Übungsaufgaben zur Vektorrechnung

Wolfgang Kippels

30. März 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Einleitung

Hier stehen einige Übungsaufgaben zu Grundlagen der Vektorrechnung. Die nötigen Erläuterungen und Erklärungen der Grundlagen dazu finden Sie hier:

http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/vektor.pdf

3 Einfache Aufgaben

Lösen Sie die nachfolgenden Aufgaben. Die Lösungen befinden sich im übernächsten Hauptkapitel.

3.1 Aufgabe 1

Sind die Vektoren **linear abhängig** (Aufg. a und b) bzw. **komplanar** (Aufg. c bis f)?

3.1.1 Aufgabe 1a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3.1.2 Aufgabe 1b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.1.3 Aufgabe 1c

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

3.1.4 Aufgabe 1d

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.1.5 Aufgabe 1e

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.1.6 Aufgabe 1f

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.2 Aufgabe 2

Bestimmen Sie den Parameter a so, dass die Vektoren **komplanar** sind!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3.3 Aufgabe 3

Stehen die Vektoren zueinander senkrecht (orthogonal)?

3.3.1 Aufgabe 3a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.3.2 Aufgabe 3b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

3.3.3 Aufgabe 3c

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3.4 Aufgabe 4

Bestimmen Sie den Parameter x so, dass die Vektoren aufeinander senkrecht stehen!

3.4.1 Aufgabe 4a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ x \\ 5 \end{pmatrix}$$

3.4.2 Aufgabe 4b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3.5 Aufgabe 5

Ordnen Sie die fünf Vektoren nach der Länge der zugehörigen Pfeile!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} \qquad \vec{e} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

3.6 Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Beträge der Vektoren!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -21 \\ -28 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 15 \\ -16 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix} \qquad \vec{f} = \begin{pmatrix} 9 \\ 24 \\ -30 \end{pmatrix} \qquad \vec{g} = \begin{pmatrix} -21 \\ -12 \\ 28 \end{pmatrix} \qquad \vec{h} = \begin{pmatrix} -64 \\ 48 \\ 39 \end{pmatrix}$$

3.7 Aufgabe 7

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren!

3.7.1 Aufgabe 7a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -21 \\ -28 \end{pmatrix}$$

3.7.2 Aufgabe 7b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ 36 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 24 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

3.8 Aufgabe 8

Bestimmen Sie die fehlende Komponente x so, dass sich ein Winkel von 60° zwischen den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ergibt!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ \sqrt{50} \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.9 Aufgabe 9

Bestimmen Sie die Parameter x, y und z so, dass die drei Vektoren paarweise aufeinander senkrecht stehen!

3.9.1 Aufgabe 9a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ -25 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ y \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$$

3.9.2 Aufgabe 9b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} y \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 15 \\ -18 \\ z \end{pmatrix}$$

3.10 Aufgabe 10

Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{d}$ senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit dem Betrag von $\vec{c}$!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ -23,5 \end{pmatrix}$$

3.11 Aufgabe 11

Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks zwischen den Endpunkten der drei Vektoren!

3.11.1 Aufgabe 11a

Gegeben sind drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3.11.2 Aufgabe 11b

Gegeben sind drei Vektoren im $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4 Zusammengesetzte Aufgaben

4.1 Aufgabe 12

Gegeben sind die drei Vektoren:

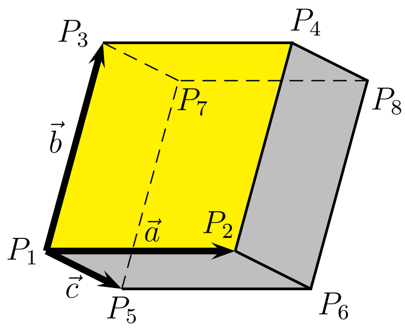
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} u \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ w \end{pmatrix}$$

mit $u = -1$, $v = 7$ und $w = 1$.

1. Sind die drei Vektoren *komplanar*? Begründen Sie Ihre Antwort durch eine Rechnung!
2. Berechnen Sie die Winkel α, β und γ, die die Vektoren miteinander bilden mit $\alpha = \angle\vec{b}, \vec{c}$, $\beta = \angle\vec{a}, \vec{c}$ und $\gamma = \angle\vec{a}, \vec{b}$!
3. Berechnen Sie die Länge des Vektors $\vec{d}$ mit $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$!
4. Bestimmen Sie nun die Parameter u, v und w so, dass die Winkel α, β und γ jeweils rechte Winkel darstellen!

