Grundlagen der Zweitor-/Vierpol-Theorie

W. Kippels

1. Februar 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

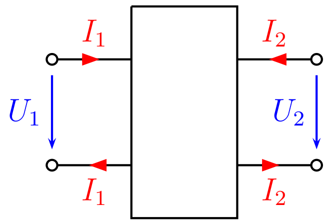
Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Definition des Zweitors



Nebenstehend ist ein Zweitor – auch Vierpol genannt – mit seinen Anschlüssen sowie der Bezeichnung der Spannungen und Ströme dargestellt. Die beiden linken Anschlüsse stellen Tor 1 dar, die beiden rechten Tor 2. Um als Tor angesehen werden zu können, muss an beiden Toren die **Torbedingung** erfüllt sein. Das bedeutet, dass der Strom, der am oberen Toranschluss hineinfließt, am unteren Toranschluss wieder herausfließt. In der Schaltskizze wird das durch gleiche Namen der Ströme (I_1 bzw. I_2) ausgedrückt. **Die angegebenen Strom- und Spannungsrichtungen sind verbindlich!**

3 Widerstands-Matrix

Eine Möglichkeit, ein Zweitor zu beschreiben, ist die Angabe der **Widerstands-Parameter**. Da die Widerstände neben Wirkanteilen auch Blindanteile enthalten können, werden die Parameter vom Grundsatz her als **Komplexe** Größen definiert. Diese Parameter fasst man zu einer **Matrix** zusammen.

Die Widerstandsmatrix lautet:

$$\underline{Z} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{pmatrix}$$

Die einzelnen Parameter sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{11} &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \quad \text{bei} \quad \underline{I}_2 = 0 \quad (\text{Tor 2 offen}) \\
\underline{Z}_{12} &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} \quad \text{bei} \quad \underline{I}_1 = 0 \quad (\text{Tor 1 offen}) \\
\underline{Z}_{21} &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} \quad \text{bei} \quad \underline{I}_2 = 0 \quad (\text{Tor 2 offen}) \\
\underline{Z}_{22} &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} \quad \text{bei} \quad \underline{I}_1 = 0 \quad (\text{Tor 1 offen})
\end{aligned}$$

4 Leitwert-Matrix

Wie wir noch sehen werden, ist die Angabe der Widerstandsparameter nicht bei jedem Zweitor möglich. Wenn beispielsweise das Zweitor nur je eine Verbindung zwischen den oberen Anschlüssen der Tore und den uteren Anschlüssen der Tore enthält, wird nirgendwo ein Strom fließen, wenn ein Tor offen bleibt. Dann müsste man durch 0 dividieren, was bekanntlich ja nicht möglich ist. In diesen Fällen können (meist) stattdessen die

Leitwert-Parameter angegeben werden.

Die Leitwertmatrix lautet:

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{pmatrix}$$

Die einzelnen Parameter sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\underline{Y}_{11} &= \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} \quad \text{bei} \quad \underline{U}_2 = 0 \quad \text{(Tor 2 kurzgeschlossen)} \\
\underline{Y}_{12} &= \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \quad \text{bei} \quad \underline{U}_1 = 0 \quad \text{(Tor 1 kurzgeschlossen)} \\
\underline{Y}_{21} &= \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} \quad \text{bei} \quad \underline{U}_2 = 0 \quad \text{(Tor 2 kurzgeschlossen)} \\
\underline{Y}_{22} &= \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \quad \text{bei} \quad \underline{U}_1 = 0 \quad \text{(Tor 1 kurzgeschlossen)}
\end{aligned}$$

5 Hybrid-Matrix

Leider gibt es Schaltungen, die weder mit der Widerstands- noch mit der Leitwert-Matrix zu beschreiben sind. Wenn das Zweitor beispielsweise nur einen Transformator enthält, dann ist ein solcher Fall gegeben. Hier hilft die **Hybrid-Matrix** weiter. In der Hybrid-Matrix sind **unterschiedliche** Größen zusammengefasst. Es handelt sich um einen Widerstand, einen Leitwert, ein Spannungs- und ein Stromverhältnis. Einzelheiten sind im Folgenden dargestellt.

Die Hybridmatrix lautet:

$$\underline{H} = \begin{pmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{pmatrix}$$

Die einzelnen Parameter sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\underline{H}_{11} &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \quad \text{bei} \quad \underline{U}_2 = 0 \quad \text{(Tor 2 kurzgeschlossen)} \\
\underline{H}_{12} &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \quad \text{bei} \quad \underline{I}_1 = 0 \quad \text{(Tor 1 offen)} \\
\underline{H}_{21} &= \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \quad \text{bei} \quad \underline{U}_2 = 0 \quad \text{(Tor 2 kurzgeschlossen)} \\
\underline{H}_{22} &= \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \quad \text{bei} \quad \underline{I}_1 = 0 \quad \text{(Tor 1 offen)}
\end{aligned}$$

6 Umrechnungen

Die unterschiedlichen Parameter können in jeweils andere Parameter umgerechnet werden.[1] Ohne dass ich eine Herleitung dazu durchführen möchte, will ich folgende Umrechnungsformeln angeben:

