

# Musterlösungen zu Grundlagen der Wechselstromtechnik

W. Kippels

24. Januar 2024

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundgrößen der Wechselstromtechnik</b>	<b>3</b>
1.1	Übungsfragen zu Grundgrößen der Wechselstromtechnik . . . . .	3
1.1.1	Frage 1: . . . . .	3
1.1.2	Frage 2: . . . . .	3
1.1.3	Frage 3: . . . . .	4
1.1.4	Frage 4: . . . . .	4
1.1.5	Frage 5: . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Wechselstromwiderstände</b>	<b>5</b>
2.1	Übungsfragen zu Wechselstromwiderständen . . . . .	5
2.1.1	Frage 1: . . . . .	5
2.1.2	Frage 2: . . . . .	5
2.1.3	Frage 3: . . . . .	5
2.1.4	Frage 4: . . . . .	5
2.1.5	Frage 5: . . . . .	5
2.1.6	Frage 6: . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Schaltnetze</b>	<b>7</b>
3.1	Übungsaufgaben zu Schaltnetzen . . . . .	7
3.1.1	Aufgabe 1 . . . . .	7
3.1.2	Aufgabe 2 . . . . .	10
3.1.3	Aufgabe 3 . . . . .	12
3.1.4	Aufgabe 4 . . . . .	14
3.1.5	Aufgabe 5 . . . . .	16
3.1.6	Aufgabe 6 . . . . .	19
3.1.7	Aufgabe 7 . . . . .	22
3.1.8	Aufgabe 8 . . . . .	26

3.1.9	Aufgabe 9	30
3.1.10	Aufgabe 10	32
3.1.11	Aufgabe 11	34
3.1.12	Aufgabe 12	36
3.1.13	Aufgabe 13	37
<b>4</b>	<b>Kompensation</b>	<b>40</b>
4.1	Berechnungen der Kompensation	40
4.2	Lösungen der Übungsaufgaben zur Kompensation	40
4.2.1	Aufgabe 1	40
4.2.2	Aufgabe 2	45
4.2.3	Aufgabe 3	49
4.2.4	Aufgabe 4	52
4.2.5	Aufgabe 5	55

# 1 Grundgrößen der Wechselstromtechnik

Die nachfolgenden Musterlösungen gehören zu den Aufgaben, die in diesem Lehrgang zu finden sind:

<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/wechsels.pdf>

## 1.1 Übungsfragen zu Grundgrößen der Wechselstromtechnik

### 1.1.1 Frage 1:

Die Netz-Wechselspannung hat eine Frequenz von  $f = 50 \text{ Hz}$ . Bestimmen Sie:

1. die Periodendauer
2. die Kreisfrequenz

#### Lösung 1:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50 \text{ Hz}} = \frac{1}{50 \text{ s}^{-1}} = \frac{1 \text{ s}}{50} = 20 \text{ ms}$$

#### Lösung 2:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 50 \text{ Hz} \approx 314 \text{ s}^{-1}$$

### 1.1.2 Frage 2:

Die Netz-Wechselspannung hat einen Effektivwert von  $U_{RMS} = 230 \text{ V}$ . Wie groß ist der Scheitelwert  $U_p$ ?

#### Lösung:

$$U_{RMS} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot U_p \quad \Rightarrow \quad U_p = \sqrt{2} \cdot U_{RMS} = \sqrt{2} \cdot 230 \text{ V} \approx 325 \text{ V}$$

### 1.1.3 Frage 3:

Eine Wechselspannung hat einen Effektivwert von  $U_{RMS} = 10 \text{ V}$ . Wie groß ist der Mittelwert  $U_M$ ?

**Lösung:**

$$\begin{aligned}U_{RMS} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot U_p && | \cdot \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \cdot U_{RMS} &= U_p \\ U_p &= \sqrt{2} \cdot U_{RMS} \\ U_M &= \frac{2}{\pi} \cdot U_p \\ U_M &= \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{2} \cdot U_{RMS} \\ U_M &= \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{2} \cdot 10 \text{ V} \\ U_M &\approx 9,00 \text{ V}\end{aligned}$$

### 1.1.4 Frage 4:

Mit Hilfe eines Oszilloskopes wird der Spitze-Spitze-Wert einer sinusförmigen Wechselspannung mit  $U_{pp} = 30 \text{ V}$  gemessen. Wie groß ist der Effektivwert  $U_{RMS}$  der Spannung?

**Lösung:**

$$\begin{aligned}U_{pp} = 2 \cdot U_p &\Rightarrow U_p = \frac{1}{2} \cdot U_{pp} \\ U_{RMS} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot U_p &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot U_{pp} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 \text{ V} \approx 10,6 \text{ V}\end{aligned}$$

### 1.1.5 Frage 5:

Mit Hilfe eines Oszilloskopes wird die Periodendauer einer sinusförmigen Wechselspannung mit  $T = 200 \mu\text{s}$  gemessen. Wie groß ist die Frequenz  $f$  der Spannung?

**Lösung:**

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{200 \mu\text{s}} = 5 \text{ kHz}$$

## 2 Wechselstromwiderstände

### 2.1 Übungsfragen zu Wechselstromwiderständen

#### 2.1.1 Frage 1:

Ergänzen Sie den Satz:

Der Strom in einer Induktivität eilt der Spannung in der Phase um *90° nach*.

#### 2.1.2 Frage 2:

Ergänzen Sie den Satz:

Je größer die Frequenz ist, desto *größer* ist der Wechselstromwiderstand einer Induktivität.

#### 2.1.3 Frage 3:

Ergänzen Sie den Satz:

Der Strom in einer Kapazität eilt der Spannung in der Phase um *90° voraus*.

#### 2.1.4 Frage 4:

Ergänzen Sie den Satz:

Je größer die Frequenz ist, desto *kleiner* ist der Wechselstromwiderstand einer Kapazität.

#### 2.1.5 Frage 5:

Wie groß ist der Strom  $I$  in einer Induktivität mit  $L = 10 \text{ H}$ , die an eine Wechselspannung von  $U = 12 \text{ V}$  mit einer Frequenz von  $f = 50 \text{ Hz}$  angeschlossen ist? Wie groß ist der Komplexe Strom  $\underline{I}$ , wenn die Spannung  $\underline{U}$  als Reelle Spannung vorausgesetzt ist?

**Lösung:**

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 50 \text{ Hz} = 314 \text{ s}^{-1}$$

$$X_L = \omega L = 314 \text{ s}^{-1} \cdot 10 \text{ H} = 3,14 \text{ k}\Omega$$

$$I = \frac{U}{X_L} = \frac{12 \text{ V}}{3,14 \text{ k}\Omega} = 3,82 \text{ mA}$$

$$\underline{I} = -jI = -j3,82 \text{ mA}$$

### 2.1.6 Frage 6:

Bei welcher Frequenz  $f$  hat ein Kondensator mit einer Kapazität von  $C = 1 \mu\text{F}$  einen Wechselstromwiderstand von  $X_C = 318 \Omega$ ?

**Lösung:**

$$\begin{aligned} X_C &= \frac{1}{\omega \cdot C} \\ X_C &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} && | \cdot \frac{f}{X_C} \\ f &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot C \cdot X_C} \\ f &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 1 \mu\text{F} \cdot 318 \Omega} \\ f &= 500 \text{ Hz} \end{aligned}$$

## 3 Schaltnetze

### 3.1 Übungsaufgaben zu Schaltnetzen

#### 3.1.1 Aufgabe 1

Nebenstehende Schaltung ist an eine Wechselspannung von  $U = 100\text{V}$  mit  $\omega = 100\text{s}^{-1}$  angeschlossen.

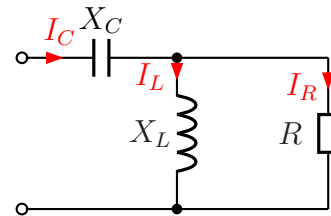
Die Bauteilwerte sind:

$$C = 500\ \mu\text{F}$$

$$L = 250\ \text{mH}$$

$$R = 50\ \Omega$$

Gesucht sind die Ströme  $I_C$  im Kondensator,  $I_L$  in der Spule und  $I_R$  im ohmschen Widerstand.



**Lösung:** Zunächst werden die Blindwiderstände von  $C$  und  $L$  bestimmt.

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{100\text{s}^{-1} \cdot 500\ \mu\text{F}} = 20\ \Omega$$

$$X_L = \omega \cdot L = 100\text{s}^{-1} \cdot 250\ \text{mH} = 25\ \Omega$$

Nun stelle ich die verschiedenen angegebenen Größen im komplexer Form dar:

$$X_C = 20\ \Omega \Rightarrow \underline{X}_C = -j20\ \Omega$$

$$X_L = 25\ \Omega \Rightarrow \underline{X}_L = j25\ \Omega$$

$$R = 50\ \Omega \Rightarrow \underline{R} = 50\ \Omega$$

$$U = 100\ \text{V} \Rightarrow \underline{U} = 100\ \text{V}$$

Ich fasse  $X_L$  und  $R$  zum Ersatzwiderstand  $Z_1$  zusammen.

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{\underline{X}_L \cdot \underline{R}}{\underline{X}_L + \underline{R}} \\ &= \frac{j25\ \Omega \cdot 50\ \Omega}{j25\ \Omega + 50\ \Omega} \\ &= \frac{j1250\ \Omega^2}{50\ \Omega + j25\ \Omega} \\ &= \frac{(j1250\ \Omega^2)(50\ \Omega - j25\ \Omega)}{(50\ \Omega + j25\ \Omega)(50\ \Omega - j25\ \Omega)} \\ &= \frac{j62500\ \Omega^3 + 31250\ \Omega^3}{2500\ \Omega^2 + 625\ \Omega^2} \\ &= \frac{31250\ \Omega^3 + j62500\ \Omega^3}{3125\ \Omega^2} \\ Z_1 &= 10\ \Omega + j20\ \Omega \end{aligned}$$

In Reihe zu  $Z_1$  ist  $X_C$  geschaltet. Ich erhalte den Gesamt-Ersatzwiderstand der Schaltung:

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \underline{X}_C + \underline{Z}_1 \\ &= -j20\ \Omega + 10\ \Omega + j20\ \Omega \\ \underline{Z} &= 10\ \Omega\end{aligned}$$

Als nächstes bestimme ich den Gesamtstrom, der durch  $Z$  fließt. Da dies zugleich der Strom im Kondensator ist, nenne ich ihn  $I_C$ .

$$\begin{aligned}\underline{I}_C &= \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \\ &= \frac{100\ \text{V}}{10\ \Omega} \\ \underline{I}_C &= 10\ \text{A}\end{aligned}$$

Mit diesem Strom kann ich die Spannung an der Spule und dem Widerstand berechnen. Er fließt durch den Ersatzwiderstand  $Z_1$ . Ich nenne die Spannung deshalb  $U_1$ .

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_C \\ &= (10\ \Omega + j20\ \Omega) \cdot 10\ \text{A} \\ \underline{U}_1 &= 100\ \text{V} + j200\ \text{V}\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Spannung kann ich den Strom  $I_L$  in der Spule berechnen.

$$\begin{aligned}\underline{I}_L &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{X}_L} \\ &= \frac{100\ \text{V} + j200\ \text{V}}{j25\ \Omega} \quad | \text{erweitern mit } j \\ &= \frac{j100\ \text{V} - 200\ \text{V}}{-25\ \Omega} \\ \underline{I}_L &= 8\ \text{A} - j4\ \text{A}\end{aligned}$$

Ebenso geht es mit dem Strom  $I_R$  im Widerstand.

$$\begin{aligned}\underline{I}_R &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{R}} \\ &= \frac{100\ \text{V} + j200\ \text{V}}{50\ \Omega} \\ \underline{I}_R &= 2\ \text{A} + j4\ \text{A}\end{aligned}$$



Gesucht sind aber nicht die komplexen Ströme  $\underline{I}_R$ ,  $\underline{I}_C$  und  $\underline{I}_L$ , sondern deren Beträge  $I_R$ ,  $I_C$  und  $I_L$ . Diese können wir mit der Wurzelformel  $|\underline{z}| = z = \sqrt{(\operatorname{Re}\underline{z})^2 + (\operatorname{Im}\underline{z})^2}$  berechnen.

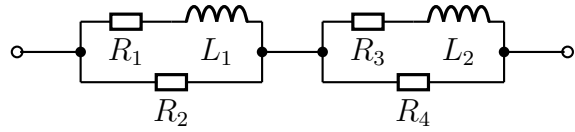
$$I_R = \sqrt{(2 \text{ A})^2 + (4 \text{ A})^2} \approx 4,472 \text{ A}$$

$$I_C = \sqrt{(10 \text{ A})^2} = 10 \text{ A}$$

$$I_L = \sqrt{(8 \text{ A})^2 + (-4 \text{ A})^2} \approx 8,944 \text{ A}$$

### 3.1.2 Aufgabe 2

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Berechnen Sie den Komplexen Ersatzwiderstand  $\underline{Z}$  der Schaltung sowie seinen Betrag  $Z$  und den Phasenverschiebungswinkel  $\varphi$ . Folgende Werte sind bekannt:



$$R_1 = 100 \Omega \quad R_2 = 200 \Omega \quad R_3 = 200 \Omega \\ R_4 = 100 \Omega \quad L_1 = 0,1 \text{ H} \quad L_2 = 0,1 \text{ H} \quad \omega = 1000 \text{ s}^{-1}$$

**Lösung:** Wir bestimmen zunächst aus den gegebenen Daten die komplexen Wirk- und Blindwiderstände.

$$R_1 = 100 \Omega \Rightarrow \underline{R}_1 = 100 \Omega \\ R_2 = 200 \Omega \Rightarrow \underline{R}_2 = 200 \Omega \\ R_3 = 200 \Omega \Rightarrow \underline{R}_3 = 200 \Omega \\ R_4 = 100 \Omega \Rightarrow \underline{R}_4 = 100 \Omega \\ X_{L1} = 1000 \text{ s}^{-1} \cdot 0,1 \text{ H} = 100 \Omega \Rightarrow \underline{X}_{L1} = j100 \Omega \\ X_{L2} = 1000 \text{ s}^{-1} \cdot 0,1 \text{ H} = 100 \Omega \Rightarrow \underline{X}_{L2} = j100 \Omega$$

Ich fasse  $R_1$  und  $X_{L1}$  mit der Formel für die Reihenschaltung als  $Z_1$  zusammen.

$$\underline{Z}_1 = \underline{R}_1 + \underline{X}_{L1} = 100 \Omega + j100 \Omega$$

Ich fasse  $Z_1$  mit  $R_2$  zu  $Z_2$  zusammen. Dazu verwende ich die Formel für die Parallelschaltung.

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{R}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{R}_2} = \frac{(100 \Omega + j100 \Omega) \cdot 200 \Omega}{100 \Omega + j100 \Omega + 200 \Omega} = \frac{20000 \Omega^2 + j20000 \Omega^2}{300 \Omega + j100 \Omega}$$

Damit die Zahlen und die Einheiten nicht so groß werden, klammere ich im Zähler und im Nenner  $100 \Omega$  aus und kürze dadurch.

$$\underline{Z}_2 = \frac{100 \Omega \cdot (200 \Omega + j200 \Omega)}{100 \Omega \cdot (3 + j1)} = \frac{200 \Omega + j200 \Omega}{3 + j1}$$

Das muss ich jetzt aufteilen können in Real- und Imaginärteil. Dazu muss ich den Bruch **Konjugiert Komplex erweitern**.

$$\underline{Z}_2 = \frac{200 \Omega + j200 \Omega}{3 + j1} \cdot \frac{3 - j1}{3 - j1} = \frac{600 \Omega - j200 \Omega + j600 \Omega + 200 \Omega}{3^2 + 1^2} = \frac{800 \Omega + j400 \Omega}{10} \\ \underline{Z}_2 = 80 \Omega + j40 \Omega$$

Ähnlich müssen wir auch die rechte Teilschaltung zusammenfassen. Die Reihenschaltung aus  $R_3$  und  $X_{L2}$  bekommt den Namen  $Z_3$ . Die Parallelschaltung von  $Z_3$  mit  $R_4$  nenne

ich dann  $Z_4$ .

$$\begin{aligned} \underline{Z}_3 &= \underline{R}_3 + \underline{X}_{L2} = 200 \Omega + j100 \Omega \\ \underline{Z}_4 &= \frac{\underline{Z}_3 \cdot \underline{R}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{R}_4} = \frac{(200 \Omega + j100 \Omega) \cdot 100 \Omega}{200 \Omega + j100 \Omega + 100 \Omega} = \frac{20000 \Omega^2 + j10000 \Omega^2}{300 \Omega + j100 \Omega} \\ &= \frac{100 \Omega \cdot (200 \Omega + j100 \Omega)}{100 \Omega \cdot (3 + j1)} = \frac{200 \Omega + j100 \Omega}{3 + j1} \\ &= \frac{(200 \Omega + j100 \Omega) \cdot (3 - j1)}{(3 + j1) \cdot (3 - j1)} = \frac{600 \Omega - j200 \Omega + j300 \Omega + 100 \Omega}{3^2 + 1^2} = \frac{700 \Omega + j100 \Omega}{10} \\ \underline{Z}_4 &= 70 \Omega + j10 \Omega \end{aligned}$$

Um den Gesamtwiderstand  $\underline{Z}$  zu bestimmen, muss ich nun noch  $\underline{Z}_2$  und  $\underline{Z}_4$  addieren.

$$\underline{Z} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_4 = 80 \Omega + j40 \Omega + 70 \Omega + j10 \Omega = 150 \Omega + j50 \Omega$$

Mit den entsprechenden Formeln kann ich dann den Betrag  $Z$  und den Phasenverschiebungswinkel  $\varphi$  von  $\underline{Z}$  berechnen.