4.2 Aufgabe 13

Gegeben sind die Punkte $P_1(2|1|3)$, $P_2(7|1|3)$ und $P_3(x|5|6)$. Der Vektor $\vec{a}$ verläuft von P_1 nach P_2, der Vektor $\vec{b}$ von P_1 nach P_3. Ausgehend von diesen drei Punkten soll ein Würfel entwickelt werden, dessen **zweidimensionales** Bild nebenstehend skizziert ist.



a) Bestimmen Sie den Parameter x so, dass sich zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein **Rechter Winkel** ergibt.

b) Weisen Sie nach, dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **gleich lang** sind. Gehen Sie dabei von $x = 2$ aus.

c) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{c}$, der sowohl senkrecht auf $\vec{a}$ als auch auf $\vec{b}$ steht und die gleiche Länge wie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ hat.

d) Bestimmen Sie den Punkt P_4, so dass die Punkte P_1, P_2, P_4, P_3 ein Quadrat ergeben. (Das Quadrat ist im Bild gelb markiert.)

e) Ergänzen Sie das Quadrat aus **d)** zu einem Würfel mit den weiteren Eckpunkten P_5, P_6, P_7 und P_8 gemäß dem obenstehenden Bild. Gehen Sie hierbei von $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ aus.

f) Um den **dreidimensionalen** Würfel zeichnen zu können, soll er auf die **zweidimensionale** Ebene abgebildet werden. Die Projektion erfolgt nach dieser Abbildungsvorschrift:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x + 0{,}5z \\ y + 0{,}5z \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie zu jedem Punkt $P_1 \ldots P_8$ aus dem $\mathbb{R}^3$ (aus dem dreidimensionalen Raum) den jeweils zugehörigen Punkt $P_1^* \ldots P_8^*$ aus dem $\mathbb{R}^2$ (aus der zweidimensionalen Zeichenebene)!

g) Berechnen Sie sie gelb markierte parallelogrammförmige Fläche auf der Zeichenebene (im $\mathbb{R}^2$), die durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird!

4.3 Aufgabe 14

Gegeben sind die drei Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} u \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ v \\ -8 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ w \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Parameter u, v und w so, dass die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ paarweise aufeinander senkrecht stehen!

Ein Quader hat die Eckpunkte D, E, F, G, H, I, J und K. Die Kanten $\vec{ED}$, $\vec{EI}$ und $\vec{EF}$ entsprechen den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Der Punkt E hat die Koordinaten (6|20|15).

Das Kantenmodell des Quaders soll auf einem Bildschirm dargestellt werden. Die Koordinaten x, y und z des dreidimensionalen Quaders werden auf den zweidimensionalen Bildschirm mit den Koordinaten x_b und y_b abgebildet durch die Zuordnung $x_b = x + 0,5z$ und $y_b = y + 0,5z$. Berechnen Sie die Bildschirmkoordinaten aller 8 Eckpunkte des Quaders!

5 Lösungen der einfachen Aufgaben

5.1 Aufgabe 1

5.1.1 Aufgabe 1a

Sind die Vektoren **linear abhängig**?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung: Ich berechne die Determinante[1] $\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$. Ist sie Null, dann sind die Vektoren **linear abhängig**.

$$\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 - 0 \cdot 2 = 0$$

Die Determinante ist Null. $\Rightarrow$ Die Vektoren sind **linear abhängig**.

5.1.2 Aufgabe 1b

Sind die Vektoren **linear abhängig**?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Ich berechne die Determinante $\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$. Ist sie Null, dann sind die Vektoren **linear abhängig**.

$$\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 2 \neq 0$$

Die Determinante ist **nicht** Null. $\Rightarrow$ Die Vektoren sind **linear unabhängig**.

[1] Alle Hintergrundinformationen zu Determinanten, was das ist und wie sie berechnet wird, sind hier zu finden: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/det.pdf

5.1.3 Aufgabe 1c

Sind die Vektoren **komplanar**?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Lösung: Ich berechne die Determinante $\det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$. Ist sie Null, dann sind die Vektoren **komplanar**.

$$\det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -5 & 1 & 2 \end{array}\right| = -10 - 10 - 10 + 10 + 10 + 10 = 0$$

Die Determinante ist Null. $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Die Vektoren sind } \textbf{komplanar}.}$

5.1.4 Aufgabe 1d

Sind die Vektoren **komplanar**?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Ich berechne die Determinante $\det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$. Ist sie Null, dann sind die Vektoren **komplanar**.

$$\det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right| = 0 + 4 - 8 - 0 - 0 + 2 = -2 \neq 0$$

Die Determinante ist **nicht** Null. $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Die Vektoren sind } \textbf{nicht komplanar}.}$

5.1.5 Aufgabe 1e

Sind die Vektoren **komplanar**?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Ich berechne die Determinante $\det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$. Ist sie Null, dann sind die Vektoren **komplanar**.

$$\det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right. = -1 + 0 + 0 - 1 - 1 - 0 = -3 \neq 0$$

Die Determinante ist **nicht** Null. $\Rightarrow$ Die Vektoren sind **nicht komplanar**.

5.1.6 Aufgabe 1f

Sind die Vektoren **komplanar**?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Komplanarität wird am einfachsten mit der Determinante aus $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gebildet.

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & -7 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Die Determinante löse ich mit Hilfe des Satzes von Sarrus[2] auf. Dazu schreibe ich die ersten beiden Spalten als Hilfe dahinter.

$$\begin{aligned} \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & -7 & -2 & 5 & -7 \\ -3 & 4 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right. \\ &= -14 + 18 + 100 - 105 + 16 - 15 \\ \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= 0 \end{aligned}$$

Die Determinante ist $= 0 \Rightarrow$ die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind **komplanar**.

