cdot 2{,}8\,\%}{100\,\%} \\ Z &= 350\,€ \end{aligned}$$

Die monatliche Belastung beträgt 350 €.

[1] Unter dem Begriff *Tilgung* bezeichnet man eine Zahlungsweise, bei der **mehr** als nur die vereinbarten Zinsen gezahlt werden. Dadurch verringert jeweils sich das geliehene Kapital, und irgendwann ist alles zurückgezahlt. Der Kreditvertrag endet dann.

4 Übungsaufgaben zur Zinsrechnung

4.1 Aufgabe 1

Wieviel Zinsen bekommt man nach einem Jahr für ein angelegtes Kapital von 650 € bei einem Zinssatz von 2,5 %? Wie hoch ist am Schluss der Kontostand?

4.2 Aufgabe 2

Ein Kapital von 4 500 € wird für ein Jahr fest angelegt. Danach hat es sich auf 4 657,50 € erhöht. Wie groß ist der zugrunde liegende Zinssatz?

4.3 Aufgabe 3

Erwin hat 1 000 000 € im Lotto gewonnen. Er legt das Geld zu einem Zinssatz von 4,5 % fest an und lässt sich jeden Monat die Zinsen ausbezahhlen. Die gewonnene Million greift er dabei nicht an. Mit welchem Geldbetrag kann er monatlich rechnen?

4.4 Aufgabe 4

Frida hat ihr Girokonto überzogen. Einen Monat lang hatte sie ein Minus von 800 € auf dem Konto. Welche Kosten sind dabei bei einem Zinssatz von 12 % entstanden?

4.5 Aufgabe 5

Die alte Waschmaschine ist kaputt, eine Reparatur lohnt nicht mehr. Deshalb benötigt Bruno sofort eine neue Waschmaschine. Dafür muss er sein Konto am 10. März um 450 € überziehen. Die Überziehungszinsen betragen bei seiner Bank 10,8 %. Am 30. März bekommt er von seinem Arbeitgeber das nächste Gehalt auf sein Konto. Wie hoch sind seine Überziehungszinsen für das Konto?

4.6 Aufgabe 6

Kunibert musste sein Girokonto für ein paar Tage um 1 250 € überziehen. Dafür hat seine Bank ihm bei einem Zinssatz von 11,7 % 3,25 € berechnet. Wieviele Tage war das Konto überzogen?

4.7 Aufgabe 7

Paula hat einen Betrag von 8 000 € auf einem Tagesgeld-Konto angelegt. Der Zinssatz beträgt 1,8 %. Mit welchen Zinsen kann sie rechnen, wenn das Geld dort vom 12. Januar bis zum 3. Februar liegt?

4.8 Aufgabe 8

Ein Kapital wird zu einem Zinssatz von 2,5 % angelegt, die Zinsen werden jährlich ausbezahlt. Nach wievielen Jahren hat man an Zinsen genau so viel ausbezahlt bekommen, wie das ursprüngliche Kapital darstellt?

4.9 Aufgabe 9

Ferdinand möchte sich ein Fernsehgerät anschaffen und muss sich dazu Geld leihen. Er hat ausgerechnet, dass er monatlich maximal 6 € an Zinsen bezahlen kann, weil ja auch noch Geld zur Tilgung[2] des Kredites übrig bleiben muss. Er kann einen Kredit zu einem Jahreszinssatz von 15 % bekommen. Wieviel darf der Fernseher maximal kosten?

4.10 Aufgabe 10

Juliane hat am 1. Januar 170 € auf ihrem Sparbuch. Am 1. März zahlt sie 60 € ein und am 1. Juni noch einmal 80 €. Mit welchem Kontostand kann sie am Jahresende nach der Gutschrift der Zinsen rechnen, wenn der Zinssatz 1,5 % beträgt?

[2] Unter *Tilgung* versteht man die schrittweise Rückzahlung eines Kredites.