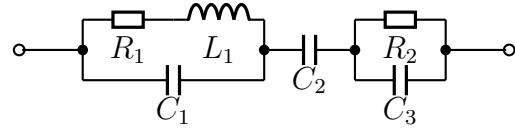
$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{(\operatorname{Re}\underline{Z})^2 + (\operatorname{Im}\underline{Z})^2} = \sqrt{(150 \Omega)^2 + (50 \Omega)^2} \approx 158 \Omega \\ \varphi &= \arctan \frac{\operatorname{Im}\underline{Z}}{\operatorname{Re}\underline{Z}} = \arctan \frac{50 \Omega}{150 \Omega} \approx 18,43^\circ \end{aligned}$$

$$Z \approx 158 \Omega$$

$$\varphi \approx 18,43^\circ$$

### 3.1.3 Aufgabe 3

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Berechnen Sie den komplexen Ersatzwiderstand  $\underline{Z}$  der Schaltung sowie seinen Betrag  $Z$  und den Phasenverschiebungswinkel  $\varphi$ . Folgende Werte sind bekannt:



$$R_1 = 100 \Omega \quad R_2 = 200 \Omega \quad L_1 = 200 \text{ mH} \quad C_1 = 2 \mu\text{F} \quad C_2 = 10 \mu\text{F} \quad C_3 = 2 \mu\text{F} \\ \omega = 1000 \text{ s}^{-1}$$

**Lösung:** Wie schon bei Aufgabe 2 bestimmen wir zunächst aus den gegebenen Daten die komplexen Wirk- und Blindwiderstände.

$$\begin{aligned} R_1 = 100 \Omega &\Rightarrow \underline{R}_1 = 100 \Omega \\ R_2 = 200 \Omega &\Rightarrow \underline{R}_2 = 200 \Omega \\ X_L = \omega \cdot L = 1000 \text{ s}^{-1} \cdot 200 \text{ mH} = 200 \Omega &\Rightarrow \underline{X}_L = j200 \Omega \\ X_{C1} = \frac{1}{\omega \cdot C_1} = \frac{1}{1000 \text{ s}^{-1} \cdot 2 \mu\text{F}} = 500 \Omega &\Rightarrow \underline{X}_{C1} = -j500 \Omega \\ X_{C2} = \frac{1}{\omega \cdot C_2} = \frac{1}{1000 \text{ s}^{-1} \cdot 10 \mu\text{F}} = 100 \Omega &\Rightarrow \underline{X}_{C2} = -j100 \Omega \\ X_{C3} = \frac{1}{\omega \cdot C_3} = \frac{1}{1000 \text{ s}^{-1} \cdot 2 \mu\text{F}} = 500 \Omega &\Rightarrow \underline{X}_{C3} = -j500 \Omega \end{aligned}$$

Als nächstes werden  $R_1$  und  $X_L$  mit Hilfe der Formel für die Reihenschaltung zu  $Z_1$  zusammengefasst.

$$\underline{Z}_1 = \underline{R}_1 + \underline{X}_{L1} = 100 \Omega + j200 \Omega$$

Nun kann man mit Hilfe der Formel für die Parallelschaltung  $Z_1$  und  $X_{C1}$  zu  $Z_2$  zusammengefasst werden. Nachdem die Werte eingesetzt und zusammengefasst sind, wird ausgeklammert, gekürzt und Konjugiert Komplex erweitert, um  $Z_2$  in Realteil und Imaginärteil aufspalten zu können.

$$\begin{aligned} \underline{Z}_2 &= \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{X}_{C1}}{\underline{Z}_1 + \underline{X}_{C1}} = \frac{(100 \Omega + j200 \Omega) \cdot (-j500 \Omega)}{100 \Omega + j200 \Omega + (-j500 \Omega)} = \frac{-j50000 \Omega^2 + 100000 \Omega^2}{100 \Omega - j300 \Omega} \\ &= \frac{100 \Omega \cdot (-j500 \Omega + 1000 \Omega)}{100 \Omega \cdot (1 - j3)} = \frac{-j500 \Omega + 1000 \Omega}{1 - j3} = \frac{(-j500 \Omega + 1000 \Omega) \cdot (1 + j3)}{(1 - j3) \cdot (1 + j3)} \\ &= \frac{-j500 \Omega + 1500 \Omega + 1000 \Omega + j3000 \Omega}{1^2 + 3^2} = \frac{2500 \Omega + j2500 \Omega}{10} = 250 \Omega + j250 \Omega \end{aligned}$$

Die Parallelschaltung aus  $R_2$  und  $X_{C3}$  nenne ich  $Z_3$  und berechne sie mit der Parallelschaltungsformel. Anschließend wird wieder zusammengefasst, ausgeklammert, gekürzt und Konjugiert Komplex erweitert.

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_3 &= \frac{\underline{R}_2 \cdot \underline{X}_{C3}}{\underline{R}_2 + \underline{X}_{C3}} = \frac{200 \Omega \cdot (-j500 \Omega)}{200 \Omega + (-j500 \Omega)} = \frac{-j100000 \Omega^2}{200 \Omega - j500 \Omega} = \frac{100 \Omega \cdot (-j1000 \Omega)}{100 \Omega \cdot (2 - j5)} \\
&= \frac{-j1000 \Omega}{2 - j5} = \frac{(-j1000 \Omega) \cdot (2 + j5)}{(2 - j5) \cdot (2 + j5)} = \frac{-j2000 \Omega + 5000 \Omega}{2^2 + 5^2} = \frac{-j2000 \Omega + 5000 \Omega}{29} \\
&\approx -j68,97 \Omega + 172,41 \Omega
\end{aligned}$$

Die drei Widerstände  $Z_2$ ,  $X_{C2}$  und  $Z_3$  sind in Reihe geschaltet. Ich kann also den Gesamt-Scheinwiderstand  $Z$  mit der Reihenschaltungsformel berechnen und zusammenfassen.

$$\underline{Z} = \underline{Z}_2 + \underline{X}_{C2} + \underline{Z}_3 = 250 \Omega + j250 \Omega - j100 \Omega - j68,97 \Omega + 172,41 \Omega = 422,41 \Omega + j81,03 \Omega$$

Der Betrag und der Phasenwinkel dieses Widerstandes kann wieder mit Hilfe der Grundformeln berechnet werden.

$$\begin{aligned}
Z &= \sqrt{(\operatorname{Re}\underline{Z})^2 + (\operatorname{Im}\underline{Z})^2} = \sqrt{(422,41 \Omega)^2 + (81,03 \Omega)^2} \approx 430,11 \Omega \\
\varphi &= \arctan \frac{\operatorname{Im}\underline{Z}}{\operatorname{Re}\underline{Z}} = \arctan \frac{81,03 \Omega}{422,41 \Omega} \approx 10,86^\circ
\end{aligned}$$

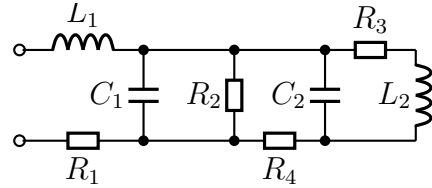
$$Z \approx 430,11 \Omega$$

$$\varphi \approx 10,86^\circ$$

### 3.1.4 Aufgabe 4

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie den Komplexen Ersatzwiderstand  $\underline{Z}$  der Schaltung! Bekannt sind folgende Werte:

$$\begin{aligned}\omega &= 100 \text{ s}^{-1} & L_1 &= 0,5 \text{ H} & L_2 &= 1 \text{ H} \\ C_1 &= 500 \text{ } \mu\text{F} & C_2 &= 100 \text{ } \mu\text{F} & R_1 &= 20 \text{ } \Omega \\ R_2 &= 50 \text{ } \Omega & R_3 &= 50 \text{ } \Omega & R_4 &= 30 \text{ } \Omega\end{aligned}$$



**Lösung:** Zur Lösung bestimme ich zunächst die entsprechenden Blindwiderstände aus der Kreisfrequenz und den  $L$ - und  $C$ -Werten.

$$\begin{aligned}X_{L1} &= \omega \cdot L_1 = 100 \text{ s}^{-1} \cdot 0,5 \text{ H} = 50 \text{ } \Omega & \Rightarrow & \underline{X}_{L1} = j50 \text{ } \Omega \\ X_{L2} &= \omega \cdot L_2 = 100 \text{ s}^{-1} \cdot 1 \text{ H} = 100 \text{ } \Omega & \Rightarrow & \underline{X}_{L2} = j100 \text{ } \Omega \\ X_{C1} &= \frac{1}{\omega \cdot C_1} = \frac{1}{100 \text{ s}^{-1} \cdot 500 \text{ } \mu\text{F}} = 20 \text{ } \Omega & \Rightarrow & \underline{X}_{C1} = -j20 \text{ } \Omega \\ X_{C2} &= \frac{1}{\omega \cdot C_2} = \frac{1}{100 \text{ s}^{-1} \cdot 100 \text{ } \mu\text{F}} = 100 \text{ } \Omega & \Rightarrow & \underline{X}_{C2} = -j100 \text{ } \Omega \\ R_1 &= 20 \text{ } \Omega & \Rightarrow & \underline{R}_1 = 20 \text{ } \Omega \\ R_2 &= 50 \text{ } \Omega & \Rightarrow & \underline{R}_2 = 50 \text{ } \Omega \\ R_3 &= 50 \text{ } \Omega & \Rightarrow & \underline{R}_3 = 50 \text{ } \Omega \\ R_4 &= 30 \text{ } \Omega & \Rightarrow & \underline{R}_4 = 30 \text{ } \Omega\end{aligned}$$

Ich beginne bei der Reihenschaltung aus  $R_3$  und  $L_2$ . Den zugehörigen Teilersatzwiderstand nenne ich  $Z_1$ .

$$\begin{aligned}\underline{Z}_1 &= \underline{R}_3 + \underline{X}_{L2} \\ \underline{Z}_1 &= 50 \text{ } \Omega + j100 \text{ } \Omega\end{aligned}$$

Parallel zu  $Z_1$  ist  $C_2$  geschaltet. Den zugehörigen Teilersatzwiderstand nenne ich  $Z_2$ .

$$\begin{aligned}\underline{Z}_2 &= \frac{\underline{X}_{C2} \cdot \underline{Z}_1}{\underline{X}_{C2} + \underline{Z}_1} \\ &= \frac{-j100 \text{ } \Omega \cdot (50 \text{ } \Omega + j100 \text{ } \Omega)}{-j100 \text{ } \Omega + 50 \text{ } \Omega + j100 \text{ } \Omega} \\ &= \frac{-j5000 \text{ } \Omega^2 + 10000 \text{ } \Omega^2}{50 \text{ } \Omega} \\ \underline{Z}_2 &= -j100 \text{ } \Omega + 200 \text{ } \Omega\end{aligned}$$

In Reihe zu  $Z_2$  ist  $R_4$  geschaltet. Den zugehörigen Teilersatzwiderstand nenne ich  $Z_3$ .

$$\begin{aligned}\underline{Z}_3 &= \underline{R}_4 + \underline{Z}_2 \\ &= 30 \text{ } \Omega - j100 \text{ } \Omega + 200 \text{ } \Omega \\ \underline{Z}_3 &= 230 \text{ } \Omega - j100 \text{ } \Omega\end{aligned}$$

Parallel zu  $Z_3$  ist  $R_2$  geschaltet. Den zugehörigen Teilersatzwiderstand nenne ich  $Z_4$ .

$$\begin{aligned}
 Z_4 &= \frac{Z_3 \cdot R_2}{Z_3 + R_2} \\
 &= \frac{(230 \Omega - j100 \Omega) \cdot 50 \Omega}{230 \Omega - j100 \Omega + 50 \Omega} \\
 &= \frac{11500 \Omega^2 - j5000 \Omega^2}{280 \Omega - j100 \Omega} \\
 &= \frac{(11500 \Omega^2 - j5000 \Omega^2) \cdot (280 \Omega + j100 \Omega)}{(280 \Omega - j100 \Omega) \cdot (280 \Omega + j100 \Omega)} \\
 &= \frac{3220000 \Omega^3 + j1150000 \Omega^3 - j1400000 \Omega^3 + 500000 \Omega^3}{78400 \Omega^2 + 10000 \Omega^2} \\
 &= \frac{3720000 \Omega^3 - j250000 \Omega^3}{88400 \Omega^2} \\
 Z_4 &\approx 42,081 \Omega - j2,828 \Omega
 \end{aligned}$$

Parallel zu  $Z_4$  ist  $C_1$  geschaltet. Den zugehörigen Teilersatzwiderstand nenne ich  $Z_5$ .

$$\begin{aligned}
 Z_5 &= \frac{Z_4 \cdot X_{C1}}{Z_4 + X_{C1}} \\
 &\approx \frac{(42,081 \Omega - j2,828 \Omega) \cdot (-j20 \Omega)}{42,081 \Omega - j2,828 \Omega - j20 \Omega} \\
 &= \frac{-j841,62 \Omega^2 - 56,56 \Omega^2}{42,081 \Omega - j22,828 \Omega} \\
 &= \frac{(-j841,62 \Omega^2 - 56,56 \Omega^2) (42,081 \Omega + j22,828 \Omega)}{(42,081 \Omega - j22,828 \Omega)(42,081 \Omega + j22,828 \Omega)} \\
 &\approx \frac{-j35416 \Omega^3 + 19212 \Omega^3 - 2380 \Omega^3 - j1291 \Omega^3}{1771 \Omega^2 + 521 \Omega^2} \\
 &= \frac{6832 \Omega^3 - j36707 \Omega^3}{2292 \Omega^2} \\
 Z_5 &\approx 7,344 \Omega - j16,02 \Omega
 \end{aligned}$$

In Reihe zu  $Z_5$  sind  $R_1$  und  $L_1$  geschaltet. Damit ergibt sich der Gesamtwiderstand  $Z$  der Schaltung.

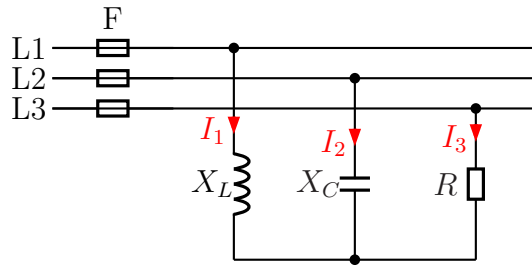
$$\begin{aligned}
 Z &= X_{L1} + Z_5 + R_1 \\
 Z &\approx j50 \Omega + 7,344 \Omega - j16,02 \Omega + 20 \Omega
 \end{aligned}$$

$$\boxed{Z \approx 27,344 \Omega + j33,98 \Omega}$$

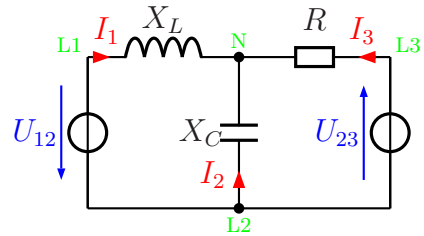
### 3.1.5 Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Ströme  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_3$  in den Außenleitern des nebenstehend dargestellten Dreiphasenwechselstromnetzes mit  $U_L = 400\text{V}$ ! Stellen Sie dazu ein Lineargleichungssystem für die drei komplexen Ströme  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$  und  $\underline{I}_3$  auf und lösen Sie das Gleichungssystem. Berechnen Sie anschließend die gesuchten Beträge der Ströme  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_3$ . Bekannt sind die Werte:

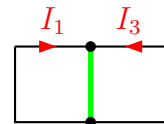
$$X_L = 100\ \Omega; \quad X_C = 200\ \Omega; \quad R = 50\ \Omega$$



**Lösung:** Um einen besseren Überblick zu erhalten, wird die Schaltung zunächst etwas umgezeichnet. Dabei werden aus dem Dreiphasen-Wechselspannungsnetz nur die Spannungen  $U_{12}$  und  $U_{23}$  verwendet; mit diesen wird aber trotzdem das komplette Netz vollständig beschrieben. Zur besseren Orientierung habe ich die Punkte, die die Außenleiter **L1**, **L2** und **L3** sowie den Sternpunkt **N** bezeichnen, mit in die Schaltung eingetragen.



Nebenstehend ist das Gerippe der Schaltung dargestellt, mit dem ich die Schaltung analysieren möchte. Da ich mit dem **Maschenstromverfahren**<sup>1</sup> arbeiten möchte, wähle ich zunächst einen „**Vollständigen Baum**“, der alle Knoten (hier allerdings nur zwei) auf einem eindeutigen Weg miteinander verbindet. Dieser auf einen einzigen Strich „verkümmerte“ Baum ist in **grüner** Farbe dargestellt. Damit ergeben sich die Maschenströme  $I_1$  und  $I_3$ , mit denen das Gleichungssystem aufgestellt wird. Die Masche 1 verläuft über  $X_L$ ,  $X_C$  und  $U_{12}$ , Masche 3 entsprechend über  $R$ ,  $X_C$  und  $U_{23}$ .