[2]Weiteres zum Satz von Sarrus finden sie hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/lingl.pdf

5.2 Aufgabe 2

Bestimmen Sie den Parameter a so, dass die Vektoren **komplanar** sind!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\text{Vektoren } \vec{a},\ \vec{b} \text{ und } \vec{c} \text{ komplanar} \quad \Leftrightarrow \quad \det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = 0$$

$$\begin{aligned}
\det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) &= 0 \\
\left|\begin{array}{ccc|cc} a & -5 & 5 & a & -5 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right. &= 0 \\
0 + 0 + 30 - 0 - 12a + 30 &= 0 \\
-12a + 60 &= 0 \quad | - 60 \\
-12a &= -60 \quad | : (-12) \\
a &= 5
\end{aligned}$$

Der fehlende Parameter ist: $\boxed{a = 5}$

5.3 Aufgabe 3

5.3.1 Aufgabe 3a

Stehen die Vektoren zueinander senkrecht (orthogonal)?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Die Bedingung für Orthogonalität lautet: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4 \neq 0$$

Die Vektoren sind **nicht** orthogonal.

5.3.2 Aufgabe 3b

Stehen die Vektoren zueinander senkrecht (orthogonal)?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Lösung: Die Bedingung für Orthogonalität lautet: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \cdot (-4) + 4 \cdot (-3) = 0$$

Die Vektoren sind orthogonal.

5.3.3 Aufgabe 3c

Stehen die Vektoren zueinander senkrecht (orthogonal)?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung: Die Bedingung für Orthogonalität lautet: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 = -10 + 12 - 2 = 0$$

Die Vektoren sind orthogonal.

5.4 Aufgabe 4

5.4.1 Aufgabe 4a

Bestimmen Sie den Parameter x so, dass die Vektoren aufeinander senkrecht stehen!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ x \\ 5 \end{pmatrix}$$

Lösung: Die Bedingung für Orthogonalität lautet: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ x \\ 5 \end{pmatrix} &= 0 \\ -4 + x + 15 &= 0 \\ x + 11 &= 0 \quad | - 11 \\ x &= -11 \end{aligned}$$

Der fehlende Parameter lautet: $\boxed{x = 11}$

5.4.2 Aufgabe 4b

Bestimmen Sie den Parameter x so, dass die Vektoren aufeinander senkrecht stehen!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösung: Die Bedingung für Orthogonalität lautet: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} &= 0 \\ 5x + 0 + 0 &= 0 \\ 5x &= 0 \quad | : 5 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Der fehlende Parameter lautet: $\boxed{x = 0}$

5.5 Aufgabe 5

Ordnen Sie die fünf Vektoren nach der Länge der zugehörigen Pfeile!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} \qquad \vec{e} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Lösung: Die Länge des Pfeiles entspricht dem Betrag des Vektors. Daher bestimme ich zunächst die Beträge der Vektoren.

$$\begin{array}{lclclcl}
|\vec{a}| & = & \sqrt{(-5)^2 + 12^2} & = & \sqrt{169} & = & 13 \\
|\vec{b}| & = & \sqrt{6^2 + (-9)^2} & = & \sqrt{117} & \approx & 10,82 \\
|\vec{c}| & = & \sqrt{2^2 + (-8)^2 + 10^2} & = & \sqrt{168} & \approx & 12,96 \\
|\vec{d}| & = & \sqrt{(-3)^2 + 7^2 + 11^2} & = & \sqrt{179} & \approx & 13,38 \\
|\vec{e}| & = & \sqrt{7^2 + (-7)^2 + 7^2} & = & \sqrt{147} & \approx & 12,12
\end{array}$$

Durch Vergleich der Werte – am besten der exakten mit Wurzel – ergibt sich folgende Reihenfolge:

$$\boxed{\vec{b} \quad \vec{e} \quad \vec{c} \quad \vec{a} \quad \vec{d}}$$

5.6 Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Beträge der Vektoren!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -21 \\ -28 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 15 \\ -16 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix} \qquad \vec{f} = \begin{pmatrix} 9 \\ 24 \\ -30 \end{pmatrix} \qquad \vec{g} = \begin{pmatrix} -21 \\ -12 \\ 28 \end{pmatrix} \qquad \vec{h} = \begin{pmatrix} -64 \\ 48 \\ 39 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{array}{lclclcl}
|\vec{a}| & = & \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} & = & \sqrt{169} & = & 13 \\
|\vec{b}| & = & \sqrt{(-21)^2 + (-28)^2} & = & \sqrt{1225} & = & 35 \\
|\vec{c}| & = & \sqrt{(-12)^2 + 4^2 + (-3)^2} & = & \sqrt{169} & = & 13 \\
|\vec{d}| & = & \sqrt{15^2 + (-16)^2 + 12^2} & = & \sqrt{625} & = & 25 \\
|\vec{e}| & = & \sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-12)^2} & = & \sqrt{169} & = & 13 \\
|\vec{f}| & = & \sqrt{9^2 + 24^2 + (-30)^2} & = & \sqrt{1\,681} & = & 41 \\
|\vec{g}| & = & \sqrt{(-21)^2 + (-12)^2 + 28^2} & = & \sqrt{1\,369} & = & 37 \\
|\vec{h}| & = & \sqrt{(-64)^2 + 48^2 + 39^2} & = & \sqrt{7\,921} & = & 89
\end{array}$$