5 Lösungen der Übungsaufgaben zur Zinsrechnung

5.1 Aufgabe 1

Wieviel Zinsen bekommt man nach einem Jahr für ein angelegtes Kapital von 650 € bei einem Zinssatz von 2,5 %? Wie hoch ist am Schluss der Kontostand?

Lösung:

$$Z = \frac{K \cdot i \cdot p}{100\,\%} = \frac{650\,€ \cdot 1 \cdot 2{,}5\,\%}{100\,\%} = 16{,}25\,€$$

Man erhält nach einem Jahr 16,25 € Zinsen.

$$K_1 = K + Z = 650\,€ + 16{,}25\,€ = 666{,}25\,€$$

Der Kontostand beträgt nach dem Jahr 666,25 €.

5.2 Aufgabe 2

Ein Kapital von 4 500 € wird für ein Jahr fest angelegt. Danach hat es sich auf 4 657,50 € erhöht. Wie groß ist der zugrunde liegende Zinssatz?

Lösung: Zunächst werden die Zinsen berechnet.

$$Z = K_1 - K_0 = 4\,675{,}50\,€ - 4\,500{,}00\,€ = 175{,}50\,€$$

Jetzt muss die Kip-Formel nach p umgestellt werden, um dann p berechnen zu können.

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{K \cdot i \cdot p}{100\,\%} && \Big| \cdot \frac{100\,\%}{K \cdot i} \\
\frac{Z \cdot 100\,\%}{K \cdot i} &= p \\
p &= \frac{175{,}50\,€ \cdot 100\,\%}{4\,500\,€ \cdot 1} \\
p &= 3{,}9\,\%
\end{aligned}$$

Der Zinssatz betrug 3,9 %.

5.3 Aufgabe 3

Erwin hat 1 000 000 € im Lotto gewonnen. Er legt das Geld zu einem Zinssatz von 4,5 % fest an und lässt sich jeden Monat die Zinsen ausbezahhlen. Die gewonnene Million greift er dabei nicht an. Mit welchem Geldbetrag kann er monatlich rechnen?

Lösung: Man kann zunächst die jährlichen Zinsen berechnen, um diese dann durch 12 zu dividieren, man kann aber auch mit unterjähriger (monatlicher) Verzinsung mit $i = \frac{1}{12}$ rechnen.

Lösungsweg 1:

$$Z = \frac{K \cdot i \cdot p}{100\,\%} = \frac{1\,000\,000\,€ \cdot 1 \cdot 4{,}5\,\%}{100\,\%} = 45\,000\,€$$

Ein Zwölftel davon ist der Monatszins:

$$Z_m = \frac{1}{12} \cdot Z_j = \frac{1}{12} \cdot 45\,000\,€ = 3\,750\,€$$

Lösungsweg 2:

$$Z = \frac{K \cdot i \cdot p}{100\,\%} = \frac{1\,000\,000\,€ \cdot \frac{1}{12} \cdot 4{,}5\,\%}{100\,\%} = 3\,750\,€$$

Von dem Lottogewinn kann sich Erwin jeden Monat 3 750 € auszahlen lassen, ohne sein Kapital anzugreifen.

5.4 Aufgabe 4

Frida hat ihr Girokonto überzogen. Einen Monat lang hatte sie ein Minus von 800 € auf dem Konto. Welche Kosten sind dabei bei einem Zinssatz von 12 % entstanden?

Lösung: Ein Monat ist ein Zwölftel eines Jahres. Daher ist mit $i = \frac{1}{12}$ zu rechnen.

$$Z = \frac{K \cdot i \cdot p}{100\,\%} = \frac{800\,€ \cdot \frac{1}{12} \cdot 12\,\%}{100\,\%} = 8\,€$$

Das Überziehen des Kontos für einen Monat hat 8 € gekostet.

5.5 Aufgabe 5

Die alte Waschmaschine ist kaputt, eine Reparatur lohnt nicht mehr. Deshalb benötigt Bruno sofort eine neue Waschmaschine. Dafür muss er sein Konto am 10. März um 450 € überziehen. Die Überziehungszinsen betragen bei seiner Bank 10,8 %. Am 30. März bekommt er von seinem Arbeitgeber das nächste Gehalt auf sein Konto. Wie hoch sind seine Überziehungszinsen für das Konto?