Bevor wir beginnen können, sollten wir die komplexen Spannungen festlegen. Ich lege  $\underline{U}_{12}$  in die reelle Richtung. Damit ist:

$$\underline{U}_{12} = 400\ \text{V}$$

Die Spannung  $\underline{U}_{23}$  eilt der Spannung  $\underline{U}_{12}$  um  $120^\circ$  nach. Damit ergibt sich für  $\underline{U}_{23}$ :

$$\underline{U}_{23} = 400\ \text{V} \cdot e^{-j120^\circ} = 400\ \text{V} \cdot \left( \cos(-120^\circ) + j \sin(-120^\circ) \right) \approx -200\ \text{V} - j346,4\ \text{V}$$

<sup>1</sup>Einzelheiten zum Maschenstromverfahren siehe hier in Kapitel 7:

<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/netzwerk.pdf>



Weiterhin ist:

$$\underline{X}_L = jX_L = j100 \Omega$$

$$\underline{X}_C = -jX_C = -j200 \Omega$$

Jetzt können wir einen Maschenumlauf für Masche 1 und Masche 3 aufstellen.

$$\begin{array}{rcl} (1) & \underline{X}_L \cdot \underline{I}_1 + \underline{X}_C \cdot (\underline{I}_1 + \underline{I}_3) - \underline{U}_{12} & = 0 \\ (3) & \underline{R} \cdot \underline{I}_2 + \underline{X}_C \cdot (\underline{I}_2 + \underline{I}_1) + \underline{U}_{23} & = 0 \\ \hline (1) & \underline{X}_L \cdot \underline{I}_1 + \underline{X}_C \cdot \underline{I}_1 + \underline{X}_C \cdot \underline{I}_3 & = \underline{U}_{12} \\ (3) & \underline{R} \cdot \underline{I}_2 + \underline{X}_C \cdot \underline{I}_2 + \underline{X}_C \cdot \underline{I}_1 & = -\underline{U}_{23} \\ \hline (1) & (\underline{X}_L + \underline{X}_C) \cdot \underline{I}_1 + \underline{X}_C \cdot \underline{I}_3 & = \underline{U}_{12} \\ (3) & \underline{X}_C \cdot \underline{I}_1 + (\underline{R} + \underline{X}_C) \cdot \underline{I}_2 & = -\underline{U}_{23} \end{array}$$

Nun können die gegebenen Werte eingesetzt werden.

$$\begin{array}{rcl} (1) & (\underline{X}_L + \underline{X}_C) \cdot \underline{I}_1 & + \underline{X}_C \cdot \underline{I}_3 = \underline{U}_{12} \\ (3) & \underline{X}_C \cdot \underline{I}_1 & + (\underline{R} + \underline{X}_C) \cdot \underline{I}_3 = -\underline{U}_{23} \\ \hline (1) & (j100 \Omega - j200 \Omega) \cdot \underline{I}_1 & - j200 \Omega \cdot \underline{I}_3 = 400 \text{ V} \\ (3) & -j200 \Omega \cdot \underline{I}_1 & + (50 \Omega - j200 \Omega) \cdot \underline{I}_3 = 200 \text{ V} + j346,4 \text{ V} \\ \hline (1) & -j100 \Omega \cdot \underline{I}_1 & - j200 \Omega \cdot \underline{I}_3 = 400 \text{ V} \\ (3) & -j200 \Omega \cdot \underline{I}_1 & + (50 \Omega - j200 \Omega) \cdot \underline{I}_3 = 200 \text{ V} + j346,4 \text{ V} \end{array}$$

Multipliziert man Gleichung (1) mit  $-2$ , dann können die beiden Gleichungen einfach addiert werden.  $\underline{I}_1$  fällt dann weg.

$$\begin{array}{rcl} (1) & -j100 \Omega \cdot \underline{I}_1 & - j200 \Omega \cdot \underline{I}_3 = 400 \text{ V} & | \cdot (-2) \\ (3) & -j200 \Omega \cdot \underline{I}_1 & + (50 \Omega - j200 \Omega) \cdot \underline{I}_3 = 200 \text{ V} + j346,4 \text{ V} \\ \hline (1) & j200 \Omega \cdot \underline{I}_1 & + j400 \Omega \cdot \underline{I}_3 = -800 \text{ V} & | \\ (3) & -j200 \Omega \cdot \underline{I}_1 & + (50 \Omega - j200 \Omega) \cdot \underline{I}_3 = 200 \text{ V} + j346,4 \text{ V} & | + \\ \hline & & (50 \Omega + j200 \Omega) \cdot \underline{I}_3 = -600 \text{ V} + j346,4 \text{ V} \\ & & \underline{I}_3 = \frac{-600 \text{ V} + j346,4 \text{ V}}{50 \Omega + j200 \Omega} \\ & & \underline{I}_3 = \frac{-12 + j6,928}{1 + j4} \text{ A} \\ & & \underline{I}_3 = \frac{-12 + j6,928}{1 + j4} \cdot \frac{1 - j4}{1 - j4} \text{ A} \\ & & \underline{I}_3 = \frac{-12 + j48 + j6,928 + 27,712}{1 + 16} \text{ A} \\ & & \underline{I}_3 = \frac{15,712 + j54,928}{17} \text{ A} \\ & & \underline{I}_3 \approx 0,9242 \text{ A} + j3,231 \text{ A} \end{array}$$

Zur Bestimmung von  $\underline{I}_1$  setze ich das Ergebnis in Gleichung (1) ein.

$$\begin{array}{rcl} -j100 \Omega \cdot \underline{I}_1 - j200 \Omega \cdot (0,9242 \text{ A} + j3,231 \text{ A}) & = & 400 \text{ V} \\ -j100 \Omega \cdot \underline{I}_1 - j184,84 \text{ V} + 646,2 \text{ V} & = & 400 \text{ V} \quad | + j184,84 \text{ V} - 646,2 \text{ V} \\ -j100 \Omega \cdot \underline{I}_1 & = & j184,84 \text{ V} - 246,2 \text{ V} \quad | : (-j100 \Omega) \\ \underline{I}_1 & = & \frac{j184,84 \text{ V} - 246,2 \text{ V}}{-j100 \Omega} \cdot \frac{j}{j} \\ \underline{I}_1 & = & \frac{-184,84 \text{ V} - j246,2 \text{ V}}{100 \Omega} \\ \underline{I}_1 & \approx & -1,8484 \text{ A} - j2,462 \text{ A} \end{array}$$

Mit diesen Ergebnissen kann nun auch  $\underline{I}_2$  bestimmt werden. Nach der Kirchhoffschen Knotenregel gilt:

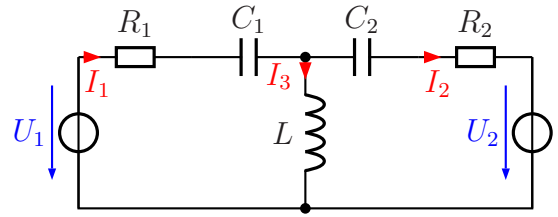
$$\begin{aligned} \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 &= 0 \quad | -\underline{I}_1 - \underline{I}_3 \\ \underline{I}_2 &= -\underline{I}_1 - \underline{I}_3 \\ \underline{I}_2 &= -(-1,8484 \text{ A} - j2,462 \text{ A}) - (0,9242 \text{ A} + j3,231 \text{ A}) \\ \underline{I}_2 &= 1,8484 \text{ A} + j2,462 \text{ A} - 0,9242 \text{ A} - j3,231 \text{ A} \\ \underline{I}_2 &\approx 0,9242 \text{ A} - j0,769 \text{ A} \end{aligned}$$

Mit diesen Daten können wir nun die Beträge der drei Ströme bestimmen. Zur Erinnerung vorweg die zugehörige Grundformel:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{(\operatorname{Re}\underline{I})^2 + (\operatorname{Im}\underline{I})^2} \\ I_1 &= \sqrt{(1,8484 \text{ A})^2 + (2,462 \text{ A})^2} \approx 3,079 \text{ A} \\ I_2 &= \sqrt{(0,9242 \text{ A})^2 + (0,769 \text{ A})^2} \approx 1,202 \text{ A} \\ I_3 &= \sqrt{(0,9242 \text{ A})^2 + (3,231 \text{ A})^2} \approx 3,361 \text{ A} \end{aligned}$$

### 3.1.6 Aufgabe 6

Die Ströme in nebenstehende Schaltung können durch ein Lineargleichungssystem beschrieben werden. Stellen Sie das Gleichungssystem auf und berechnen Sie die komplexen Ströme  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$  und  $\underline{I}_3$ . Bekannt sind die Werte:  
 $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ;  $X_{C1} = 3 \text{ k}\Omega$   
 $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$ ;  $X_{C2} = 4 \text{ k}\Omega$   
 $X_L = 2 \text{ k}\Omega$ ;  $\underline{U}_1 = j4 \text{ V}$ ;  $\underline{U}_2 = 4 \text{ V}$

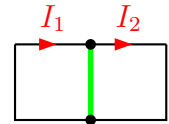


**Lösung:** Vorweg können  $R_1$  und  $C_1$  zu  $Z_1$  und  $R_2$  und  $C_2$  zu  $Z_2$  zusammengefasst werden.

$$Z_1 = R_1 + X_{C1} = 1 \text{ k}\Omega - j3 \text{ k}\Omega$$

$$Z_2 = R_2 + X_{C2} = 2 \text{ k}\Omega - j4 \text{ k}\Omega$$

Nebenstehend ist das Gerippe der Schaltung dargestellt, mit dem ich die Schaltung analysieren möchte. Da ich mit dem **Maschenstromverfahren**<sup>2</sup> arbeiten möchte, wähle ich zunächst einen „**Vollständigen Baum**“, der alle Knoten (hier allerdings nur zwei) auf einem eindeutigen Weg miteinander verbindet. Dieser auf einen einzigen Strich „verkümmerte“ Baum ist in **grüner** Farbe dargestellt. Damit ergeben sich die Maschenströme  $I_1$  und  $I_2$ , mit denen das Gleichungssystem aufgestellt wird. Die Masche 1 verläuft über  $Z_1$ ,  $X_L$  und  $U_1$ , Masche 2 entsprechend über  $Z_2$ ,  $U_2$  und  $X_L$ .



$$(1) \quad Z_1 \cdot \underline{I}_1 + X_L \cdot (\underline{I}_1 - \underline{I}_2) - \underline{U}_1 = 0$$

$$(2) \quad Z_2 \cdot \underline{I}_2 + X_L \cdot (\underline{I}_2 - \underline{I}_1) + \underline{U}_2 = 0$$

$$(1) \quad Z_1 \cdot \underline{I}_1 + X_L \cdot \underline{I}_1 - X_L \cdot \underline{I}_2 = \underline{U}_1$$

$$(2) \quad Z_2 \cdot \underline{I}_2 + X_L \cdot \underline{I}_2 - X_L \cdot \underline{I}_1 = -\underline{U}_2$$

$$(1) \quad (Z_1 + X_L) \cdot \underline{I}_1 - X_L \cdot \underline{I}_2 = \underline{U}_1$$

$$(2) \quad -X_L \cdot \underline{I}_1 + (Z_2 + X_L) \cdot \underline{I}_2 = -\underline{U}_2$$

Nun können die gegebenen Werte eingesetzt werden.

(1)	$(Z_1 + X_L) \cdot \underline{I}_1$	$-X_L \cdot \underline{I}_2$	$= \underline{U}_1$
(2)	$-X_L \cdot \underline{I}_1$	$+(Z_2 + X_L) \cdot \underline{I}_2$	$= -\underline{U}_2$
(1)	$(1 \text{ k}\Omega - j3 \text{ k}\Omega + j2 \text{ k}\Omega) \cdot \underline{I}_1$	$-j2 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_2$	$= j4 \text{ V}$
(2)	$-j2 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_1$	$+(2 \text{ k}\Omega - j4 \text{ k}\Omega + j2 \text{ k}\Omega) \cdot \underline{I}_2$	$= -4 \text{ V}$
(1)	$(1 \text{ k}\Omega - j1 \text{ k}\Omega) \cdot \underline{I}_1$	$-j2 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_2$	$= j4 \text{ V}$
(2)	$-j2 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_1$	$+(2 \text{ k}\Omega - j2 \text{ k}\Omega) \cdot \underline{I}_2$	$= -4 \text{ V}$

<sup>2</sup>Einzelheiten zum Maschenstromverfahren siehe hier in Kapitel 7:

<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/netzwerk.pdf>

Zur Lösung kann man natürlich jedes beliebige Lösungsverfahren für Lineargleichungssysteme verwenden.<sup>3</sup>

Ich möchte gern das Additions-/Subtraktionsverfahren verwenden. Damit beim Addieren die Variable  $I_1$  wegfällt, multipliziere ich Gleichung (1) mit  $j2$  und Gleichung (2) mit  $(1 - j1)$ .

$$\begin{array}{rcl}
 (1) & (1 \text{ k}\Omega - j1 \text{ k}\Omega) \cdot I_1 & -j2 \text{ k}\Omega \cdot I_2 = j4 \text{ V} & | \cdot (j2) \\
 (2) & -j2 \text{ k}\Omega \cdot I_1 & +(2 \text{ k}\Omega - j2 \text{ k}\Omega) \cdot I_2 = -4 \text{ V} & | \cdot (1 - j1) \\
 \hline
 (1) & (j2 \text{ k}\Omega - j^2 2 \text{ k}\Omega) \cdot I_1 & -j^2 4 \text{ k}\Omega \cdot I_2 = j^2 8 \text{ V} & \\
 (2) & (-j2 \text{ k}\Omega + j^2 2 \text{ k}\Omega) \cdot I_1 & +(2 \text{ k}\Omega - j2 \text{ k}\Omega - j2 \text{ k}\Omega + j^2 2 \text{ k}\Omega) \cdot I_2 = -4 \text{ V} + j4 \text{ V} & \\
 \hline
 (1) & (j2 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega) \cdot I_1 & +4 \text{ k}\Omega \cdot I_2 = -8 \text{ V} & \\
 (2) & (-j2 \text{ k}\Omega - 2 \text{ k}\Omega) \cdot I_1 & +(2 \text{ k}\Omega - j2 \text{ k}\Omega - j2 \text{ k}\Omega - 2 \text{ k}\Omega) \cdot I_2 = -4 \text{ V} + j4 \text{ V} & \\
 \hline
 (1) & (j2 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega) \cdot I_1 & +4 \text{ k}\Omega \cdot I_2 = -8 \text{ V} & | \\
 (2) & (-j2 \text{ k}\Omega - 2 \text{ k}\Omega) \cdot I_1 & -j4 \text{ k}\Omega \cdot I_2 = -4 \text{ V} + j4 \text{ V} & | + \\
 \hline
 & & (4 \text{ k}\Omega - j4 \text{ k}\Omega) \cdot I_2 = -12 \text{ V} + j4 \text{ V} & | : (4 \text{ k}\Omega - j4 \text{ k}\Omega) \\
 & & I_2 = \frac{-12 \text{ V} + j4 \text{ V}}{4 \text{ k}\Omega - j4 \text{ k}\Omega} & \\
 & & I_2 = \frac{-3 + j1}{1 - j1} \text{ mA} & \\
 & & I_2 = \frac{(-3 + j1) \cdot (1 + j1)}{(1 - j1) \cdot (1 + j1)} \text{ mA} & \\
 & & I_2 = \frac{-3 - j3 + j + j^2}{1 - j^2} \text{ mA} & \\
 & & I_2 = \frac{-3 - j3 + j - 1}{2} \text{ mA} & \\
 & & I_2 = \frac{-4 - j2}{2} \text{ mA} & \\
 & & I_2 = -2 \text{ mA} - j1 \text{ mA} & 
 \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in Gleichung (2) ein, um  $I_1$  zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
 -j2 \text{ k}\Omega \cdot I_1 + (2 \text{ k}\Omega - j2 \text{ k}\Omega) \cdot I_2 &= -4 \text{ V} \\
 -j2 \text{ k}\Omega \cdot I_1 + (2 \text{ k}\Omega - j2 \text{ k}\Omega) \cdot (-2 \text{ mA} - j1 \text{ mA}) &= -4 \text{ V} \\
 -j2 \text{ k}\Omega \cdot I_1 - 4 \text{ V} - j2 \text{ V} + j4 \text{ V} + j^2 2 \text{ V} &= -4 \text{ V} \\
 -j2 \text{ k}\Omega \cdot I_1 - 4 \text{ V} - j2 \text{ V} + j4 \text{ V} - 2 \text{ V} &= -4 \text{ V} \\
 -j2 \text{ k}\Omega \cdot I_1 - 6 \text{ V} + j2 \text{ V} &= -4 \text{ V} & | + 6 \text{ V} - j2 \text{ V} \\
 -j2 \text{ k}\Omega \cdot I_1 &= 2 \text{ V} - j2 \text{ V} & | : (-j2 \text{ k}\Omega) \\
 I_1 &= \frac{2 \text{ V} - j2 \text{ V}}{-j2 \text{ k}\Omega} \cdot \frac{j}{j} \\
 I_1 &= \frac{j2 \text{ V} - j^2 2 \text{ V}}{-j^2 2 \text{ k}\Omega} \\
 I_1 &= \frac{j2 \text{ V} + 2 \text{ V}}{2 \text{ k}\Omega} \\
 I_1 &= 1 \text{ mA} + j1 \text{ mA}
 \end{aligned}$$

<sup>3</sup>In Frage kommt beispielsweise das Einsetzungsverfahren, das Additions-/Subtraktionsverfahren, die Cramersche Regel oder das Gauß-Jordan-Verfahren. Einzelheiten zu den verschiedenen Verfahren sind hier zu finden:

Einsetzungsverfahren: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/einsetz.pdf>

Additions-/Subtraktionsverfahren: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/add.pdf>

Cramersche Regel: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/cramer.pdf>

Gauß-Jordan-Verfahren: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/gauss.pdf>

Damit kann nun  $\underline{I}_3$  bestimmt werden:

$$\begin{aligned}\underline{I}_3 &= \underline{I}_1 - \underline{I}_2 \\ &= 1 \text{ mA} + j1 \text{ mA} - (-2 \text{ mA} - j1 \text{ mA}) \\ &= 1 \text{ mA} + j1 \text{ mA} + 2 \text{ mA} + j1 \text{ mA} \\ \underline{I}_3 &= 3 \text{ mA} + j2 \text{ mA}\end{aligned}$$

Zusammengefasstes Ergebnis:

$$\underline{I}_1 = 1 \text{ mA} + j1 \text{ mA}$$

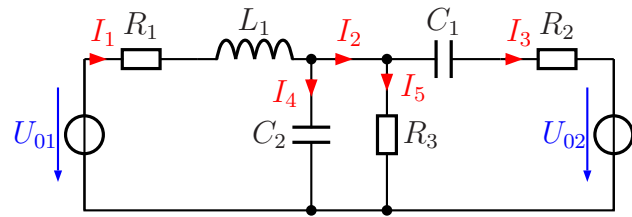
$$\underline{I}_2 = -2 \text{ mA} - j1 \text{ mA}$$

$$\underline{I}_3 = 3 \text{ mA} + j2 \text{ mA}$$

### 3.1.7 Aufgabe 7

Nebenstehende Schaltung ist an zwei Spannungsquellen  $U_{01}$  und  $U_{02}$  mit einer Spannung von je 60 V angeschlossen. Die Phasenverschiebung zwischen diesen beiden Spannungen beträgt  $0^\circ$ . Berechnen Sie die Komplexen Ströme  $\underline{I}_1$  bis  $\underline{I}_5$ . Bekannt sind diese Werte:

$$R_1 = 6 \Omega; \quad R_2 = 3 \Omega; \quad R_3 = 10 \Omega; \\ X_{C1} = 6 \Omega \quad X_{C2} = 15 \Omega \quad X_{L1} = 12 \Omega$$



**Lösung:** Zunächst stelle ich die gegebenen Größen als komplexe Werte auf. Da beide Spannungen die gleiche Phasenlage haben, lege ich die Spannungen entlang der reellen Achse fest:

$$\underline{U}_{01} = \underline{U}_{02} = 60 \text{ V}$$

Die anderen komplexen Größen können aufgestellt werden:

$$\underline{R}_1 = 6 \Omega$$

$$\underline{R}_2 = 3 \Omega$$

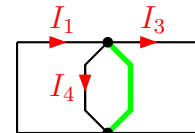
$$\underline{R}_3 = 10 \Omega$$

$$\underline{X}_{C1} = -j6 \Omega$$

$$\underline{X}_{C2} = -j15 \Omega$$

$$\underline{X}_{L1} = j12 \Omega$$

Nebenstehend ist das Gerippe der Schaltung dargestellt, mit dem ich die Schaltung analysieren möchte. Da ich mit dem **Maschenstromverfahren**<sup>4</sup> arbeiten möchte, wähle ich zunächst einen „**Vollständigen Baum**“, der alle Knoten (hier allerdings nur zwei) auf einem eindeutigen Weg miteinander verbindet. Die beiden Knoten über bzw. unter  $C_2$  und  $R_3$  sind in Wahrheit nur jeweils ein Knoten, da sie leitend miteinander verbunden sind. Dieser auf einen einzigen Strich „verkümmerte“ Baum ist in grüner Farbe dargestellt. Damit ergeben sich die Maschenströme  $I_1$ ,  $I_3$  und  $I_4$ , mit denen das Gleichungssystem aufgestellt wird. Der Strom  $I_2$  bleibt zunächst außen vor, er wird zum Schluss berechnet.