$$\boxed{|\vec{a}| = 13 \quad |\vec{b}| = 35 \quad |\vec{c}| = 13 \quad |\vec{d}| = 25 \quad |\vec{e}| = 13 \quad |\vec{f}| = 41 \quad |\vec{g}| = 37 \quad |\vec{h}| = 89}$$

5.7 Aufgabe 7

5.7.1 Aufgabe 7a

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -21 \\ -28 \end{pmatrix}$$

Lösung: Zur Lösung dient die Grundformel: $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\begin{aligned}
|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle\vec{a}\vec{b} &= \vec{a} \cdot \vec{b} \quad | : \left(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\right) \\
\cos\angle\vec{a}\vec{b} &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\
\angle\vec{a}\vec{b} &= \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\
\angle\vec{a}\vec{b} &= \arccos \frac{\begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -21 \\ -28 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} \cdot \sqrt{(-21)^2 + (-28)^2}} \\
\angle\vec{a}\vec{b} &= \arccos \frac{105 + 336}{13 \cdot 35} \\
\angle\vec{a}\vec{b} &= \arccos \frac{441}{455} \\
\angle\vec{a}\vec{b} &\approx 14,25^\circ
\end{aligned}$$

Der Winkel zwischen den Vektoren ist: $\boxed{\angle\vec{a}\vec{b} \approx 14,25^\circ}$

5.7.2 Aufgabe 7b

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ 36 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 24 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Lösung: Zur Lösung dient die umgestellte Grundformel: $\angle\vec{a}\vec{b} = \arccos \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

$$\begin{aligned}
\angle\vec{a}\vec{b} &= \arccos \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \\
\angle\vec{a}\vec{b} &= \arccos \frac{\begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ 36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-9)^2 + (-12)^2 + 36^2} \cdot \sqrt{24^2 + (-6)^2 + 8^2}} \\
\angle\vec{a}\vec{b} &= \arccos \frac{-216 + 72 + 288}{39 \cdot 26} \\
\angle\vec{a}\vec{b} &= \arccos \frac{144}{1014} \\
\angle\vec{a}\vec{b} &\approx 81{,}8357^\circ
\end{aligned}$$

Der Winkel zwischen den Vektoren ist: $\boxed{\angle\vec{a}\vec{b} \approx 81{,}8357^\circ}$

5.8 Aufgabe 8

Bestimmen Sie die fehlende Komponente x so, dass sich ein Winkel von 60° zwischen den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ergibt!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ \sqrt{50} \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung: Zur Lösung dient die Grundformel: $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\begin{aligned}
|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle\vec{a}\vec{b} &= \vec{a} \cdot \vec{b} \quad \big| : \left(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\right) \\
\sqrt{(-7)^2 + 1^2 + \left(\sqrt{50}\right)^2} \cdot \sqrt{x^2 + 4^2 + 0^2} \cdot \cos 60° &= \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ \sqrt{50} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\
10 \cdot \sqrt{x^2 + 16} \cdot 0,5 &= -7x + 4 \quad \big| \; (\;)^2 \\
5 \cdot \sqrt{x^2 + 16} &= -7x + 4 \quad \big| \; (\;)^2 \\
25 \cdot (x^2 + 16) &= 49x^2 - 56x + 16 \\
25x^2 + 400 &= 49x^2 - 56x + 16 \\
-24x^2 + 56x + 384 &= 0 \quad \big| : (-24) \\
x^2 - \frac{7}{3}x - 16 &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{7}{6} \pm \sqrt{\frac{49}{36} + \frac{576}{36}} \\
x_{1/2} &= \frac{7}{6} \pm \frac{25}{6} \\
x_1 = \frac{16}{3} & \qquad x_2 = -3
\end{aligned}$$

Im Verlauf der Lösung entstand eine **Wurzelgleichung**, die gelöst werden musste. Bekanntlich können dabei Pseudo-Lösungen entstehen, die aber die ursprüngliche Gleichung nicht erfüllen. Eine **Probe** mit beiden gefundenen Lösungskandidaten ist also unumgänglich.