Lösung: Hier ist mit Tageszinsen zu rechnen. Vom 10. bis zum 30. März sind es 20 Tage. Daher kann man entweder mit $i = \frac{20}{360} = \frac{1}{18}$ rechnen, oder man rechnet den Jahreszinssatz p_j auf den Tageszinssatz p_d um.

$$p_d = \frac{p_j}{360} = \frac{10{,}8\,\%}{360} = 0{,}03\,\%$$

Damit können die Zinsen berechnet werden.

$$Z = \frac{K \cdot i \cdot p_d}{100\,\%} = \frac{450\,€ \cdot 20 \cdot 0{,}03\,\%}{100\,\%} = 2{,}70\,€$$

Das Überziehen des Kontos für 20 Tage kostet 2,70 €.

5.6 Aufgabe 6

Kunibert musste sein Girokonto für ein paar Tage um 1 250 € überziehen. Dafür hat seine Bank ihm bei einem Zinssatz von 11,7 % 3,25 € berechnet. Wieviele Tage war das Konto überzogen?

Lösung: Da nach der Zahl der **Tage** gefragt ist, empfiehlt es sich, mit **Tages**-Zinsen zu rechnen. Der Jahreszinssatz wird in den Tageszinssatz umgerechnet.

$$p_d = \frac{p_j}{360} = \frac{11{,}7\,\%}{360} = 0{,}0325\,\%$$

Nun kann die Kip-Formel nach i umgestellt werden, um die Anzahl der Tage zu berechnen.

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{K \cdot i \cdot p_d}{100\,\%} && \Big| \cdot \frac{100\,\%}{K \cdot p_d} \\
\frac{Z \cdot 100\,\%}{K \cdot p_d} &= i \\
i &= \frac{3{,}25\,€ \cdot 100\,\%}{1\,250\,€ \cdot 0{,}0325\,\%} \\
i &= 8
\end{aligned}$$

Das Konto war 8 Tage lang überzogen.

5.7 Aufgabe 7

Paula hat einen Betrag von 8 000 € auf einem Tagesgeld-Konto angelegt. Der Zinssatz beträgt 1,8 %. Mit welchen Zinsen kann sie rechnen, wenn das Geld dort vom 12. Januar bis zum 3. Februar liegt?

Lösung: Zunächst muss bestimmt werden, für wieviele Tage das Geld dort liegt. Bekanntlich rechnen die Bankkaufleute für jeden Monat 30 Tage. Dass der Januar eigentlich 31 Tage hat, zählt hier nicht. Vom 12. bis zum 30. Januar sind es $30 - 12 = 18$ Tage. Dazu kommen noch 3 Tage vom Februar, also insgesamt 21 Tage.

Als nächstes sollte aus dem Jahreszinssatz p_j der Tageszinssatz p_d ausgerechnet werden.

$$p_d = \frac{p_j}{360} = \frac{1{,}8\,\%}{360} = 0{,}005\,\%$$

Mit diesen Werten können nun die Zinsen berechnet werden.

$$Z = \frac{K \cdot i \cdot p_d}{100\,\%} = \frac{8\,000\,€ \cdot 21 \cdot 0{,}005\,\%}{100\,\%} = 8{,}40\,€$$

Paula bekommt 8,40 € an Zinsen.

5.8 Aufgabe 8

Ein Kapital wird zu einem Zinssatz von 2,5 % angelegt, die Zinsen werden jährlich ausbezahlt. Nach wievielen Jahren hat man an Zinsen genau so viel ausbezahlt bekommen, wie das ursprüngliche Kapital darstellt?

Lösung: Wenn die Zinsen insgesamt genau so groß, wie das Kapital sind, gilt $Z = K$. Die Kip-Formel muss dann nur noch nach i umgestellt werden.