<sup>4</sup>Einzelheiten zum Maschenstromverfahren siehe hier in Kapitel 7:

<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/netzwerk.pdf>

Mit diesem Baum können nun die Maschengleichungen aufgestellt werden.

$$\begin{array}{l}
 (1) \quad (\underline{R}_1 + \underline{X}_{L1} + \underline{R}_3) \cdot \underline{I}_1 \qquad \qquad \qquad -\underline{R}_3 \cdot \underline{I}_3 \qquad \qquad \qquad -\underline{R}_3 \cdot \underline{I}_4 = \underline{U}_{01} \\
 (3) \qquad \qquad \qquad -\underline{R}_3 \cdot \underline{I}_1 \quad +(\underline{R}_3 + \underline{X}_{C1} + \underline{R}_2) \cdot \underline{I}_3 \qquad \qquad \qquad +\underline{R}_3 \cdot \underline{I}_4 = -\underline{U}_{02} \\
 (4) \qquad \qquad \qquad -\underline{R}_3 \cdot \underline{I}_1 \qquad \qquad \qquad +\underline{R}_3 \cdot \underline{I}_2 \quad +(\underline{X}_{C2} + \underline{R}_3) \cdot \underline{I}_4 = 0
 \end{array}$$

Um die Rechnung etwas zu vereinfachen trage ich die Zahlenwerte ohne Einheiten ein. Die Widerstände werden in Ohm und die Spannungen in Volt eingetragen, dann erhalten wir die Einheit Ampere für die sich ergebenden Ströme.

$$\begin{array}{l}
 (1) \quad (16 + j12) \cdot \underline{I}_1 \qquad \qquad \qquad -10 \cdot \underline{I}_3 \qquad \qquad \qquad -10 \cdot \underline{I}_4 = 60 \\
 (3) \qquad \qquad \qquad -10 \cdot \underline{I}_1 \quad + (13 - j6) \cdot \underline{I}_3 \qquad \qquad \qquad +10 \cdot \underline{I}_4 = -60 \\
 (4) \qquad \qquad \qquad -10 \cdot \underline{I}_1 \qquad \qquad \qquad +10 \cdot \underline{I}_3 \quad + (10 - j15) \cdot \underline{I}_4 = 0
 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem kann nun mit einem beliebigen Verfahren gelöst werden.<sup>5</sup> Ich möchte hier die Cramersche Regel verwenden.

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 60 & -10 & -10 \\ -60 & (13 - j6) & 10 \\ 0 & 10 & (10 - j15) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (16 + j12) & -10 & -10 \\ -10 & (13 - j6) & 10 \\ -10 & 10 & (10 - j15) \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{60 \cdot (13 - j6) \cdot (10 - j15) + (-10) \cdot (-60) \cdot 10}{(16 + j12) \cdot (13 - j6) \cdot (10 - j15) + (-10) \cdot 10 \cdot (-10) + (-10) \cdot (-10) \cdot 10 - 10 \cdot 10 \cdot 60 - (10 - j15) \cdot (-60) \cdot (-10)} \dots \\
 &\dots \frac{-(-10) \cdot (13 - j6) \cdot (-10) - 10 \cdot 10 \cdot (16 + j12) - (10 - j15) \cdot (-10) \cdot (-10)}{(2400 - j15300) + 6000 - 6000 - (6000 - j9000)} \\
 &= \frac{(3700 - j3600) + 1000 + 1000 - (1300 - j600) - (1600 + j1200) - (1000 - j1500)}{2400 - j15300 + 6000 - 6000 - 6000 + j9000} \\
 &= \frac{3700 - j3600 + 1000 + 1000 - 1300 + j600 - 1600 - j1200 - 1000 + j1500}{-3600 - j6300} \\
 &= \frac{1800 - j2700}{-36 - j63} \\
 &= \frac{18 - j27}{(-36 - j63) \cdot (18 + j27)} \\
 &= \frac{(18 - j27) \cdot (18 + j27)}{-648 - j972 - j1134 + 1701} \\
 &= \frac{324 + 729}{1053 - j2106} \\
 \underline{I}_1 &= 1 - j2
 \end{aligned}$$

<sup>5</sup>In Frage kommt beispielsweise das Einsetzungsverfahren, das Additions-/Subtraktionsverfahren, die Cramersche Regel oder das Gauß-Jordan-Verfahren. Einzelheiten zu den verschiedenen Verfahren sind hier zu finden:

Einsetzungsverfahren: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/einsetz.pdf>

Additions-/Subtraktionsverfahren: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/add.pdf>

Cramersche Regel: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/cramer.pdf>

Gauß-Jordan-Verfahren: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/gauss.pdf>

Ergebnis:  $\mathbf{I_1 = 1\text{ A} - j2\text{ A}}$

Als nächstes kann der Strom  $\mathbf{I_3}$  bestimmt werden. Da im Nenner für alle Ströme die selbe Determinante steht, kann dieser Wert hier sofort eingesetzt werden. Er wurde ja schon für  $\mathbf{I_1}$  bestimmt.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I_3} &= \frac{\begin{vmatrix} (16 + j12) & 60 & -10 \\ -10 & -60 & 10 \\ -10 & 0 & (10 - j15) \end{vmatrix}}{1800 - j2700} \\
 &= \frac{(16 + j12) \cdot (-60) \cdot (10 - j15) + 60 \cdot 10 \cdot (-10) - (-10) \cdot (-60) \cdot (-10) - (10 - j15) \cdot (-10) \cdot 60}{1800 - j2700} \\
 &= \frac{(-20400 + j7200) - 6000 + 6000 - (-6000 + j9000)}{1800 - j2700} \\
 &= \frac{-20400 + j7200 - 6000 + 6000 + 6000 - j9000}{1800 - j2700} \\
 &= \frac{-14400 - j1800}{1800 - j2700} \\
 &= \frac{-144 - j18}{18 - j27} \\
 &= \frac{(-144 - j18) \cdot (18 + j27)}{(18 - j27) \cdot (18 + j27)} \\
 &= \frac{-2592 - j3888 - j324 + 486}{324 + 729} \\
 &= \frac{-2106 - j4212}{1053} \\
 \mathbf{I_3} &= -2 - j4
 \end{aligned}$$

Ergebnis:  $\mathbf{I_3 = -2\text{ A} - j4\text{ A}}$

Zur Bestimmung von  $\mathbf{I_4}$  verwende ich Gleichung (3), weil hier am Schluss nur durch die reelle Zahl 10 dividiert werden muss.

$$\begin{aligned}
 -10 \cdot \mathbf{I_1} + (13 - j6) \cdot \mathbf{I_3} + 10 \cdot \mathbf{I_4} &= -60 \\
 -10 \cdot (1 - j2) + (13 - j6) \cdot (-2 - j4) + 10 \cdot \mathbf{I_4} &= -60 \\
 -10 + j20 - 26 - j52 + j12 - 24 + 10 \cdot \mathbf{I_2} &= -60 \\
 -60 - j20 + 10 \cdot \mathbf{I_2} &= -60 \quad | +60 + j20 \\
 10 \cdot \mathbf{I_2} &= j20 \quad | :10 \\
 \mathbf{I_2} &= j2
 \end{aligned}$$

Ergebnis:  $\mathbf{I_4 = j2\text{ A}}$

Damit ist das Gleichungssystem gelöst. Es fehlen aber noch die Ströme  $\mathbf{I_2}$  und  $\mathbf{I_5}$ . Dazu gehen wir in die Originalschaltung hinein. Ab Knoten rechts von  $L_1$  kann die Knotengleichung zur Bestimmung von  $\mathbf{I_2}$  aufgestellt werden.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I_1} &= \mathbf{I_2} + \mathbf{I_4} & | -\mathbf{I_4} \\
 \mathbf{I_1} - \mathbf{I_4} &= \mathbf{I_2} \\
 \mathbf{I_2} &= (1\text{ A} - j2\text{ A}) - j2\text{ A} \\
 \mathbf{I_2} &= 1\text{ A} - j4\text{ A}
 \end{aligned}$$



Ergebnis:  $\underline{I}_2 = 1 \text{ A} - j4 \text{ A}$

Zur Bestimmung von  $\underline{I}_5$  verwendet man sinngemäß den Knoten oberhalb von  $R_3$ .

$$\begin{aligned}\underline{I}_2 &= \underline{I}_5 + \underline{I}_3 && | - \underline{I}_3 \\ \underline{I}_2 - \underline{I}_3 &= \underline{I}_5 \\ \underline{I}_5 &= (1 \text{ A} - j4 \text{ A}) - (-2 \text{ A} - j4 \text{ A}) \\ \underline{I}_5 &= 1 \text{ A} - j4 \text{ A} + 2 \text{ A} + j4 \text{ A} \\ \underline{I}_5 &= 3 \text{ A}\end{aligned}$$

Ergebnis:  $\underline{I}_5 = 3 \text{ A}$

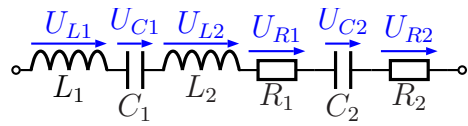
Hier noch einmal alle Ergebnisse zusammengefasst:

$\underline{I}_1 = 1 \text{ A} - j2 \text{ A}$
$\underline{I}_2 = 1 \text{ A} - j4 \text{ A}$
$\underline{I}_3 = -2 \text{ A} - j4 \text{ A}$
$\underline{I}_4 = j2 \text{ A}$
$\underline{I}_5 = 3 \text{ A}$

### 3.1.8 Aufgabe 8

Gegeben ist die nebenstehende Schaltung mit diesen Werten:

$$\begin{aligned} L_1 &= 0,11 \text{ H} & L_2 &= 21 \text{ mH}, \\ C_1 &= 150 \mu\text{F} & C_2 &= 300 \mu\text{F}, \\ R_1 &= 10 \Omega & R_2 &= 20 \Omega \\ \omega &= 300 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$



1. Bestimmen Sie den komplexen Ersatzwiderstand  $\underline{Z}$  der Schaltung!
2. Geben Sie eine Ersatzschaltung mit zwei Bauelementen an!
3. Bestimmen Sie den komplexen Strom  $\underline{I}$ , wenn eine Spannung von  $\underline{U}_0 = 12 \text{ V}$  angelegt wird! Bestimmen Sie auch den Betrag des Stromes  $I$  sowie seinen Phasenverschiebungswinkel  $\varphi$  gegenüber der Spannung  $\underline{U}_0$ .
4. Bestimmen Sie die komplexe Spannung  $\underline{U}_{L1}$  an der Induktivität  $L_1$  für diesen Fall sowie ihren Betrag  $U_{L1}$  und die Phasenverschiebung gegenüber der Spannung  $\underline{U}_0$ .

#### Lösung:

**zu 1:** Zuerst werden alle Blindwiderstände berechnet.

$$\underline{X}_{L1} = j\omega L_1 = j300 \text{ s}^{-1} \cdot 0,11 \text{ H} = j33 \Omega$$

$$\underline{X}_{L2} = j\omega L_2 = j300 \text{ s}^{-1} \cdot 0,021 \text{ H} = j6,2 \Omega$$

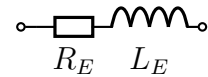
$$\underline{X}_{C1} = \frac{1}{j\omega C_1} = \frac{1}{j300 \text{ s}^{-1} \cdot 150 \cdot 10^{-6} \text{ F}} = -j22,2 \Omega$$

$$\underline{X}_{C2} = \frac{1}{j\omega C_2} = \frac{1}{j300 \text{ s}^{-1} \cdot 300 \cdot 10^{-6} \text{ F}} = -j11,1 \Omega$$

Damit kann der Scheinwiderstand der gesamten Schaltung bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{X}_{L1} + \underline{X}_{C1} + \underline{X}_{L2} + \underline{R}_1 + \underline{X}_{C2} + \underline{R}_2 \\ &= j33 \Omega - j22,2 \Omega + j6,2 \Omega + 10 \Omega - j11,1 \Omega + 20 \Omega \\ \underline{Z} &= 30 \Omega + j5,9 \Omega \end{aligned}$$

**zu 2:** Nebenstehend ist die Ersatzschaltung mit einem Ohmschen Widerstand  $R_E = 30 \Omega$  und einer Induktivität  $L_E$  mit  $X_L = j5,9 \Omega$ .



Die Induktivität  $L_E$  wird bestimmt:

$$\begin{aligned} X_L &= j\omega L_E & | : j\omega \\ \frac{X_L}{j\omega} &= L_E \\ L_E &= \frac{j5,9 \Omega}{j300 \text{ s}^{-1}} \\ L_E &= 19,7 \text{ mH} \end{aligned}$$

**zu 3:**

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \frac{U_0}{Z} \\ &= \frac{12 \text{ V}}{30 \Omega + j5,9 \Omega} \\ &= \frac{12 \text{ V} \cdot (30 \Omega - j5,9 \Omega)}{(30 \Omega + j5,9 \Omega) \cdot (30 \Omega - j5,9 \Omega)} \\ &= \frac{360 \text{ V}\Omega - j70,8 \text{ V}\Omega}{900 \Omega^2 + 34,8 \Omega^2} \\ &= \frac{360 \text{ V}\Omega - j70,8 \text{ V}\Omega}{934,8 \Omega^2} \\ \underline{I} &= 385,1 \text{ mA} - j75,7 \text{ mA} \end{aligned}$$

Betrag des Stromes:

$$\begin{aligned} |\underline{I}| &= \sqrt{(\text{Re}(\underline{I}))^2 + (\text{Im}(\underline{I}))^2} \\ &= \sqrt{(385,1 \text{ mA})^2 + (-75,7 \text{ mA})^2} \\ I &= 392,5 \text{ mA} \end{aligned}$$

Phasenverschiebungswinkel:

$$\begin{aligned} \varphi_I &= \arctan \frac{\text{Im}(\underline{I})}{\text{Re}(\underline{I})} \\ &= \arctan \frac{-75,7 \text{ mA}}{385,1 \text{ mA}} \\ \varphi_I &= -11,1^\circ \end{aligned}$$

Ergebnis: Der Strom  $\underline{I}$  eilt der Spannung  $\underline{U}_0$  um  $11,1^\circ$  nach.

zu 4:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{L1} &= \underline{X}_{L1} \cdot \underline{I} \\ &= j33 \Omega \cdot (385,1 \text{ mA} - j75,7 \text{ mA}) \\ \underline{U}_{L1} &= j12,708 \text{ V} + 2,498 \text{ V} \end{aligned}$$

Betrag:

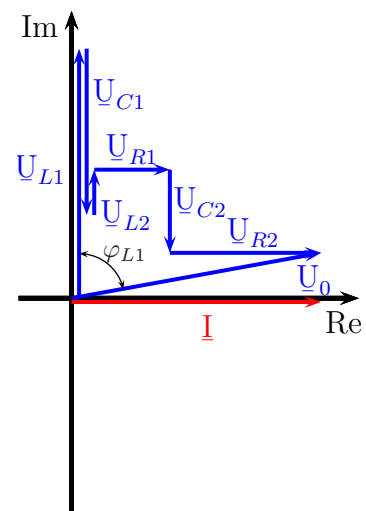
$$\begin{aligned} |\underline{U}_{L1}| &= \sqrt{(\text{Re}(\underline{U}_{L1}))^2 + (\text{Im}(\underline{U}_{L1}))^2} \\ &= \sqrt{(2,498 \text{ V})^2 + (12,708 \text{ V})^2} \\ U_{L1} &= 12,95 \text{ V} \end{aligned}$$

Phasenverschiebungswinkel zwischen  $\underline{U}_0$  und  $\underline{U}_{L1}$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{L1} &= \arctan \frac{\text{Im}(\underline{U}_{L1})}{\text{Re}(\underline{U}_{L1})} \\ &= \arctan \frac{12,708 \text{ V}}{2,498 \text{ V}} \\ \varphi_{L1} &= 78,9^\circ \end{aligned}$$

Das ist zunächst das rechnerische Ergebnis. Aber ist das auch richtig?

Zur Veranschaulichung habe ich nebenstehend das Zeigerdiagramm für diese Schaltung dargestellt. Da es sich um eine Reihenschaltung handelt, ist der Strom  $\underline{I}$  die Bezugsgröße, der deshalb entlang der waagerechten Reellen Achse eingetragen ist. Die Summe der Teilspannungen  $\underline{U}_{L1}$ ,  $\underline{U}_{C1}$ ,  $\underline{U}_{L2}$ ,  $\underline{U}_{R1}$ ,  $\underline{U}_{C2}$  und  $\underline{U}_{R2}$  ergibt die Klemmenspannung  $\underline{U}_0$ . Man kann den gesuchten Phasenverschiebungswinkel  $\varphi_{L1}$  zwischen  $\underline{U}_{L1}$  und  $\underline{U}_0$  einzeichnen. Man erkennt ohne weiteres, dass dieser Winkel etwas kleiner als  $90^\circ$  ist. Das passt zu unserem berechneten Wert.



Was wäre gewesen, wenn wir einen **negativen** Winkel als Ergebnis der Rechnung bekommen hätten? Bei einem **negativen** Imaginärteil von  $\underline{U}_0$  wäre das durchaus im Bereich des Möglichen gewesen. Wir hätten dann bei der Rechnung beispielsweise  $\varphi = -70^\circ$  erhalten. Das Zeigerdiagramm hätte dann aber einen **positiven** Winkel größer als  $90^\circ$  ergeben. Wie würde das zusammenpassen?