Probe mit $\mathbf{x_1 = \frac{16}{3}}$:

$$\begin{aligned}
5 \cdot \sqrt{x_1^2 + 16} &\overset{?}{=} -7x_1 + 4 \\
5 \cdot \sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2 + 16} &\overset{?}{=} -7 \cdot \frac{16}{3} + 4 \\
5 \cdot \frac{20}{3} &\overset{?}{=} -\frac{112}{3} + \frac{12}{3} \\
\frac{100}{3} &\neq -\frac{100}{3}
\end{aligned}$$

Probe mit $\mathbf{x_2 = -3}$:

$$\begin{aligned}
5 \cdot \sqrt{x_2^2 + 16} &\stackrel{?}{=} -7x_2 + 4 \\
5 \cdot \sqrt{(-3)^2 + 16} &\stackrel{?}{=} -7 \cdot (-3) + 4 \\
5 \cdot 5 &\stackrel{?}{=} 21 + 4 \\
25 &= 25
\end{aligned}$$

Es gibt also nur eine Lösung, nämlich: $\boxed{x_2 = -3}$

5.9 Aufgabe 9

5.9.1 Aufgabe 9a

Bestimmen Sie die Parameter x, y und z so, dass die drei Vektoren paarweise aufeinander senkrecht stehen!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ -25 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ y \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$$

Lösung: Um drei Parameter zu bestimmen, benötigen wir drei Gleichungen. Diese erhalten wir durch die Bedingung des paarweisen Senkrechtstehens.

$$\begin{array}{lllll} (1) & \vec{a} \perp \vec{b} & \Rightarrow & \vec{a} \cdot \vec{b} & = & 0 \\ (2) & \vec{a} \perp \vec{c} & \Rightarrow & \vec{a} \cdot \vec{c} & = & 0 \\ (3) & \vec{b} \perp \vec{c} & \Rightarrow & \vec{b} \cdot \vec{c} & = & 0 \end{array}$$

Die konkreten Werte werden eingesetzt.

$$\begin{array}{l|rcl} (1) & \vec{a} \cdot \vec{b} & = & 0 \\ (2) & \vec{a} \cdot \vec{c} & = & 0 \\ (3) & \vec{b} \cdot \vec{c} & = & 0 \\ \hline (1) & \begin{pmatrix} x \\ -25 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ y \\ -4 \end{pmatrix} & = & 0 \\ (2) & \begin{pmatrix} x \\ -25 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ z \end{pmatrix} & = & 0 \\ (3) & \begin{pmatrix} -3 \\ y \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ z \end{pmatrix} & = & 0 \\ \hline (1) & -3x - 25y + 12 & = & 0 \\ (2) & 4x - 25 - 3z & = & 0 \\ (3) & -12 + y - 4z & = & 0 \\ \hline (1) & -3x - 25y & = & -12 \\ (2) & 4x - 3z & = & 25 \\ (3) & +y - 4z & = & 12 \\ \hline \end{array}$$

Dieses Lineargleichungssystem kann nun mit einem beliebigen Lösungsverfahren gelöst werden.[3] Man erhält die Lösungen: $\boxed{x = 4 \quad y = 0 \quad z = -3}$

[3]Weitere Informationen zu möglichen Lösungsverfahren für Lineargleichungssysteme sind hier zu finden: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/lingl.pdf

5.9.2 Aufgabe 9b

Bestimmen Sie die Parameter x, y und z so, dass die drei Vektoren paarweise aufeinander senkrecht stehen!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} y \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 15 \\ -18 \\ z \end{pmatrix}$$

Lösung: Um drei Parameter zu bestimmen, benötigen wir drei Gleichungen. Diese erhalten wir durch die Bedingung des paarweisen Senkrechtstehens.

$$\begin{array}{llcrcl} (1) & \vec{a} \perp \vec{b} & \Rightarrow & \vec{a} \cdot \vec{b} & = & 0 \\ (2) & \vec{a} \perp \vec{c} & \Rightarrow & \vec{a} \cdot \vec{c} & = & 0 \\ (3) & \vec{b} \perp \vec{c} & \Rightarrow & \vec{b} \cdot \vec{c} & = & 0 \end{array}$$

Die konkreten Werte werden eingesetzt.

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \vec{a} \cdot \vec{b} & = & 0 \\ (2) & \vec{a} \cdot \vec{c} & = & 0 \\ (3) & \vec{b} \cdot \vec{c} & = & 0 \\ \hline (1) & \begin{pmatrix} x \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} & = & 0 \\ (2) & \begin{pmatrix} x \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -18 \\ z \end{pmatrix} & = & 0 \\ (3) & \begin{pmatrix} y \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -18 \\ z \end{pmatrix} & = & 0 \\ \hline (1) & xy - 11 - 9 & = & 0 \\ (2) & 15x - 198 + 3z & = & 0 \\ (3) & 15y + 18 - 3z & = & 0 \\ \hline (1) & xy & = & 20 \\ (2) & 15x + 3z & = & 198 \\ (3) & 15y - 3z & = & -18 \\ \hline \end{array}$$

Da in Gleichung (1) das Produkt xy vorkommt, handelt es sich **nicht** um ein **lineares** Gleichungssystem. Einige Lösungsverfahren müssen daher entfallen. Daher verwende ich das **Einsetzungsverfahren**, denn das funktioniert immer. Ich löse Gleichung (3) nach z auf und setze das Ergebnis in Gleichung (2) ein. Gleichung (1) bleibt erhalten, da dort kein z vorkommt.