$\underline{Z}_{11} = \dfrac{\underline{Y}_{22}}{\det \underline{Y}}$ $\underline{Z}_{11} = \dfrac{\det \underline{H}}{\underline{H}_{22}}$	$\underline{Z}_{12} = -\dfrac{\underline{Y}_{12}}{\det \underline{Y}}$ $\underline{Z}_{12} = \dfrac{\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{22}}$	$\underline{Z}_{21} = -\dfrac{\underline{Y}_{21}}{\det \underline{Y}}$ $\underline{Z}_{21} = -\dfrac{\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{22}}$	$\underline{Z}_{22} = \dfrac{\underline{Y}_{11}}{\det \underline{Y}}$ $\underline{Z}_{22} = \dfrac{1}{\underline{H}_{22}}$
$\underline{Y}_{11} = \dfrac{\underline{Z}_{22}}{\det \underline{Z}}$ $\underline{Y}_{11} = \dfrac{1}{\underline{H}_{11}}$	$\underline{Y}_{12} = -\dfrac{\underline{Z}_{12}}{\det \underline{Z}}$ $\underline{Y}_{12} = -\dfrac{\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{11}}$	$\underline{Y}_{21} = -\dfrac{\underline{Z}_{21}}{\det \underline{Z}}$ $\underline{Y}_{21} = \dfrac{\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{11}}$	$\underline{Y}_{22} = \dfrac{\underline{Z}_{11}}{\det \underline{Z}}$ $\underline{Y}_{22} = \dfrac{\det \underline{H}}{\underline{H}_{11}}$
$\underline{H}_{11} = \dfrac{\det \underline{Z}}{Z_{22}}$ $\underline{H}_{11} = \dfrac{1}{\underline{Y}_{11}}$	$\underline{H}_{12} = \dfrac{\underline{Z}_{12}}{Z_{22}}$ $\underline{H}_{12} = -\dfrac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{11}}$	$\underline{H}_{21} = -\dfrac{\underline{Z}_{21}}{Z_{22}}$ $\underline{H}_{21} = \dfrac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11}}$	$\underline{H}_{22} = \dfrac{1}{Z_{22}}$ $\underline{H}_{22} = \dfrac{\det \underline{Y}}{\underline{Y}_{11}}$

7 Eigenschaften besonderer Zweitore

7.1 Reziprozität

Zweitore können **reziprok** sein. Darunter versteht man folgendes:
Legt man eine Spannung U_1 an Tor 1 an, so ergibt sich an Tor 2 ein Strom I_2, wenn Tor 2 kurzgeschlossen wird. Legt man die gleiche Spannung als Spannung U_2 an Tor 2 an, so ergibt sich an einem reziproken Zweitor der gleiche Strom als Strom I_1 am kurzgeschlossenen Tor 1.

Alle Schaltungen, die ausschließlich R-L-C-Bauelemente enthalten, sind reziprok.

Reziproke Zweitore erfüllen folgende Bedingungen:

$$\underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{12} \qquad \underline{Y}_{21} = \underline{Y}_{12} \qquad \underline{H}_{21} = -\underline{H}_{12}$$

Es reicht, wenn man eine der Bedingungen überprüft. Ist diese erfüllt, sind die anderen automatisch auch erfüllt.

7.2 Symmetrie

Ist ein Zweitor **symmetrisch** – das bedeutet, man kann die Tore ohne Funktionsänderung gegeneinander austauschen, dann gilt zusätzlich zur Reziprozitätsbedingung:

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22} \qquad \underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22} \qquad \det \underline{H} = 1$$

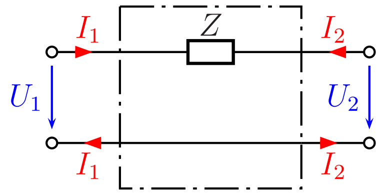
[1] Je nach Größe der jeweiligen Parameter kann es passieren, dass man dabei auch einmal durch Null dividieren muss. In diesem Fall ist eine Umrechnung natürlich nicht möglich.

8 Schaltungsbeispiele

Hier folgen noch ein paar einfache Schaltungsbeispiele. Beachtenswert ist, dass nicht alle Parameter zu jeder Schaltung aufgestellt werden können.

8.1 Schaltungsbeispiel 1

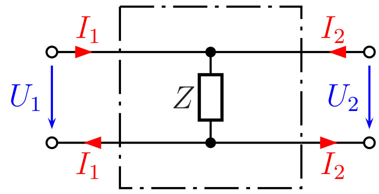
In dieser Schaltung kann niemals ein Strom (I_1 oder I_2) fließen, solange ein Tor offen bleibt. Die Z-Parameter können daher nicht gebildet werden, denn im Nenner steht jeweils der Strom I_1 oder I_2. Die Y- und auch die H-Parameter hingegen können aufgestellt werden. Hier folgen die zugehörigen Matritzen:



$\underline{Z}$ existiert nicht $\qquad \underline{Y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{Z}} & -\frac{1}{\underline{Z}} \\ -\frac{1}{\underline{Z}} & \frac{1}{\underline{Z}} \end{pmatrix} \qquad \underline{H} = \begin{pmatrix} \underline{Z} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

8.2 Schaltungsbeispiel 2

Wenn in dieser Schaltung ein Tor (Tor 1 oder Tor 2) kurzgeschlossen wird, sind beide Spannungen (U_1 und U_2) Null. Da bei den Y-Parametern bei jeweils einem kurzgeschlossenen Tor eine dieser Spannungen im Nenner steht, sind die Y-Parameter in dieser Schaltung nicht zu bestimmen. Z- und H-Parameter können hingegen angegeben werden. Diese lauten wie folgt:



$\underline{Z} = \begin{pmatrix} \underline{Z} & -\underline{Z} \\ -\underline{Z} & \underline{Z} \end{pmatrix} \qquad \underline{Y}$ existiert nicht $\qquad \underline{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{\underline{Z}} \end{pmatrix}$

8.3 Schaltungsbeispiel 3

Bei einem (idealen) Transformator als Zweitor können weder Z- noch Y-Parameter angegeben werden. Man kann sich leicht selbst überlegen, warum das so ist. Lediglich H-Parameter können angegeben werden:

$$\underline{H} = \begin{pmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{pmatrix}$$