Schaut man sich die Tangensfunktion einmal genau an,<sup>6</sup> dann erkennt man, dass die Tangensfunktion **nicht umkehrbar** ist. Nach jeweils einem Winkel von  $\varphi = \pi = 180^\circ$  wiederholt sich der Verlauf der Funktion. Will man aus dem Tangenswert auf den Winkel zurückschließen, gibt es unendlich viele Lösungen. Unser Taschenrechner liefert daher nur die Werte im Intervall  $-90^\circ < \varphi < 90^\circ$  als Ergebnis. Den konkreten richtigen Wert muss

<sup>6</sup>beispielsweise hier in Kapitel 4.4: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/trigo.pdf>

man sich daher ggf. „zu Fuß“ daraus ausrechnen, in diesem Fall also zum angezeigten Wert  $180^\circ$  hinzuaddieren. Wir erhielten dann:

$$\varphi_{L1} = -70^\circ + 180^\circ = 110^\circ$$

Die Spannung  $\underline{U}_{L1}$  eilt in diesem Fall demnach der Spannung  $\underline{U}_0$  um  $110^\circ$  voraus.

Anmerkung: Man hätte auch (fast) ohne Rechnung zum richtigen Ergebnis kommen können. Bekanntlich eilt an einer Induktivität – hier  $L_1$  – der Strom der Spannung um  $90^\circ$  nach. Man kann auch sagen, dass die Spannung dem Strom um  $90^\circ$  voraus eilt. Da der Phasenverschiebungswinkel zwischen der Gesamtspannung  $\underline{U}_0$  und dem Strom  $\underline{I}$  bereits unter Punkt 3 mit  $\varphi_I = -11,1^\circ$  berechnet wurde, muss nur noch zu diesem Wert der eben angesprochene Rechte Winkel hinzuaddiert werden:

$$\varphi_{L1} = -11,1^\circ + 90^\circ = 78,9^\circ$$

### 3.1.9 Aufgabe 9

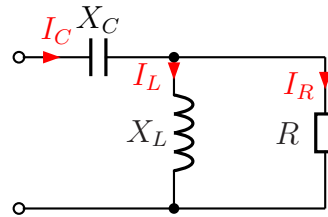
Nebenstehende Schaltung ist an eine Wechselspannung von  $U = 100\text{ V}$  angeschlossen. Die Bauteilwerte sind:

$$X_C = 20\ \Omega$$

$$X_L = 25\ \Omega$$

$$R = 50\ \Omega$$

Gesucht sind die Ströme  $I_C$  im Kondensator,  $I_L$  in der Spule und  $I_R$  im ohmschen Widerstand.



**Lösung:** Zunächst stelle ich die verschiedenen angegebenen Größen im komplexer Form dar:

$$X_C = 20\ \Omega \Rightarrow \underline{X}_C = -j20\ \Omega$$

$$X_L = 25\ \Omega \Rightarrow \underline{X}_L = j25\ \Omega$$

$$R = 50\ \Omega \Rightarrow \underline{R} = 50\ \Omega$$

$$U = 100\text{ V} \Rightarrow \underline{U} = 100\text{ V}$$

Ich fasse  $X_L$  und  $R$  zum Ersatzwiderstand  $Z_1$  zusammen.

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{\underline{X}_L \cdot \underline{R}}{\underline{X}_L + \underline{R}} \\ &= \frac{j25\ \Omega \cdot 50\ \Omega}{j25\ \Omega + 50\ \Omega} \\ &= \frac{j1250\ \Omega^2}{50\ \Omega + j25\ \Omega} \\ &= \frac{(j1250\ \Omega^2)(50\ \Omega - j25\ \Omega)}{(50\ \Omega + j25\ \Omega)(50\ \Omega - j25\ \Omega)} \\ &= \frac{j62500\ \Omega^3 + 31250\ \Omega^3}{2500\ \Omega^2 + 625\ \Omega^2} \\ &= \frac{31250\ \Omega^3 + j62500\ \Omega^3}{3125\ \Omega^2} \\ Z_1 &= 10\ \Omega + j20\ \Omega \end{aligned}$$

In Reihe zu  $Z_1$  ist  $X_C$  geschaltet. Ich erhalte den Gesamt-Ersatzwiderstand der Schaltung:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{X}_C + Z_1 \\ &= -j20\ \Omega + 10\ \Omega + j20\ \Omega \\ \underline{Z} &= 10\ \Omega \end{aligned}$$

Als nächstes bestimme ich den Gesamtstrom, der durch  $Z$  fließt. Da dies zugleich der Strom im Kondensator ist, nenne ich ihn  $I_C$ .

$$\begin{aligned} \underline{I}_C &= \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \\ &= \frac{100 \text{ V}}{10 \Omega} \\ \underline{I}_C &= 10 \text{ A} \end{aligned}$$

Mit diesem Strom kann ich die Spannung an der Spule und dem Widerstand berechnen. Er fließt durch den Ersatzwiderstand  $Z_1$ . Ich nenne die Spannung deshalb  $U_1$ .

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_C \\ &= (10 \Omega + j20 \Omega) \cdot 10 \text{ A} \\ \underline{U}_1 &= 100 \text{ V} + j200 \text{ V} \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Spannung kann ich den Strom  $I_L$  in der Spule berechnen.

$$\begin{aligned} \underline{I}_L &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{X}_L} \\ &= \frac{100 \text{ V} + j200 \text{ V}}{j25 \Omega} \quad | \text{ erweitern mit } j \\ &= \frac{j100 \text{ V} - 200 \text{ V}}{-25 \Omega} \\ \underline{I}_L &= 8 \text{ A} - j4 \text{ A} \end{aligned}$$

Ebenso geht es mit dem Strom  $I_R$  im Widerstand.

$$\begin{aligned} \underline{I}_R &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{R}} \\ &= \frac{100 \text{ V} + j200 \text{ V}}{50 \Omega} \\ \underline{I}_R &= 2 \text{ A} + j4 \text{ A} \end{aligned}$$

Gesucht sind aber nicht die komplexen Ströme  $\underline{I}_R$ ,  $\underline{I}_C$  und  $\underline{I}_L$ , sondern deren Beträge  $I_R$ ,  $I_C$  und  $I_L$ . Diese können wir mit der Wurzelformel  $|z| = z = \sqrt{(\text{Re}z)^2 + (\text{Im}z)^2}$  berechnen.

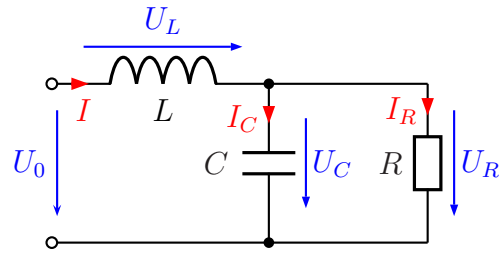
$$\begin{aligned} I_R &= \sqrt{(2 \text{ A})^2 + (4 \text{ A})^2} \approx 4,472 \text{ A} \\ I_C &= \sqrt{(10 \text{ A})^2} = 10 \text{ A} \\ I_L &= \sqrt{(8 \text{ A})^2 + (-4 \text{ A})^2} \approx 8,944 \text{ A} \end{aligned}$$

### 3.1.10 Aufgabe 10

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Folgende Daten sind gegeben:

$$\begin{aligned} U_0 &= 10\text{V} \\ R &= 50\Omega \\ X_L &= 20\Omega \\ X_C &= 25\Omega \end{aligned}$$

Gesucht sind die Teilspannungen  $U_L$  und  $U_R$ .



**Lösung:**

$$\begin{aligned} U_0 &= 10\text{ V} \Rightarrow \underline{U}_0 = 10\text{ V} \\ R &= 50\ \Omega \Rightarrow \underline{R} = 50\ \Omega \\ X_L &= 20\ \Omega \Rightarrow \underline{X}_L = j20\ \Omega \\ X_C &= 25\ \Omega \Rightarrow \underline{X}_C = -j25\ \Omega \end{aligned}$$

**Bestimmung von  $Z$ :** Die Zusammenfassung der Parallelschaltung aus  $R$  und  $X_C$  nenne ich  $Z_{RC}$ . Nach der Formel zur Parallelschaltung erhalte ich:

$$\begin{aligned} Z_{RC} &= \frac{\underline{R} \cdot \underline{X}_C}{\underline{R} + \underline{X}_C} \\ &= \frac{50\ \Omega \cdot (-j25\ \Omega)}{50\ \Omega - j25\ \Omega} \\ &= \frac{-j1250\ \Omega^2}{50\ \Omega - j25\ \Omega} \end{aligned}$$

Da ich keine Lust habe, mit so großen Zahlen und unhandlichen Einheiten zu rechnen, klammere ich so viel wie möglich aus, damit ich kürzen kann.

$$\begin{aligned} Z_{RC} &= \frac{-j1250\ \Omega^2}{50\ \Omega - j25\ \Omega} \\ &= \frac{25\ \Omega \cdot (-j50\ \Omega)}{25\ \Omega \cdot (2 - j)} \\ &= \frac{-j50\ \Omega}{2 - j} \\ &= \frac{(-j50\ \Omega) \cdot (2 + j)}{(2 - j) \cdot (2 + j)} \\ &= \frac{-j100\ \Omega + 50\ \Omega}{4 + 1} \\ &= -j\frac{100\ \Omega}{5} + \frac{50\ \Omega}{5} \\ Z_{RC} &= -j20\ \Omega + 10\ \Omega \end{aligned}$$



Damit kann ich den gesamten Ersatzwiderstand der Schaltung  $\underline{Z}$  bestimmen:

$$\underline{Z} = \underline{X}_L + \underline{Z}_{RC} = j20 \Omega + (-j20 \Omega + 10 \Omega) = 10 \Omega$$

Die gesamte Schaltung verhält sich also wie ein reeller  $10 \Omega$ -Widerstand. Damit bestimme ich den Strom  $\underline{I}_L$ .

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}} = \frac{10 \text{ V}}{10 \Omega} = 1 \text{ A}$$

Als nächstes berechne ich die Spannung  $\underline{U}_L$  an der Induktivität.

$$\underline{U}_L = \underline{X}_L \cdot \underline{I} = j20 \Omega \cdot 1 \text{ A} = j20 \text{ V}$$

Gesucht ist der Betrag dieser Spannung. Das ist ohne großartige Rechnung:

$$U_L = 20 \text{ V}$$

Aus  $\underline{U}_0$  und  $\underline{U}_L$  kann ich  $\underline{U}_R$  berechnen.

$$\underline{U}_R = \underline{U}_0 - \underline{U}_L = 10 \text{ V} - j20 \text{ V}$$

Gesucht ist der Betrag dieser Spannung. Die berechne ich über die Grundformel für Beträge:

$$U_R = \sqrt{(\operatorname{Re}\underline{U}_R)^2 + (\operatorname{Im}\underline{U}_R)^2} = \sqrt{(10 \text{ V})^2 + (-20 \text{ V})^2} = \sqrt{500 \text{ V}^2} \approx 22,36 \text{ V}$$

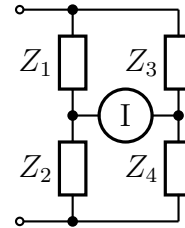
### 3.1.11 Aufgabe 11

An die Brückenschaltung wird eine Wechselspannung angelegt. Der Strommesser zeigt  $I = 0 \text{ A}$  an. Folgende Daten sind bekannt:

$$\underline{Z}_2 = 3 \Omega - j4 \Omega$$

$$\underline{Z}_3 = 19 \Omega - j4 \Omega$$

$$\underline{Z}_4 = 1 \Omega - j18 \Omega$$



Berechnen Sie  $\underline{Z}_1$ !

**Lösung:** Kein Strom fließt im Brückenzweig, die Brücke ist also **abgeglichen**. Die Abgleichbedingung lautet:

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4}$$

Ich setze:

$$\underline{Z}_1 = R + jX$$

Die Werte können in die Abgleichbedingung eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} &= \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4} \\ \frac{R + jX}{3 \Omega - j4 \Omega} &= \frac{19 \Omega - j4 \Omega}{1 \Omega - j18 \Omega} && | \cdot (3 \Omega - j4 \Omega) \cdot (1 \Omega - j18 \Omega) \\ (R + jX) \cdot (1 \Omega - j18 \Omega) &= (19 \Omega - j4 \Omega) \cdot (3 \Omega - j4 \Omega) \\ 1 \Omega R - j18 \Omega R + j1 \Omega X + 18 \Omega X &= 57 \Omega^2 - j76 \Omega^2 - j12 \Omega^2 - 16 \Omega^2 \\ (1 \Omega R + 18 \Omega X) + j(-18 \Omega R + 1 \Omega X) &= 41 \Omega^2 - j88 \Omega^2 \end{aligned}$$

Diese Komplexe Gleichung kann nun in einer Realteil- und eine Imaginärteilgleichung aufgespalten werden. Wir erhalten ein Lineargleichungssystem zweiter Ordnung mit den Variablen  $R$  und  $X$ .

Re:	$1 \Omega R + 18 \Omega X = 41 \Omega^2$
Im:	$-18 \Omega R + 1 \Omega X = -88 \Omega^2$

Dieses Gleichungssystem ist mit jedem beliebigen Verfahren<sup>7</sup> lösbar. Ich wähle willkürlich das Einsetzungsverfahren. Dazu löse ich die Realteilgleichung nach  $R$  auf und setze das Ergebnis in die Imaginärteilgleichung ein.

<sup>7</sup>In Frage kommt beispielsweise das Einsetzungsverfahren, das Additions-/Subtraktionsverfahren, die Cramersche Regel oder das Gauß-Jordan-Verfahren. Einzelheiten zu den verschiedenen Verfahren sind hier zu finden:

Einsetzungsverfahren: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/einsetz.pdf>

Additions-/Subtraktionsverfahren: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/add.pdf>

Cramersche Regel: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/cramer.pdf>

Gauß-Jordan-Verfahren: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/gauss.pdf>

$$\begin{array}{rcl}
1 \Omega R + 18 \Omega X & = & 41 \Omega^2 \quad | - 18 \Omega X \\
1 \Omega R & = & 41 \Omega^2 - 18 \Omega X \quad | : 1 \Omega \\
R & = & 41 \Omega - 18 X
\end{array}$$

Einsetzen in Imaginärteilgleichung:

$$\begin{array}{rcl}
-18 \Omega R + 1 \Omega X & = & -88 \Omega^2 \\
-18 \Omega \cdot (41 \Omega - 18 X) + 1 \Omega X & = & -88 \Omega^2 \\
-738 \Omega^2 + 324 \Omega X + 1 \Omega X & = & -88 \Omega^2 \quad | + 738 \Omega^2 \\
325 \Omega X & = & 650 \Omega^2 \quad | : 325 \Omega \\
X & = & 2 \Omega
\end{array}$$

Einsetzen in umgestellte Realteilgleichung:

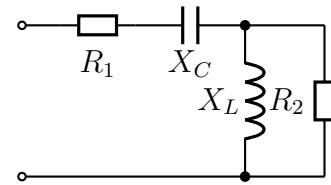
$$\begin{array}{rcl}
R & = & 41 \Omega - 18 X \\
R & = & 41 \Omega - 18 \cdot 2 \Omega \\
R & = & 5 \Omega
\end{array}$$

Damit erhalten wir als Ergebnis für  $Z_1$ :  $Z_1 = 5 \Omega + j2 \Omega$

### 3.1.12 Aufgabe 12

Bestimmen Sie den Komplexen Ersatzwiderstand  $\underline{Z}$  der nebenstehenden Schaltung! Gegeben sind folgende Werte:

$$\begin{aligned} R_1 &= 10 \Omega & X_C &= 30 \Omega \\ R_2 &= 80 \Omega & X_L &= 40 \Omega \end{aligned}$$



**Lösung:** Zuerst werden die Komplexen Widerstände bestimmt.

$$\begin{aligned} R_1 &= 10 \Omega & \underline{X}_C &= -j30 \Omega \\ R_2 &= 80 \Omega & \underline{X}_L &= j40 \Omega \end{aligned}$$

Die Parallelschaltung aus  $X_L$  und  $R_2$  nenne ich  $Z_{XL}$ .

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{XL} &= \frac{\underline{R}_2 \cdot \underline{X}_L}{\underline{R}_2 + \underline{X}_L} \\ &= \frac{80 \Omega \cdot j40 \Omega}{80 \Omega + j40 \Omega} \\ &= \frac{80 \Omega \cdot j40 \Omega \cdot (80 \Omega - j40 \Omega)}{(80 \Omega + j40 \Omega) \cdot (80 \Omega - j40 \Omega)} \\ &= \frac{j256\,000 \Omega^3 + 128\,000 \Omega^3}{6\,400 \Omega^2 + 1\,600 \Omega^2} \\ &= \frac{8\,000 \Omega^2}{j256\,000 \Omega^3 + 128\,000 \Omega^3} \\ \underline{Z}_{XL} &= \frac{8\,000 \Omega^2}{8\,000 \Omega^2} + \frac{128\,000 \Omega^3}{8\,000 \Omega^2} \\ &= j32 \Omega + 16 \Omega \end{aligned}$$

Damit kann  $\underline{Z}$  über die Reihenschaltung aus  $R_1$ ,  $X_C$  und  $Z_{XL}$  bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{R}_1 + \underline{X}_C + \underline{Z}_{XL} \\ &= 10 \Omega - j30 \Omega + j32 \Omega + 16 \Omega \\ \underline{Z} &= 26 \Omega + j2 \Omega \end{aligned}$$

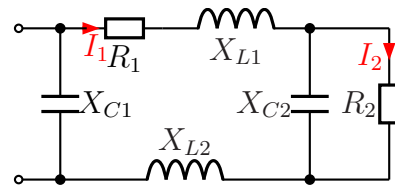
Ergebnis:  $\underline{Z} = 26 \Omega + j2 \Omega$

### 3.1.13 Aufgabe 13

Gegeben ist die nebenstehende Schaltung mit folgenden Werten:

$$R_1 = 20 \Omega \quad X_{C1} = 120 \Omega \quad X_{L1} = 80 \Omega$$

$$R_2 = 200 \Omega \quad X_{C2} = 100 \Omega \quad X_{L2} = 60 \Omega$$



a) Bestimmen Sie den Komplexen Ersatzwiderstand  $Z$  der nebenstehenden Schaltung!

b) Die Schaltung wird nun an eine Wechselspannung von  $U_0 = 12 \text{ V}$  angeschlossen. Bestimmen Sie die Ströme  $I_1$  und  $I_2$  in den Widerständen  $R_1$  und  $R_2$ . Gemeint sind hierbei die Werte, die ein Strommesser an den jeweiligen Stellen anzeigen würde.