$$\begin{array}{rcll} 15y - 3z & = & -18 & \mid -15y \\ -3z & = & -18 - 15y & \mid : (-3) \\ z & = & 6 + 5y & \end{array}$$

Eingesetzt in (2):

$$\begin{aligned} 15x + 3 \cdot (6 + 5y) &= 198 \\ 15x + 18 + 15y &= 198 \quad | - 18 \\ 15x + 15y &= 180 \end{aligned}$$

Jetzt stelle ich diese Gleichung nach y um und setze das Ergebnis in (1) ein.

$$\begin{aligned} 15x + 15y &= 180 \quad | - 15x \\ 15y &= 180 - 15x \quad | : 15 \\ y &= 12 - x \end{aligned}$$

Eingesetzt in (1):

$$\begin{aligned} xy &= 20 \\ x \cdot (12 - x) &= 20 \\ 12x - x^2 &= 20 \quad | - 20 \\ 12x - x^2 - 20 &= 0 \quad | \cdot (-1) \\ x^2 - 12x + 20 &= 0 \\ x_{1/2} &= 6 \pm \sqrt{36 - 20} \\ x_{1/2} &= 6 \pm 4 \\ x_1 = 10 & \qquad x_2 = 2 \end{aligned}$$

Zu jedem x-Wert gibt es passende y- und z-Werte.

$$y_1 = 12 - x_1 = 12 - 10 = 2$$

$$y_2 = 12 - x_2 = 12 - 2 = 10$$

$$z_1 = 6 + 5y_1 = 6 + 5 \cdot 2 = 16$$

$$z_2 = 6 + 5y_2 = 6 + 5 \cdot 10 = 56$$

Lösungen: $\boxed{x_1 = 10 \quad y_1 = 2 \quad z_1 = 16}$ und $\boxed{x_2 = 2 \quad y_2 = 10 \quad z_2 = 56}$

5.10 Aufgabe 10

Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{d}$ senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit dem Betrag von $\vec{c}$!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ -23,5 \end{pmatrix}$$

Lösung: Einen beliebigen Vektor senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ findet man leicht mit Hilfe des **Kreuzproduktes**. Da er (vermutlich) noch nicht die richtige Länge hat, nenne ich ihn nicht $\vec{d}$ sondern $\vec{e}$.

$$\vec{e} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot (-5) - 3 \cdot (-4) \\ 3 \cdot 9 - 4 \cdot (-5) \\ 4 \cdot (-4) - (-2) \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 47 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jetzt wird der Betrag von $\vec{c}$ und $\vec{e}$ bestimmt.

$$|\vec{c}| = \sqrt{1^2 + (-11)^2 + (-23,5)^2} = \sqrt{552,25} \approx 25,9663$$

$$|\vec{e}| = \sqrt{22^2 + 47^2 + 2^2} = \sqrt{2697} \approx 51,9326$$

Ich berechne das „Verlängerungsverhältnis“ $\lambda = \frac{|\vec{c}|}{|\vec{e}|}$ (das in Wahrheit für eine Verkürzung sorgt), mit dem $\vec{e}$ multipliziert werden muss, um $\vec{d}$ zu erhalten.

$$\lambda = \frac{|\vec{c}|}{|\vec{e}|} = \frac{\sqrt{552,25}}{\sqrt{2697}} = 0,5$$

Damit erhalten wir:

$$\vec{d} = \lambda \cdot \vec{e} = 0,5 \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ 47 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 23,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist jedoch nicht die einzige Lösung. Auch der Vektor, der $\vec{d}$ genau entgegengesetzt ist, ist eine Lösung. Wir erhalten also:

$$\boxed{\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 11 \\ 23,5 \\ 1 \end{pmatrix}} \text{ und } \boxed{\vec{d_2} = \begin{pmatrix} -11 \\ -23,5 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

5.11 Aufgabe 11

Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks zwischen den Endpunkten der drei Vektoren!

5.11.1 Aufgabe 11a

Gegeben sind drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösung: Zunächst müssen zwei Kantenvektoren des Dreiecks bestimmt werden. Den Kantenvektor von der Pfeilspitze von $\vec{a}$ zur Pfeilspitze von $\vec{b}$ nenne ich $\vec{d}$, den Kantenvektor von der Pfeilspitze von $\vec{a}$ zur Pfeilspitze von $\vec{c}$ nenne ich $\vec{e}$.

$$\vec{d} = -\vec{a} + \vec{b} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+4 \\ -4+4 \\ -6+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e} = -\vec{a} + \vec{c} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2 \\ -4+2 \\ -6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung eines **Parallelogramms** kann das Kreuzprodukt verwendet werden. Die gesuchte Dreieckfläche ist dann die Hälfte davon.

$$\vec{d} \times \vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-2) - (-1) \cdot (-2) \\ -1 \cdot 0 - 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot (-2) - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Jetzt muss der Betrag davon bestimmt werden:

$$|\vec{d} \times \vec{e}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = 6$$

Die gesuchte Dreieckfläche ist davon die Hälfte.