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{K \cdot i \cdot p}{100\,\%} && \mid Z = K \\
K &= \frac{K \cdot i \cdot p}{100\,\%} && \mid \cdot 100\,\% \\
K \cdot 100\,\% &= K \cdot i \cdot p && \mid : K \\
100\,\% &= i \cdot p && \mid : p \\
\frac{100\,\%}{p} &= i && \mid \text{Wert für } p \text{ einsezen} \\
i &= \frac{100\,\%}{2{,}5\,\%} \\
i &= 40
\end{aligned}$$

Nach 40 Jahren hat man insgesamt Zinsen in Höhe des Kapitals ausbezahlt bekommen.

5.9 Aufgabe 9

Ferdinand möchte sich ein Fernsehgerät anschaffen und muss sich dazu Geld leihen. Er hat ausgerechnet, dass er monatlich maximal 6 € an Zinsen bezahlen kann, weil ja auch noch Geld zur Tilgung des Kredites übrig bleiben muss. Er kann einen Kredit zu einem Jahreszinssatz von 15 % bekommen. Wieviel darf der Fernseher maximal kosten?

Lösung: Es ist sinnvoll, die monatlichen Zinsen in Jahreszinsen umzurechnen, weil ja der Zinssatz als Jahreszinssatz angegeben ist.

$$Z_j = 12 \cdot Z_m = 12 \cdot 6\,€ = 72\,€$$

Jetzt kann die Kip-Formel nach K umgestellt werden, damit K berechnet werden kann.

$$\begin{aligned} Z_j &= \frac{K \cdot i \cdot p}{100\,\%} \qquad \left| \cdot \frac{100\,\%}{i \cdot p} \right. \\ \frac{Z_j \cdot 100\,\%}{i \cdot p} &= K \\ K &= \frac{72\,€ \cdot 100\,\%}{1 \cdot 15\,\%} \\ K &= 480\,€ \end{aligned}$$

Das Fernsehgerät darf maximal 480 € kosten.

5.10 Aufgabe 10

Juliane hat am 1. Januar 170 € auf ihrem Sparbuch. Am 1. März zahlt sie 60 € ein und am 1. Juni noch einmal 80 €. Mit welchem Kontostand kann sie am Jahresende nach der Gutschrift der Zinsen rechnen, wenn der Zinssatz 1,5 % beträgt?

Lösung: Drei unterschiedliche Geldbeträge liegen unterschiedlich lang auf dem Sparbuch:

- 170 € für 12 Monate
- 60 € für 10 Monate
- 80 € für 7 Monate

Da das Geld immer ganze Monate dort liegt, empfiehlt es sich, mit Monatszinsen zu rechnen.

$$p_m = \frac{p_j}{12} = \frac{1{,}5\,\%}{12} = 0{,}125\,\%$$

Als nächstes werden die Zinsen berechnet. Die gesamten Zinsen ist die Summe der einzelnen Zinsen.

$$\begin{aligned}
Z_{ges} &= Z_1 + Z_2 + Z_3 \\
&= \frac{K_1 \cdot i_1 \cdot p_m}{100\,\%} + \frac{K_2 \cdot i_2 \cdot p_m}{100\,\%} + \frac{K_3 \cdot i_3 \cdot p_m}{100\,\%} \\
&= \frac{170\,€ \cdot 12 \cdot 0{,}125\,\%}{100\,\%} + \frac{60\,€ \cdot 10 \cdot 0{,}125\,\%}{100\,\%} + + \frac{80\,€ \cdot 7 \cdot 0{,}125\,\%}{100\,\%} \\
&= 2{,}55\,€ + 0{,}75\,€ + 0{,}70\,€ \\
Z_{ges} &= 4{,}00\,€
\end{aligned}$$

Das Gesamtkapital am Jahresende ist die Summe aller Einzahlungen und der Zinsen.

$$\begin{aligned}
K_{ges} &= K_1 + K_2 + K_3 + Z_{ges} \\
&= 170\,€ + 60\,€ + 80\,€ + 4\,€ \\
K_{ges} &= 314\,€
\end{aligned}$$

Julianes Kontostand beträgt am Jahresende 314 €.