**Lösung:** Zuerst werden die Komplexen Widerstände bestimmt.

$$\underline{R}_1 = 20 \Omega \quad \underline{X}_{C1} = -j120 \Omega \quad \underline{X}_{L1} = j80 \Omega$$

$$\underline{R}_2 = 200 \Omega \quad \underline{X}_{C2} = -j100 \Omega \quad \underline{X}_{L2} = j60 \Omega$$

zu a) Den Ersatzwiderstand der Parallelschaltung aus  $X_{C2}$  und  $R_2$  nenne ich  $Z_1$ .

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{R_2 \cdot X_{C2}}{R_2 + X_{C2}} \\ &= \frac{200 \Omega \cdot (-j100 \Omega)}{200 \Omega - j100 \Omega} \\ &= \frac{200 \Omega - j100 \Omega}{200 \Omega \cdot (-j100 \Omega) \cdot (200 \Omega - j100 \Omega)} \\ &= \frac{(200 \Omega - j100 \Omega) \cdot (200 \Omega + j100 \Omega)}{-j4\,000\,000 \Omega^3 + 2\,000\,000 \Omega^3} \\ &= \frac{40\,000 \Omega^2 + 10\,000 \Omega^2 - j4\,000\,000 \Omega^3 + 2\,000\,000 \Omega^3}{50\,000 \Omega^2} \\ &= -\frac{j4\,000\,000 \Omega^3}{50\,000 \Omega^2} + \frac{2\,000\,000 \Omega^3}{50\,000 \Omega^2} \\ Z_1 &= 40 \Omega - j80 \Omega \end{aligned}$$

Den Ersatzwiderstand der Reihenschaltung aus  $R_1$ ,  $X_{L1}$ ,  $Z_1$  und  $X_{L2}$  nenne ich  $Z_2$ .

$$\begin{aligned} Z_2 &= \underline{R}_1 + \underline{X}_{L1} + Z_1 + \underline{X}_{L2} \\ &= 20 \Omega + j80 \Omega + 40 \Omega - j80 \Omega + j60 \Omega \\ Z_2 &= 60 \Omega + j60 \Omega \end{aligned}$$

Der gesuchte Ersatzwiderstand  $Z$  der gesamten Schaltung ergibt sich als Ersatzwiderstand der Parallelschaltung von  $Z_2$  und  $X_{C1}$ .

$$\begin{aligned}
 Z &= \frac{Z_2 \cdot X_{C1}}{Z_2 + X_{C1}} \\
 &= \frac{(60 \Omega + j60 \Omega) \cdot (-j120 \Omega)}{60 \Omega + j60 \Omega + (-j120 \Omega)} \\
 &= \frac{-j7200 \Omega^2 + 7200 \Omega^2}{60 \Omega - j60 \Omega} \\
 &= \frac{(-j7200 \Omega^2 + 7200 \Omega^2) \cdot (60 \Omega + j60 \Omega)}{(60 \Omega - j60 \Omega) \cdot (60 \Omega + j60 \Omega)} \\
 &= \frac{-j432000 \Omega^3 + 432000 \Omega^3 + 432000 \Omega^3 + j432000 \Omega^3}{3600 \Omega^2 + 3600 \Omega^2} \\
 &= \frac{864000 \Omega^3}{7200 \Omega^2} \\
 Z &= 120 \Omega
 \end{aligned}$$

Ergebnis:  $Z$  ist ein **Reeller Widerstand** mit  $Z = 120 \Omega$

**zu b)** Der Strom  $I_1$  fließt durch den Ersatzwiderstand  $Z_2$ . An diesem liegt die Spannung  $U_0 = 12 \text{ V}$  an.

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_1 &= \frac{U_0}{Z_2} \\
 &= \frac{12 \text{ V}}{60 \Omega + j60 \Omega} \\
 &= \frac{12 \text{ V} \cdot (60 \Omega - j60 \Omega)}{(60 \Omega + j60 \Omega) \cdot (60 \Omega - j60 \Omega)} \\
 &= \frac{720 \text{ V}\Omega - j720 \text{ V}\Omega}{720 \text{ V}\Omega - j720 \text{ V}\Omega} \\
 &= \frac{3600 \Omega^2 + 3600 \Omega^2}{720 \text{ V}\Omega - j720 \text{ V}\Omega} \\
 &= \frac{7200 \Omega^2}{720 \text{ V}\Omega - j720 \text{ V}\Omega} \\
 \underline{I}_1 &= 0,1 \text{ A} - j0,1 \text{ A}
 \end{aligned}$$

Gesucht ist der **Betrag** dieses Stromes.

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sqrt{(\text{Re}\underline{I}_1)^2 + (\text{Im}\underline{I}_1)^2} \\
 &= \sqrt{(0,1 \text{ A})^2 + (0,1 \text{ A})^2} \\
 I_1 &= 0,1414 \text{ A}
 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Stromes  $I_2$  benötigen wir die Spannung an  $R_2$ . Ich nenne sie  $U_2$ . Diese ist identisch mit der Spannung am zuerst berechneten Ersatzwiderstand  $Z_1$ , der Zusammenfassung aus  $R_2$  und  $X_{C2}$ . Da durch  $Z_1$  der eben berechnete Strom  $I_1$  fließt, kann damit die Spannung  $U_2$  über das Ohmsche Gesetz berechnet werden.

Für diese Berechnung sind zwei unterschiedliche Ansätze möglich.

1. Man verwendet für die Berechnung den zuerst berechneten **komplexen Wert**  $\underline{I}_1$ . Damit ist man auf der „sicheren“ Seite.
2. Man verwendet für die Berechnung den eben berechneten **Betrag**  $I_1$ . Da wir den Strom  $I_2$  nur als Betrag wissen wollen, ist diese Vereinfachung möglich.

Um zu zeigen, dass beides möglich ist, führe ich die Berechnung mit beiden Varianten durch.

### Lösungsvariante 1:

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_2 &= \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 \\
 &= (40 \Omega - j80 \Omega) \cdot (0,1 \text{ A} - j0,1 \text{ A}) \\
 &= 4 \text{ V} - j4 \text{ V} - j8 \text{ V} - 8 \text{ V} \\
 \underline{U}_2 &= -4 \text{ V} - j12 \text{ V}
 \end{aligned}$$

Über das Ohmsche Gesetz an  $R_2$  erhalten wir zunächst  $\underline{I}_2$  und dann  $I_2$ .

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{R}} \\
 &= \frac{-4 \text{ V} - j12 \text{ V}}{200 \Omega} \\
 \underline{I}_2 &= -20 \text{ mA} - j60 \text{ mA} \\
 I_2 &= \sqrt{(20 \text{ mA})^2 + (60 \text{ mA})^2} \\
 I_2 &= 63,2 \text{ mA}
 \end{aligned}$$

### Lösungsvariante 2:

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_2 &= \underline{Z}_1 \cdot I_1 \\
 &= (40 \Omega - j80 \Omega) \cdot 0,1414 \text{ A} \\
 \underline{U}_2 &= 5,656 \text{ V} - j11,312 \text{ V}
 \end{aligned}$$

Über das Ohmsche Gesetz an  $R_2$  erhalten wir zunächst  $\underline{I}_2$  und dann  $I_2$ .

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{R}} \\
 &= \frac{-5,656 \text{ V} - j11,312 \text{ V}}{200 \Omega} \\
 \underline{I}_2 &= -28,28 \text{ mA} - j56,56 \text{ mA} \\
 I_2 &= \sqrt{(28,28 \text{ mA})^2 + (56,56 \text{ mA})^2} \\
 I_2 &= 63,2 \text{ mA}
 \end{aligned}$$

Die Ergebnisse beider Lösungsvarianten sind gleich.

Ergebnisse:  $I_1 = 141 \text{ mA}$   $I_2 = 63,2 \text{ mA}$

## 4 Kompensation

### 4.1 Berechnungen der Kompensation

Die Grundlagen zur Berechnung bei Kompensation sind hier zu finden:

<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/wechsels.pdf>

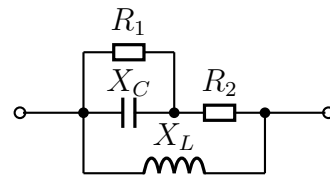
### 4.2 Lösungen der Übungsaufgaben zur Kompensation

#### 4.2.1 Aufgabe 1

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie den Widerstand  $R_2$  so, dass der Gesamtwiderstand  $Z$  der Schaltung reell wird! Folgende Werte sind bekannt:

$$X_C = 2\Omega \quad X_L = 8\Omega \quad R_1 = 4\Omega$$

Wie groß wird damit der Ersatzwiderstand  $Z$  der Schaltung?



**Lösung:** Um das Problem lösen zu können, stelle ich die Formel auf, mit deren Hilfe  $Z$  aus den Blind- und Wirkwiderständen bestimmt wird. Dabei setze ich die unbekannten Größe  $R_2$  an mit:

$$R_2 = R$$

Mit diesem Ansatz erreiche ich, dass ich nur eine **reelle** Größe – nämlich  $R$  – bestimmen muss. Die Liste der verwendeten Größe sieht damit dann so aus:

$$\begin{aligned} R_1 &= 4\Omega \\ R_2 &= R \\ X_L &= j8\Omega \\ X_C &= -j2\Omega \end{aligned}$$

Beginnen wir mit der Zusammenfassung der Parallelschaltung aus  $R_1$  und  $X_C$ . Den Ersatzwiderstand nenne ich  $Z_1$ .

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{R_1 \cdot X_C}{R_1 + X_C} \\ &= \frac{4\Omega \cdot (-j2\Omega)}{4\Omega + (-j2\Omega)} \\ &= \frac{-j8\Omega^2}{4\Omega - j2\Omega} \\ Z_1 &= \frac{-j4\Omega}{2 - j} \end{aligned}$$



Mit  $Z_1$  in Reihe geschaltet ist  $R_2$ . Den Ersatzwiderstand dieser Reihenschaltung nenne ich  $Z_2$ . Wir können  $Z_2$  berechnen.

$$\begin{aligned} Z_2 &= Z_1 + R_2 \\ Z_2 &= \frac{-j4\Omega}{2-j} + R \end{aligned}$$

Parallel zu  $Z_2$  ist  $X_L$  geschaltet. Damit können wir nun den Ersatzwiderstand der gesamten Schaltung  $\underline{Z}$  aufstellen.

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{X}_L}{\underline{Z}_2 + \underline{X}_L} \\ \underline{Z} &= \frac{\left(\frac{-j4\Omega}{2-j} + R\right) \cdot j8\Omega}{\left(\frac{-j4\Omega}{2-j} + R\right) + j8\Omega} \end{aligned}$$

Bevor wir weiterrechnen, sollten wir diesen Term vereinfachen. Dazu fassen wir im Zähler und im Nenner des Hauptbruches die Teilbrüche zusammen, damit wir anschließend die Nenner der Teilbrüche herauskürzen können.

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{\left(\frac{-j4\Omega}{2-j} + R\right) \cdot j8\Omega}{\left(\frac{-j4\Omega}{2-j} + R\right) + j8\Omega} \\ &= \frac{\left(\frac{-j4\Omega + R(2-j)}{2-j}\right) \cdot j8\Omega}{\frac{-j4\Omega + R(2-j) + j8\Omega(2-j)}{2-j}} \\ &= \frac{(-j4\Omega + R(2-j)) \cdot j8\Omega}{-j4\Omega + R(2-j) + j8\Omega(2-j)} \\ &= \frac{(-j4\Omega + 2R - jR) \cdot j8\Omega}{-j4\Omega + 2R - jR + j16\Omega - j^28\Omega} \\ &= \frac{-j^232\Omega^2 + j16\Omega R - j^28\Omega R}{-j4\Omega + 2R - jR + j16\Omega + 8\Omega} \\ \underline{Z} &= \frac{32\Omega^2 + j16\Omega R + 8\Omega R}{2R - jR + j12\Omega + 8\Omega} \end{aligned}$$

Nachdem wir nun den Term für  $\underline{Z}$  vereinfacht haben, gibt zwei grundsätzlich verschiedene Wege, wie man weiterarbeiten kann.

1. Wir können den Term für  $\underline{Z}$  in einen Realteil und einen Imaginärteil aufspalten. Dann können wir den Imaginärteil gleich Null setzen, um dadurch  $R$  zu bestimmen.
2. Da  $\underline{Z}$  laut Aufgabenstellung als *reelle* Größe bekannt ist, können wir  $\underline{Z} = Z$  setzen. Dadurch erhalten wir die Möglichkeit, die Gleichung in Real- und Imaginärteile aufzuspalten. Wir bekommen dann *zwei* Gleichungen mit *zwei* Variablen, nämlich  $Z$  und  $R$ .

Um die Vor- und Nachteile der beiden Verfahren besser unterscheiden zu können, führe ich nacheinander beide vor.

### Lösungsweg 1

$$\begin{aligned}
 \underline{Z} &= \frac{32 \Omega^2 + j16 \Omega R + 8 \Omega R}{2R - jR + j12 \Omega + 8 \Omega} \\
 &= \frac{32 \Omega^2 + j16 \Omega R + 8 \Omega R}{(2R + 8 \Omega) - j(R - 12 \Omega)} \\
 &= \frac{(32 \Omega^2 + j16 \Omega R + 8 \Omega R) \cdot ((2R + 8 \Omega) + j(R - 12 \Omega))}{((2R + 8 \Omega) - j(R - 12 \Omega)) \cdot ((2R + 8 \Omega) + j(R - 12 \Omega))} \\
 &= \frac{(32 \Omega^2 + j16 \Omega R + 8 \Omega R) \cdot (2R + 8 \Omega + jR - j12 \Omega)}{(2R + 8 \Omega)^2 + (R - 12 \Omega)^2} \\
 &= \frac{64 \Omega^2 R + 256 \Omega^3 + j32 \Omega^2 R - j384 \Omega^3 + j32 \Omega R^2 + j128 \Omega^2 R - 16 \Omega R^2}{4R^2 + 32 \Omega R + 64 \Omega^2 + R^2 - 24 \Omega R + 144 \Omega^2} \dots \\
 &\quad \dots \frac{+192 \Omega^2 R + 16 \Omega R^2 + 64 \Omega^2 R + j8 \Omega R^2 - j96 \Omega^2 R}{\dots} \\
 &= \frac{320 \Omega^2 R + 256 \Omega^3 + j64 \Omega^2 R - j384 \Omega^3 + j40 \Omega R^2}{5R^2 + 8 \Omega R + 208 \Omega^2} \\
 \underline{Z} &= \frac{320 \Omega^2 R + 256 \Omega^3}{5R^2 + 8 \Omega R + 208 \Omega^2} + j \frac{64 \Omega^2 R - 384 \Omega^3 + 40 \Omega R^2}{5R^2 + 8 \Omega R + 208 \Omega^2}
 \end{aligned}$$

Da  $\underline{Z}$  reell sein soll, ist der Imaginärteil von  $\underline{Z}$  gleich Null. Damit bekommen wir eine Gleichung zur Bestimmung von  $R$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Im}(\underline{Z}) &= 0 \\
 \frac{64 \Omega^2 R - 384 \Omega^3 + 40 \Omega R^2}{5R^2 + 8 \Omega R + 208 \Omega^2} &= 0 \quad | \cdot \text{Nenner} \\
 64 \Omega^2 R - 384 \Omega^3 + 40 \Omega R^2 &= 0 \\
 40 \Omega R^2 + 64 \Omega^2 R - 384 \Omega^3 &= 0 \quad | : 40 \Omega \\
 R^2 + 1,6 \Omega R - 9,6 \Omega^2 &= 0 \quad | \text{ p-q-Formel} \\
 R_{1/2} &= -0,8 \Omega \pm \sqrt{0,64 \Omega^2 + 9,6 \Omega^2} \\
 &= -0,8 \Omega \pm 3,2 \Omega \\
 R_1 &= 2,4 \Omega \\
 R_2 &= -4 \Omega \quad (\text{entfällt})
 \end{aligned}$$

Die Lösung lautet also  $R = 2,4 \Omega$ , denn negative Widerstände gibt es nicht.

**Lösungsweg 2** Als alternative Lösungsmethode können wir  $\underline{Z} = Z$  setzen. Dadurch erhalten wir die Möglichkeit, die Gleichung in Real- und Imaginärteile aufzuspalten. Wir bekommen dann *zwei* Gleichungen mit *zwei reellen* Variablen, nämlich  $Z$  und  $R$ .

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \frac{32\Omega^2 + j16\Omega R + 8\Omega R}{2R - jR + j12\Omega + 8\Omega} \\ Z &= \frac{32\Omega^2 + j16\Omega R + 8\Omega R}{2R - jR + j12\Omega + 8\Omega} \quad | \cdot (2R - jR + j12\Omega + 8\Omega) \\ 2RZ - jRZ + j12\Omega Z + 8\Omega Z &= 32\Omega^2 + j16\Omega R + 8\Omega R\end{aligned}$$

Aus dieser komplexen Gleichung können wir nun *zwei* reelle Gleichungen machen, indem wir die Gleichung in eine Gleichung für die Realteile und eine andere für die Imaginärteile aufspalten.

$$\begin{array}{l} 2RZ - jRZ + j12\Omega Z + 8\Omega Z = 32\Omega^2 + j16\Omega R + 8\Omega R \\ \text{Re:} \quad 2RZ + 8\Omega Z = 32\Omega^2 + 8\Omega R \\ \text{Im:} \quad -RZ + 12\Omega Z = 16\Omega R \end{array}$$

Das Gleichungssystem lösen wir, indem wir die Gleichung aus den reellen Anteilen nach  $Z$  auflösen und in die andere Gleichung einsetzen.

$$\begin{aligned} 2RZ + 8\Omega Z &= 32\Omega^2 + 8\Omega R \\ Z \cdot (2R + 8\Omega) &= 32\Omega^2 + 8\Omega R \quad | : (2R + 8\Omega) \\ Z &= \frac{32\Omega^2 + 8\Omega R}{2R + 8\Omega} \\ Z &= \frac{8\Omega \cdot (4\Omega + R)}{2 \cdot (R + 4\Omega)} \\ Z &= 4\Omega \end{aligned}$$

Das Ergebnis setzen wir in die Gleichung aus den Imaginärteilen ein.

$$\begin{aligned} -RZ + 12\Omega Z &= 16\Omega R \\ -R \cdot 4\Omega + 12\Omega \cdot 4\Omega &= 16\Omega R \\ -4\Omega R + 48\Omega^2 &= 16\Omega R \quad | + 4\Omega R \\ 48\Omega^2 &= 20\Omega R \quad | : 20\Omega \\ 2,4\Omega &= R \end{aligned}$$

$$R = 2,4\Omega$$

Jeder mag für sich selbst entscheiden, welchen Lösungsweg er einfacher findet.