$$\boxed{A_\Delta = 3\,\mathrm{FE}}$$

5.11.2 Aufgabe 11b

Gegeben sind drei Vektoren im $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Lösung: Zunächst müssen zwei Kantenvektoren des Dreiecks bestimmt werden. Den Kantenvektor von der Pfeilspitze von $\vec{a}$ zur Pfeilspitze von $\vec{b}$ nenne ich $\vec{d}$, den Kantenvektor von der Pfeilspitze von $\vec{a}$ zur Pfeilspitze von $\vec{c}$ nenne ich $\vec{e}$.

$$\vec{d} = -\vec{a} + \vec{b} = -\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+8 \\ -(-2)+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e} = -\vec{a} + \vec{c} = -\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+6 \\ -(-2)+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung eines **Parallelogramms** kann das Kreuzprodukt verwendet werden. Die gesuchte Dreieckfläche ist dann die Hälfte davon. Leider ist jedoch das Kreuzprodukt nicht im $\mathbb{R}^2$ sondern nur im $\mathbb{R}^3$ definiert. Man kann sich jedoch helfen, indem man an jeden Vektor eine dritte Dimension mit dem Wert 0 anfügt. Damit erhalte ich:

$$\vec{d^*} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e^*} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt kann das Kreuzprodukt berechnet werden:

$$\vec{d^*} \times \vec{e^*} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 - 0 \cdot 7 \\ 0 \cdot 2 - 4 \cdot 0 \\ 4 \cdot 7 - 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Jetzt muss der Betrag davon bestimmt werden:

$$|\vec{d^*} \times \vec{e^*}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 22^2} = 22$$

Die gesuchte Dreieckfläche ist davon die Hälfte.

$$\boxed{A_\Delta = 11\,\mathrm{FE}}$$

6 Lösungen der zusammengesetzten Aufgaben

6.1 Aufgabe 12

Gegeben sind die drei Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} u \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ w \end{pmatrix}$$

mit $u = -1$, $v = 7$ und $w = 1$.

1. Sind die drei Vektoren *komplanar*? Begründen Sie Ihre Antwort durch eine Rechnung!

2. Berechnen Sie die Winkel α, β und γ, die die Vektoren miteinander bilden mit $\alpha = \angle\vec{b}, \vec{c}$, $\beta = \angle\vec{a}, \vec{c}$ und $\gamma = \angle\vec{a}, \vec{b}$!

3. Berechnen Sie die Länge des Vektors $\vec{d}$ mit $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$!

4. Bestimmen Sie nun die Parameter u, v und w so, dass die Winkel α, β und γ jeweils rechte Winkel darstellen!

zu 1: Am einfachsten geht die Überprüfung mit Hilfe einer Determinante.

$$\begin{aligned}
\det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) &= \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -7 - 2 + 9 - 21 + 2 + 3 \\
\det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) &= -16 \neq 0
\end{aligned}$$

Da die Determinatne $\det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) \neq 0$ ist, sind die Vektoren **nicht komplanar**.

zu 2:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \arccos \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{\left|\vec{b}\right|\cdot|\vec{c}|} \\
&= \arccos \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} \\
&= \arccos \frac{-1\cdot(-3)+7\cdot 2+1\cdot 1}{\sqrt{(-1)^2+7^2+1^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+2^2+1^2}} \\
&= \arccos \frac{18}{\sqrt{51}\cdot\sqrt{14}} \\
&= \arccos \frac{18}{\sqrt{714}} \\
\alpha &\approx 47{,}65^\circ
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta &= \arccos \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|} \\
&= \arccos \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} \\
&= \arccos \frac{-1\cdot(-3)+3\cdot 2+1\cdot 1}{\sqrt{(-1)^2+3^2+1^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+2^2+1^2}} \\
&= \arccos \frac{10}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{14}} \\
&= \arccos \frac{10}{\sqrt{154}} \\
\beta &\approx 36{,}31^\circ
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\gamma &= \arccos \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|} \\
&= \arccos \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} \\
&= \arccos \frac{-1\cdot(-1)+3\cdot 7+1\cdot 1}{\sqrt{(-1)^2+3^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+7^2+1^2}} \\
&= \arccos \frac{23}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{51}} \\
&= \arccos \frac{23}{\sqrt{561}} \\
\gamma &\approx 13{,}82^\circ
\end{aligned}$$

zu 3:

$$\begin{aligned}
\vec{d} &= \vec{a}+\vec{b}+\vec{c} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1-1-3 \\ 3+7+2 \\ 1+1+1 \end{pmatrix} \\
\vec{d} &= \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} \\
\left|\vec{d}\right| &= \sqrt{(-5)^2+12^2+3^2} \\
&= \sqrt{178} \\
\left|\vec{d}\right| &\approx 13{,}34
\end{aligned}$$

Die Länge von $\vec{d}$ beträgt ungefähr 13,34 Längeneinheiten.

zu 4: Um drei Parameter zu bestimmen, benötigen wir drei Gleichungen. Diese erhalten wir durch die Bedingung des paarweisen Senkrechtstehens.

$$\begin{array}{llll}
(1) & \vec{a}\perp\vec{b} & \Rightarrow & \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \\
(2) & \vec{a}\perp\vec{c} & \Rightarrow & \vec{a}\cdot\vec{c} = 0 \\
(3) & \vec{b}\perp\vec{c} & \Rightarrow & \vec{b}\cdot\vec{c} = 0
\end{array}$$

Die konkreten Werte werden eingesetzt.