Zum ersten Lösungsweg müsste noch die fehlende Größe  $\underline{Z}$  bestimmt werden. (Im zweiten Lösungsweg entfällt das, weil die Lösung  $\underline{Z} = 4 \Omega$  quasi nebenbei angefallen ist.) Dazu setzen wir den gefundenen Wert  $R = 2,4 \Omega$  in die gefundene Formel für  $\underline{Z}$  ein.

$$\underline{Z} = \frac{320 \Omega^2 R + 256 \Omega^3}{5R^2 + 8 \Omega R + 208 \Omega^2} + j \frac{64 \Omega^2 R - 384 \Omega^3 + 40 \Omega R^2}{5R^2 + 8 \Omega R + 208 \Omega^2}$$

Laut Aufgabenstellung ist der Imaginärteil  $\text{Im}\underline{Z} = 0$ . (Das ist der Bruch hinter dem  $j$ .) Daher können wir ihn der Einfachheit halber auch gleich weglassen. In den so vereinfachten Term setzen wir dann  $R = 2,4 \Omega$  ein.

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{320 \Omega^2 R + 256 \Omega^3}{5R^2 + 8 \Omega R + 208 \Omega^2} \\ &= \frac{320 \Omega^2 \cdot 2,4 \Omega + 256 \Omega^3}{5 \cdot (2,4 \Omega)^2 + 8 \Omega \cdot 2,4 \Omega + 208 \Omega^2} \\ &= \frac{768 \Omega^3 + 256 \Omega^3}{28,8 \Omega^2 + 19,2 \Omega^2 + 208 \Omega^2} \\ &= \frac{1024 \Omega^3}{256 \Omega^2} \\ &= 4 \Omega \end{aligned}$$

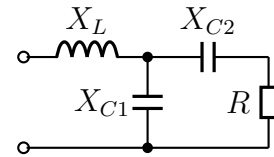
Gesamtwiderstand  $\underline{Z} = 4 \Omega$

### 4.2.2 Aufgabe 2

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie den Widerstand  $X_{C2}$  so, dass der Gesamtwiderstand  $Z$  der Schaltung reell wird! Bekannt sind die Werte:

$$X_{C1} = 50 \Omega \quad X_L = 12,5 \Omega \quad R_1 = 20 \Omega.$$

Wie groß wird damit der Ersatzwiderstand  $Z$  der Schaltung?



**Lösung:** Um das Problem lösen zu können, stelle ich die Formel auf, mit deren Hilfe  $Z$  aus den Blind- und Wirkwiderständen bestimmt wird. Dabei setze ich die unbekannten Größe  $X_{C2}$  an mit:

$$X_{C2} = -jX$$

Mit diesem Ansatz erreiche ich, dass ich nur eine **reelle** Größe – nämlich  $X$  – bestimmen muss. Die Liste der verwendeten Größe sieht damit dann so aus:

$$X_{C1} = -j50 \Omega$$

$$X_L = j12,5 \Omega$$

$$R = 20 \Omega$$

$$X_{C2} = -jX$$

Ich beginne mit der Zusammenfassung aus  $X_{C2}$  und  $R$ . Diese nenne ich  $Z_1$ .

$$Z_1 = X_{C2} + R = -jX + 20 \Omega$$

Parallel zu  $Z_1$  liegt  $X_{C1}$ . Diese Parallelschaltung nenne ich  $Z_2$ .

$$\begin{aligned} Z_2 &= \frac{Z_1 \cdot X_{C1}}{Z_1 + X_{C1}} \\ Z_2 &= \frac{(-jX + 20 \Omega) \cdot (-j50 \Omega)}{-jX + 20 \Omega - j50 \Omega} \\ Z_2 &= \frac{-50 \Omega X - j1000 \Omega^2}{20 \Omega - j(X + 50 \Omega)} \end{aligned}$$

In Reihe zu  $Z_2$  liegt  $X_L$ . Damit erhalte ich den Gesamtwiderstand  $Z$ :

$$\begin{aligned} Z &= Z_2 + X_L \\ Z &= \frac{-50 \Omega X - j1000 \Omega^2}{20 \Omega - j(X + 50 \Omega)} + j12,5 \Omega \end{aligned}$$

Ab hier gibt es wieder – wie bei den vorangehenden Aufgaben auch – zwei unterschiedliche Lösungswege.

### Lösungsweg 1

$$\begin{aligned}
 \underline{Z} &= \frac{-50 \Omega X - j1000 \Omega^2}{20 \Omega - j(X + 50 \Omega)} + j12,5 \Omega \quad | \text{Konjugiert Komplex erweitern} \\
 &= \frac{(-50 \Omega X - j1000 \Omega^2) \cdot (20 \Omega + jX + j50 \Omega)}{[20 \Omega - j(X + 50 \Omega)] \cdot [(20 \Omega + j(X + 50 \Omega))]} + j12,5 \Omega \\
 &= \frac{-1000 \Omega^2 X - j50 \Omega X^2 - j2500 \Omega^2 X - j20000 \Omega^3 + 1000 \Omega^2 X + 50000 \Omega^3}{400 \Omega^2 + (X + 50 \Omega)^2} + j12,5 \Omega \\
 \underline{Z} &= \frac{-j50 \Omega X^2 - j2500 \Omega^2 X - j20000 \Omega^3 + 50000 \Omega^3}{400 \Omega^2 + (X + 50 \Omega)^2} + j2,5 \Omega
 \end{aligned}$$

Der Bruch kann nun in Realteil und Imaginärteil zerlegt werden. Das geht dann auch mit dem gesamten  $\underline{Z}$ .

$$\begin{aligned}
 \underline{Z} &= \frac{50000 \Omega^3}{400 \Omega^2 + (X + 50 \Omega)^2} + j \frac{-50 \Omega X^2 - 2500 \Omega^2 X - 20000 \Omega^3}{400 \Omega^2 + (X + 50 \Omega)^2} + j12,5 \Omega \\
 \underline{Z} &= \frac{50000 \Omega^3}{400 \Omega^2 + (X + 50 \Omega)^2} + j \left( \frac{-50 \Omega X^2 - 2500 \Omega^2 X - 20000 \Omega^3}{400 \Omega^2 + (X + 50 \Omega)^2} + 12,5 \Omega \right)
 \end{aligned}$$

Laut Aufgabenstellung ist  $\text{Im}(\underline{Z}) = 0$ . Daraus können wir eine Gleichung zur Bestimmung von  $X$  machen.

$$\begin{aligned}
 \frac{-50 \Omega X^2 - 2500 \Omega^2 X - 20000 \Omega^3}{400 \Omega^2 + (X + 50 \Omega)^2} + 12,5 \Omega &= 0 \quad | \cdot \text{Nenner} \\
 -50 \Omega X^2 - 2500 \Omega^2 X - 20000 \Omega^3 + 12,5 \Omega \cdot (400 \Omega^2 + (X + 50 \Omega)^2) &= 0 \\
 -50 \Omega X^2 - 2500 \Omega^2 X - 20000 \Omega^3 + 12,5 \Omega \cdot (400 \Omega^2 + X^2 + 100 \Omega X + 2500 \Omega^2) &= 0 \\
 -50 \Omega X^2 - 2500 \Omega^2 X - 20000 \Omega^3 + 12,5 \Omega \cdot (2900 \Omega^2 + X^2 + 100 \Omega X) &= 0 \\
 -50 \Omega X^2 - 2500 \Omega^2 X - 20000 \Omega^3 + 36250 \Omega^3 + 12,5 \Omega X^2 + 1250 \Omega^2 X &= 0 \\
 -37,5 \Omega X^2 - 1250 \Omega^2 X + 16250 \Omega^3 &= 0
 \end{aligned}$$

Wir haben eine Quadratische Gleichung erhalten, die wir nun mit der  $p - q$ -Formel lösen können.

$$-37,5 \Omega X^2 - 1250 \Omega^2 X + 16250 \Omega^3 = 0 \quad | : (-37,5 \Omega)$$

$$X^2 + \frac{100}{3} \Omega X - \frac{1300}{3} \Omega^2 = 0$$

$$X_{1/2} = -\frac{50}{3} \Omega \pm \sqrt{\frac{2500}{9} \Omega^2 + \frac{3900}{9} \Omega^2}$$

$$X_{1/2} = -\frac{50}{3} \Omega \pm \sqrt{\frac{6400}{9} \Omega^2}$$

$$X_{1/2} = -\frac{50}{3} \Omega \pm \frac{80}{3} \Omega$$

$$X_1 = \frac{30}{3} \Omega = 10 \Omega$$

$$X_2 = -\frac{130}{3} \Omega \text{ (entfällt)}$$

Ergebnis:  $X_{C2} = -j10 \Omega$  oder:  $X_{C2} = 10 \Omega$

Fehlt noch  $Z$ . Da  $\text{Im}Z = 0$  ist, ist  $Z = Z = \text{Re}Z$ .

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{50000 \Omega^3}{400 \Omega^2 + (X + 50 \Omega)^2} + j \left( \frac{-50 \Omega X^2 - 2500 \Omega^2 X - 20000 \Omega^3}{400 \Omega^2 + (X + 50 \Omega)^2} + 12,5 \Omega \right) \\ &= \frac{50000 \Omega^3}{400 \Omega^2 + (X + 50 \Omega)^2} \\ &= \frac{50000 \Omega^3}{400 \Omega^2 + (10 \Omega + 50 \Omega)^2} \\ &= \frac{50000 \Omega^3}{400 \Omega^2 + (60 \Omega)^2} \\ &= \frac{50000 \Omega^3}{400 \Omega^2 + 3600 \Omega^2} \\ &= \frac{50000 \Omega^3}{4000 \Omega^2} \\ \underline{Z} &= 12,5 \Omega \end{aligned}$$

Ergebnis:  $Z = Z = 12,5 \Omega$

**Lösungsweg 2** Alternativ ergibt sich auch hier wieder die Möglichkeit, aus **einer Komplexen** Gleichung **zwei Reelle** Gleichungen zu machen. Das allerdings geht nur, weil  $\underline{Z} = Z$  ist!

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \frac{-50 \Omega X - j1000 \Omega^2}{20 \Omega - j(X + 50 \Omega)} + j12,5 \Omega \\ Z &= \frac{-50 \Omega X - j1000 \Omega^2}{20 \Omega - j(X + 50 \Omega)} + j12,5 \Omega \quad | \cdot \text{Nenner} \\ Z \cdot [20 \Omega - j(X + 50 \Omega)] &= -50 \Omega X - j1000 \Omega^2 + j12,5 \Omega \cdot [20 \Omega - j(X + 50 \Omega)] \\ Z \cdot (20 \Omega - jX - j50 \Omega) &= -50 \Omega X - j1000 \Omega^2 + j12,5 \Omega \cdot (20 \Omega - jX - j50 \Omega) \\ 20 \Omega Z - jXZ - j50 \Omega Z &= -50 \Omega X - j1000 \Omega^2 + j250 \Omega^2 + 12,5 \Omega X + 625 \Omega^2 \\ 20 \Omega Z - jXZ - j50 \Omega Z &= -37,5 \Omega X - j750 \Omega^2 + 625 \Omega^2\end{aligned}$$

Diese Gleichung können wir nun in eine Gleichung mit den Realteilen und in eine mit den Imaginärteilen zerlegen. Das ist der eigentliche „Trick“ bei diesem Verfahren.

$$\begin{aligned}\text{Realteile:} \quad 20 \Omega Z &= -37,5 \Omega X + 625 \Omega^2 \\ \text{Imaginärteile:} \quad -XZ - 50 \Omega Z &= -750 \Omega^2\end{aligned}$$

Da dieses Gleichungssystem **nichtlinear** ist, kommt als Lösungsverfahren wohl nur das Einsetzungsverfahren in Frage. Dazu löse ich die Realteilgleichung nach  $Z$  auf und setze das Ergebnis in die Imaginärteilgleichung ein.

$$\begin{aligned}20 \Omega Z &= -37,5 \Omega X + 625 \Omega^2 \quad | : 20 \Omega \\ Z &= -1,875 X + 31,25 \Omega\end{aligned}$$

Eingesetzt in die Imaginärteilgleichung:

$$\begin{aligned}-XZ - 50 \Omega Z &= -750 \Omega^2 \\ -X \cdot (-1,875 X + 31,25 \Omega) - 50 \Omega \cdot (-1,875 X + 31,25 \Omega) &= -750 \Omega^2 \\ 1,875 X^2 - 31,25 \Omega X + 93,75 \Omega X - 1562,5 \Omega^2 &= -750 \Omega^2 \quad | + 750 \Omega^2 \\ 1,875 X^2 + 62,5 \Omega X - 812,5 \Omega^2 &= 0 \quad | : 1,875 \\ x^2 + \frac{100}{3} \Omega X - \frac{1300}{3} \Omega^2 &= 0\end{aligned}$$

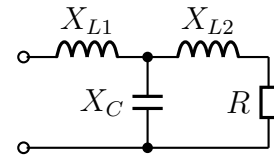
Da diese Gleichung auch schon beim ersten Lösungsweg auftrat, kann man den Rest der Lösung dort nachlesen; der restliche Lösungsweg ist identisch.



### 4.2.3 Aufgabe 3

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie die Widerstände  $X_{L1}$  und  $X_C$  so, dass der Gesamtwiderstand  $\underline{Z}$  der Schaltung gleich  $10\ \Omega$  reell wird!

Bekannt sind die Werte  $X_{L2} = 8\ \Omega$  und  $R = 16\ \Omega$ .



**Lösung:** Um das Problem lösen zu können, stelle ich die Formel auf, mit deren Hilfe  $\underline{Z}$  aus den Blind- und Wirkwiderständen bestimmt wird. Dabei setze ich die unbekannt GröÙen  $\underline{X}_{L1}$  und  $\underline{X}_C$  an mit:

$$\underline{X}_{L1} = jX_L \quad \text{und} \quad \underline{X}_C = -jX_C$$

Mit diesem Ansatz erreiche ich, dass ich nur zwei **reelle** GröÙen, nämlich  $X_L$  und  $X_C$ , bestimmen muss. Die Liste der verwendeten GröÙe sieht demnach also so aus:

$$\begin{aligned} R = 16\ \Omega &\Rightarrow \underline{R} = 16\ \Omega \\ X_{L2} = 8\ \Omega &\Rightarrow \underline{X}_{L2} = j8\ \Omega \\ X_{L1} = X_L &\Rightarrow \underline{X}_{L1} = jX_L \\ &\underline{X}_C = -jX_C \end{aligned}$$

Die Reihenschaltung aus  $X_{L2}$  und  $R$  nenne ich  $Z_1$  und erhalte mit der Formel für die Reihenschaltung:

$$\underline{Z}_1 = \underline{R} + \underline{X}_{L2} = 16\ \Omega + j8\ \Omega$$

$Z_1$  ist zu  $X_C$  parallel geschaltet. Diese Parallelschaltung nenne ich  $Z_2$ . Ich bestimme  $\underline{Z}_2$  mit der Formel für die Parallelschaltung.

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{X}_C}{\underline{Z}_1 + \underline{X}_C} = \frac{(16\ \Omega + j8\ \Omega) \cdot (-jX_C)}{(16\ \Omega + j8\ \Omega) + (-jX_C)} = \frac{-j16\ \Omega X_C + 8\ \Omega X_C}{16\ \Omega + j8\ \Omega - jX_C}$$

Hinzu kommt noch  $\underline{X}_{L1}$ , wenn ich den Gesamtwiderstand  $\underline{Z}$  bestimmen will:

$$\underline{Z} = \underline{X}_{L1} + \underline{Z}_2 = jX_L + \frac{-j16\ \Omega X_C + 8\ \Omega X_C}{16\ \Omega + j8\ \Omega - jX_C}$$

Da  $\underline{Z} = 10\ \Omega$  (reell) bekannt ist, kann diesen Wert für  $\underline{Z}$  einsetzen. Ich erhalte dann *eine* Komplexe Gleichung mit *zwei* Variablen.

$$10\ \Omega = jX + \frac{-j16\ \Omega X_C + 8\ \Omega X_C}{16\ \Omega + j8\ \Omega - jX_C}$$

Eine solche Gleichung löst man am besten dadurch, dass man sie in *Komponentengleichungen* aufspaltet. Damit das möglich ist, muss ich die Gleichung vorher mit dem

Hauptnenner multiplizieren, um keine Brüche mehr zu haben. **Die Aufspaltung ist nämlich nur bei *Linearen Gleichungen* möglich!**

$$\begin{aligned}
 10\Omega &= jX_L + \frac{-j16\Omega X_C + 8\Omega X_C}{16\Omega + j8\Omega - jX_C} \cdot (16\Omega + j8\Omega - jX_C) \\
 10\Omega \cdot (16\Omega + j8\Omega - jX_C) &= jX_L \cdot (16\Omega + j8\Omega - jX_C) - j16\Omega X_C + 8\Omega X_C \\
 160\Omega^2 + j80\Omega^2 - j10\Omega X_C &= j16\Omega X_L - 8\Omega X_L + X_L X_C - j16\Omega X_C + 8\Omega X_C + j10\Omega X_C \\
 160\Omega^2 + j80\Omega^2 &= j16\Omega X_L - 8\Omega X_L + X_L X_C - j6\Omega X_C + 8\Omega X_C
 \end{aligned}$$

Diese Komplexe Gleichung kann nun aufgespaltet werden in eine Gleichung mit den *Realteilen* und eine andere Gleichung mit den *Imaginärteilen*.

$$\begin{aligned}
 \text{Re: } 160\Omega^2 &= -8\Omega X_L + X_L X_C + 8\Omega X_C \\
 \text{Im: } 80\Omega^2 &= 16\Omega X_L - 6\Omega X_C
 \end{aligned}$$

Ich löse die Gleichung aus den Imaginärteilen nach  $X_L$  auf, um das Ergebnis in die andere Gleichung einzusetzen.

$$\begin{aligned}
 80\Omega^2 &= 16\Omega X_L - 6\Omega X_C + 6\Omega X_C \\
 80\Omega^2 + 6\Omega X_C &= 16\Omega X_L : 16\Omega \\
 5\Omega + \frac{3}{8}X_C &= X_L
 \end{aligned}$$

Einsetzen in die Reelle Gleichung:

$$\begin{aligned}
 160 \Omega^2 &= -8 \Omega X_L + X_L X_C + 8 \Omega X_C \\
 160 \Omega^2 &= -8 \Omega \left(5 \Omega + \frac{3}{8} X_C\right) + \left(5 \Omega + \frac{3}{8} X_C\right) X_C + 8 \Omega X_C \\
 160 \Omega^2 &= -40 \Omega^2 - 3 \Omega X_C + 5 \Omega X_C + \frac{3}{8} X_C^2 + 8 \Omega X_C + 40 \Omega^2 \\
 200 \Omega^2 &= 10 \Omega X_C + \frac{3}{8} X_C^2 \quad | \cdot \frac{8}{3} \\
 \frac{1600}{3} \Omega^2 &= \frac{80}{3} \Omega X_C + X_C^2 \quad | - \frac{1600}{3} \Omega^2 \\
 0 &= X_C^2 + \frac{80}{3} \Omega X_C - \frac{1600}{3} \Omega^2 \\
 X_{C1/2} &= -\frac{40}{3} \Omega \pm \sqrt{\left(\frac{40}{3} \Omega\right)^2 + \frac{1600}{3} \Omega^2} \\
 &= -\frac{40}{3} \Omega \pm \sqrt{\frac{1600}{9} \Omega^2 + \frac{4800}{9} \Omega^2} \\
 &= -\frac{40}{3} \Omega \pm \sqrt{\frac{6400}{9} \Omega^2} \\
 &= -\frac{40}{3} \Omega \pm \frac{80}{3} \Omega \\
 X_{C1} &= \frac{40}{3} \Omega \\
 X_{C2} &= -\frac{120}{3} \Omega = -40 \Omega
 \end{aligned}$$

Die Lösung  $X_{C2} = -40 \Omega$  entfällt, denn es können nur positive Werte eingesetzt werden. Sonst wäre  $C$  eine Spule! Die Lösung  $X_{C1} = \frac{40}{3} \Omega$  setze ich in die umgeformte Imaginärteil-Gleichung ein.

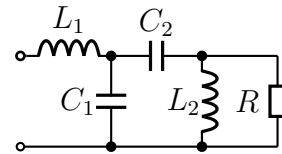
$$X_L = 5 \Omega + \frac{3}{8} X_C = 5 \Omega + \frac{3}{8} \cdot \frac{40}{3} \Omega = 10 \Omega$$

Die Lösungen lauten also:  $X_L = 10 \Omega$        $X_C = \frac{40}{3} \Omega \approx 13,3 \Omega$

#### 4.2.4 Aufgabe 4

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie die Kapazität  $C_2$  so, dass bei einer Kreisfrequenz von  $\omega = 1\,000\text{ s}^{-1}$  der Ersatzwiderstand  $Z$  der Schaltung rein reell wird! Bekannt sind folgende Werte:

$L_1 = 4\text{ H}$     $L_2 = 25\text{ H}$     $R = 50\text{ k}\Omega$     $C_1 = 200\text{ nF}$   
 Wie groß wird damit der Ersatzwiderstand  $Z$ ?



**Lösung:** Zunächst werden die Blindwiderstände bestimmt:

$$\underline{X}_{L1} = j\omega L_1 = j \cdot 1\,000\text{ s}^{-1} \cdot 4\text{ H} = j4\text{ k}\Omega$$

$$\underline{X}_{L2} = j\omega L_2 = j \cdot 1\,000\text{ s}^{-1} \cdot 25\text{ H} = j25\text{ k}\Omega$$

$$\underline{X}_{C1} = \frac{1}{j\omega C_1} = \frac{1}{j \cdot 1\,000\text{ s}^{-1} \cdot 200\text{ }\mu\text{F}} = -j5\text{ k}\Omega$$

Den Betrag des kapazitiven Blindwiderstandes des gesuchten Kondensators nenne ich  $X$ .  
 Damit erhalte ich:

$$\underline{X}_{C2} = -jX$$

Den Ersatzwiderstand der Parallelschaltung  $R \parallel L_2$  nenne ich  $\underline{Z}_1$ . Dieser kann berechnet werden:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \frac{R \cdot \underline{X}_{L2}}{R + \underline{X}_{L2}} \\ &= \frac{50\text{ k}\Omega \cdot j25\text{ k}\Omega}{50\text{ k}\Omega + j25\text{ k}\Omega} \\ &= \frac{j1\,250\text{ k}\Omega^2}{50\text{ k}\Omega + j25\text{ k}\Omega} \\ &= \frac{j1\,250\text{ k}\Omega^2 \cdot (50\text{ k}\Omega - j25\text{ k}\Omega)}{(50\text{ k}\Omega + j25\text{ k}\Omega) \cdot (50\text{ k}\Omega - j25\text{ k}\Omega)} \\ &= \frac{j62\,500\text{ k}\Omega^3 + 31\,250\text{ k}\Omega^3}{2\,500\text{ k}\Omega^2 + 625\text{ k}\Omega^2} \\ &= \frac{3\,125\text{ k}\Omega^2}{j62\,500\text{ k}\Omega^3 + 31\,250\text{ k}\Omega^3} \\ &= j \frac{62\,500\text{ k}\Omega^3}{3\,125\text{ k}\Omega^2} + \frac{31\,250\text{ k}\Omega^3}{3\,125\text{ k}\Omega^2} \\ \underline{Z}_1 &= j20\text{ k}\Omega + 10\text{ k}\Omega \end{aligned}$$

Jetzt kann  $\underline{Z}_1$  mit  $\underline{X}_{C2}$  zu  $\underline{Z}_2$  zusammengefasst werden.

$$\underline{Z}_2 = \underline{X}_{C2} + \underline{Z}_1 = -jX + j20\text{ k}\Omega + 10\text{ k}\Omega$$

Zu  $\underline{Z}_2$  ist  $C_1$  parallelgeschaltet. Den zugehörigen Ersatzwiderstand nenne ich  $\underline{Z}_3$ . Wir können  $\underline{Z}_3$  über die Parallelschaltungsformel berechnen:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_3 &= \frac{\underline{X}_{C1} \cdot \underline{Z}_2}{\underline{X}_{C1} + \underline{Z}_2} \\ &= \frac{-j5 \text{ k}\Omega \cdot (-jX + j20 \text{ k}\Omega + 10 \text{ k}\Omega)}{-j5 \text{ k}\Omega - jX + j20 \text{ k}\Omega + 10 \text{ k}\Omega} \\ \underline{Z}_3 &= \frac{-5 \text{ k}\Omega X + 100 \text{ k}\Omega^2 - j50 \text{ k}\Omega^2}{j15 \text{ k}\Omega - jX + 10 \text{ k}\Omega} \end{aligned}$$

Nun kann der Ersatzwiderstand  $Z$  der Gesamtschaltung aufgestellt werden:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_3 + \underline{X}_{L1} = \frac{-5 \text{ k}\Omega X + 100 \text{ k}\Omega^2 - j50 \text{ k}\Omega^2}{j15 \text{ k}\Omega - jX + 10 \text{ k}\Omega} + j4 \text{ k}\Omega$$

Weil  $\underline{Z}$  **reell** werden soll, gilt:  $\underline{Z} = Z$  Die sich damit ergebende Gleichung kann dann in eine Lineare Gleichung umgeformt werden.

$$\begin{aligned} Z &= \frac{-5 \text{ k}\Omega X + 100 \text{ k}\Omega^2 - j50 \text{ k}\Omega^2}{j15 \text{ k}\Omega - jX + 10 \text{ k}\Omega} + j4 \text{ k}\Omega \quad | \cdot \text{Nenner} \\ Z \cdot (j15 \text{ k}\Omega - jX + 10 \text{ k}\Omega) &= -5 \text{ k}\Omega X + 100 \text{ k}\Omega^2 - j50 \text{ k}\Omega^2 + j4 \text{ k}\Omega \cdot (j15 \text{ k}\Omega - jX + 10 \text{ k}\Omega) \\ j15 \text{ k}\Omega Z - jXZ + 10 \text{ k}\Omega Z &= -5 \text{ k}\Omega X + 100 \text{ k}\Omega^2 - j50 \text{ k}\Omega^2 - 60 \text{ k}\Omega^2 + 4 \text{ k}\Omega X + j40 \text{ k}\Omega^2 \\ j15 \text{ k}\Omega Z - jXZ + 10 \text{ k}\Omega Z &= -1 \text{ k}\Omega X + 40 \text{ k}\Omega^2 - j10 \text{ k}\Omega^2 \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann nun in eine Realteil- und in eine Imaginärteilgleichung aufgespalten werden.

Re:	$10 \text{ k}\Omega Z = -1 \text{ k}\Omega X + 40 \text{ k}\Omega^2$
Im:	$15 \text{ k}\Omega Z - XZ = -10 \text{ k}\Omega^2$

Die Realteilgleichung kann einfach nach  $Z$  aufgelöst werden.

$$\begin{aligned} 10 \text{ k}\Omega Z &= -1 \text{ k}\Omega X + 40 \text{ k}\Omega^2 \quad | : (10 \text{ k}\Omega) \\ Z &= -0,1X + 4 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

Dieser Term kann nun für  $Z$  in die Imaginärteilgleichung eingesetzt werden. Man erhält eine Quadratische Gleichung, die z.B. mit der  $p$ - $q$ -Formel gelöst werden kann.

$$\begin{aligned} 15 \text{ k}\Omega Z - XZ &= -10 \text{ k}\Omega^2 \\ 15 \text{ k}\Omega \cdot (-0,1X + 4 \text{ k}\Omega) - X \cdot (-0,1X + 4 \text{ k}\Omega) &= -10 \text{ k}\Omega^2 \\ -1,5 \text{ k}\Omega \cdot X + 60 \text{ k}\Omega^2 + 0,1X^2 - 4 \text{ k}\Omega \cdot X &= -10 \text{ k}\Omega^2 && | + 10 \text{ k}\Omega \\ 0,1X^2 - 5,5 \text{ k}\Omega \cdot X + 70 \text{ k}\Omega^2 &= 0 && | \cdot 10 \\ X^2 - 55 \text{ k}\Omega \cdot X + 700 \text{ k}\Omega^2 &= 0 \\ X_{1/2} &= 27,5 \text{ k}\Omega \pm \sqrt{756,25 \text{ k}\Omega^2 - 700 \text{ k}\Omega^2} \\ &= 27,5 \text{ k}\Omega \pm 7,5 \text{ k}\Omega \\ X_1 &= 35 \text{ k}\Omega \quad X_2 = 20 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

Zu beiden Lösungen muss noch die entsprechende Kapazität bestimmt werden. Dazu stelle ich zunächst die Formel um.

$$X_{C_2} = \frac{1}{\omega C_2}$$

$$C_2 = \frac{1}{\omega X_{C_2}}$$

Beide Kapazitäten können nun bestimmt werden:

$$C_{21} = \frac{1}{\omega \cdot X_1} = \frac{1}{1000 \text{ s}^{-1} \cdot 35 \text{ k}\Omega} = 28,57 \text{ nF}$$

$$C_{22} = \frac{1}{\omega \cdot X_2} = \frac{1}{1000 \text{ s}^{-1} \cdot 20 \text{ k}\Omega} = 50 \text{ nF}$$

Zu jeder der beiden Lösungen gibt es natürlich einen anderen Gesamtwiderstand  $Z$ .

$$Z_{ges1} = -0,1X + 4 \text{ k}\Omega = -0,1 \cdot 35 \text{ k}\Omega + 4 \text{ k}\Omega = 500 \Omega$$

$$Z_{ges2} = -0,1X + 4 \text{ k}\Omega = -0,1 \cdot 20 \text{ k}\Omega + 4 \text{ k}\Omega = 2 \text{ k}\Omega$$

Zusammengefasste Ergebnisse:

Lösung 1:  $C_{21} = 28,57 \text{ nF}$  mit  $Z_1 = 500 \Omega$

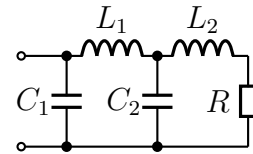
Lösung 2:  $C_{22} = 50 \text{ nF}$  mit  $Z_2 = 2 \text{ k}\Omega$

### 4.2.5 Aufgabe 5

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie den Widerstand  $R$  so, dass die gesamte Schaltung einen rein reellen Ersatzwiderstand hat! Berechnen Sie auch, wie groß dieser Ersatzwiderstand dann wird!

Gegeben sind folgende Werte:

$$X_{L1} = 30 \Omega \quad X_{L2} = 36 \Omega \quad X_{C1} = 300 \Omega \quad X_{C2} = 45 \Omega$$



**Lösung:** Zunächst werden die komplexen Widerstände aufgestellt.

$$\begin{aligned} \underline{X}_{L1} &= j30 \Omega \\ \underline{X}_{L2} &= j36 \Omega \\ \underline{X}_{C1} &= -j300 \Omega \\ \underline{X}_{C2} &= -j45 \Omega \\ \underline{R} &= R \end{aligned}$$

Die Zusammenfassung aus  $R$  und  $L_2$  nenne ich  $Z_1$ .

$$\underline{Z}_1 = \underline{R} + \underline{X}_{L2} = R + j36 \Omega$$

Zu  $Z_1$  ist  $C_2$  parallelgeschaltet. Diese Parallelschaltung nenne ich  $Z_2$ .

$$\begin{aligned} \underline{Z}_2 &= \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{X}_{C2}}{\underline{Z}_1 + \underline{X}_{C2}} \\ &= \frac{(R + j36 \Omega) \cdot (-j45 \Omega)}{R + j36 \Omega - j45 \Omega} \\ \underline{Z}_2 &= \frac{-j45 \Omega R + 1620 \Omega^2}{R - j9 \Omega} \end{aligned}$$

Zu  $Z_2$  ist  $L_1$  in Reihe geschaltet. Diese Reihenschaltung nenne ich  $Z_3$ .

$$\begin{aligned} \underline{Z}_3 &= \underline{Z}_2 + \underline{X}_{L1} \\ &= \frac{-j45 \Omega R + 1620 \Omega^2}{R - j9 \Omega} + j30 \Omega \\ &= \frac{-j45 \Omega R + 1620 \Omega^2}{R - j9 \Omega} + \frac{j30 \Omega \cdot (R - j9 \Omega)}{R - j9 \Omega} \\ &= \frac{-j45 \Omega R + 1620 \Omega^2 + j30 \Omega R + 270 \Omega^2}{R - j9 \Omega} \\ \underline{Z}_3 &= \frac{-j15 \Omega R + 1890 \Omega^2}{R - j9 \Omega} \end{aligned}$$

Zu  $Z_3$  ist  $C_1$  parallelgeschaltet. Diese Parallelschaltung nenne ich  $Z$ , denn es ist der Ersatzwiderstand der gesamten Schaltung.

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= \frac{Z_3 \cdot X_{C1}}{Z_3 + X_{C1}} \\
&= \frac{\frac{-j15 \Omega R + 1890 \Omega^2}{R - j9 \Omega} \cdot (-j300 \Omega)}{\frac{-j15 \Omega R + 1890 \Omega^2}{R - j9 \Omega} - j300 \Omega} \\
&= \frac{(-j15 \Omega R + 1890 \Omega^2) \cdot (-j300 \Omega)}{R - j9 \Omega} \\
&= \frac{-j15 \Omega R + 1890 \Omega^2 - j300 \Omega \cdot (R - j9 \Omega)}{R - j9 \Omega} \\
&= \frac{(-j15 \Omega R + 1890 \Omega^2) \cdot (-j300 \Omega)}{-j15 \Omega R + 1890 \Omega^2 - j300 \Omega \cdot (R - j9 \Omega)} \\
&= \frac{-4500 \Omega^2 R - j567000 \Omega^3}{-j15 \Omega R + 1890 \Omega^2 - j300 \Omega R - 2700 \Omega^2} \\
\underline{Z} &= \frac{-4500 \Omega^2 R - j567000 \Omega^3}{-j315 \Omega R - 810 \Omega^2}
\end{aligned}$$

Da  $\underline{Z}$  reell sein muss, gilt:  $\underline{Z} = Z$ .

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{-4500 \Omega^2 R - j567000 \Omega^3}{-j315 \Omega R - 810 \Omega^2} \\
Z \cdot (-j315 \Omega R - 810 \Omega^2) &= -4500 \Omega^2 R - j567000 \Omega^3 \\
-j315 \Omega R Z - 810 \Omega^2 Z &= -4500 \Omega^2 R - j567000 \Omega^3
\end{aligned}$$

Diese Komplexe Gleichung kann nun in eine Realteil- und eine Imaginärteilgleichung aufgespalten werden.

Re:	$-810 \Omega^2 Z = -4500 \Omega^2 R$
Im:	$-315 \Omega R Z = -567000 \Omega^3$

Nun kann die Realteilgleichung nach  $Z$  umgestellt werden.

$$\begin{aligned}
-810 \Omega^2 Z &= -4500 \Omega^2 R \quad | : (-810 \Omega^2) \\
Z &= \frac{50}{9} R
\end{aligned}$$

Das Ergebnis wird in die Imaginärteilgleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned}
-315 \Omega R Z &= -567000 \Omega^3 \\
-315 \Omega R \cdot \frac{50}{9} R &= -567000 \Omega^3 \\
-1750 \Omega R^2 &= -567000 \Omega^3 \quad | : (-1750 \Omega) \\
R^2 &= 324 \Omega^2 \quad | \sqrt{\phantom{x}} \\
R_{1/2} &= \pm 18 \Omega
\end{aligned}$$

Der negative Wert entfällt natürlich aus elektrotechnischen Gründen. Es gibt nur die eine Lösung:

$$R = 18 \Omega$$



Dieser Wert kann in die umgeformte Realteilgleichung eingesetzt werden, um  $Z$  zu erhalten.

$$\begin{aligned}Z &= \frac{50}{9}R \\Z &= \frac{50}{9} \cdot 18 \Omega \\Z &= 100 \Omega\end{aligned}$$

Zusammengefasste Ergebnisse:  $R = 18 \Omega$  und  $Z = 100 \Omega$