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & \vec{a}\cdot\vec{b} & = & 0\\
(2) & \vec{a}\cdot\vec{c} & = & 0\\
(3) & \vec{b}\cdot\vec{c} & = & 0\\
\hline
(1) & \begin{pmatrix} u\\ 3\\ 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1\\ v\\ 1\end{pmatrix} & = & 0\\
(2) & \begin{pmatrix} u\\ 3\\ 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3\\ 2\\ w\end{pmatrix} & = & 0\\
(3) & \begin{pmatrix} -1\\ v\\ 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3\\ 2\\ w\end{pmatrix} & = & 0\\
\hline
(1) & -u+3v+1 & = & 0\\
(2) & -3u+6+w & = & 0\\
(3) & 3+2v+w & = & 0\\
\hline
(1) & -u+3v & = & -1\\
(2) & -3u+w & = & -6\\
(3) & 2v+w & = & -3\\
\hline
\end{array}$$

Das Gleichungssystem wird ein wenig „geordnet“, um eine bessere Übersicht zu bekommen.

$$\boxed{\begin{array}{lrrrcr}
(1) & -u & +3v & & = & -1\\
(2) & -3u & & +w & = & -6\\
(3) & & 2v & +w & = & -3
\end{array}}$$

Im Prinzip kann das Gleichungssystem mit jedem beliebigen Verfahren[4] gelöst werden. Es bietet sich hier jedoch besonders das Additions-/Subtraktionsverfahren[5] an. Man kann nämlich Gleichung (2) und (3) so miteinander kombinieren, dass sofort die Variable w wegfällt.

$$\begin{array}{lrrrcrl}
(2) & -3u & & +w & = & -6 & |\\
(3) & & 2v & +w & = & -3 & |-\\
\hline
(4) & -3u & -2v & & = & -3 &
\end{array}$$

Mit Gleichung (1) und (4) bleibt nun ein Gleichungssystem nur noch 2. Grades übrig.

$$\boxed{\begin{array}{lrrcr}
(1) & -u & +3v & = & -1\\
(4) & -3u & -2v & = & -3
\end{array}}$$

Für den nächsten Reduktionsschritt kommt im Prinzip wieder jedes beliebige Lösungsverfahren in Betracht. Zur Abwechslung verwende ich jetzt das Einsetzungsverfahren[6].

[4] Allgemeine Lösungsverfahren siehe z.B. hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/lingl.pdf
[5] Details zum Additionsverfahren siehe hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/add.pdf
[6] Details zum Einsetzungsverfahren siehe hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/einsetz.pdf

Gleichung (1) lässt sich gut nach u umstellen.

$$\begin{aligned} -u+3v &= -1 && \mid -3v \\ -u &= -1-3v && \mid \cdot(-1) \\ u &= 1+3v \end{aligned}$$

Das Ergebnis wird in Gleichung (4) eingesetzt.

$$\begin{aligned} -3u-2v &= -3 \\ -3\cdot(1+3v)-2v &= -3 \\ -3-9v-2v &= -3 && \mid +3 \\ -11v &= 0 && \mid :(-11) \\ v &= 0 \end{aligned}$$

Die Variable u erhalten wir, indem wir dieses Ergebnis in die umgestellte Gleichung (1) einsetzen.

$$u = 1+3v = 1+3\cdot 0 = 1$$

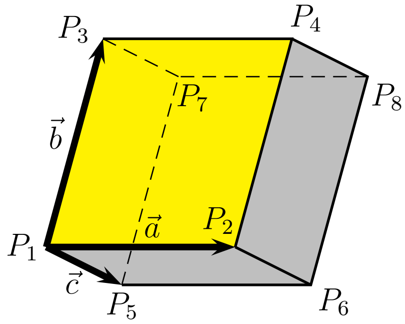
Jetzt fehlt nur noch die Variable w. Mit Gleichung (2) oder (3) kann sie bestimmt werden. Ich wähle willkürlich Gleichung (3) dafür aus.

$$\begin{aligned} 2v+w &= -3 && \mid \text{bekannten Wert } v=0 \text{ einsetzen} \\ 2\cdot 0+w &= -3 \\ w &= -3 \end{aligned}$$

Zusammenfassung der gesuchten Parameter: $\boxed{u=1}$ $\boxed{v=0}$ $\boxed{w=-3}$

6.2 Aufgabe 13

Gegeben sind die Punkte $P_1(2|1|3)$, $P_2(7|1|3)$ und $P_3(x|5|6)$. Der Vektor $\vec{a}$ verläuft von P_1 nach P_2, der Vektor $\vec{b}$ von P_1 nach P_3. Ausgehend von diesen drei Punkten soll ein Würfel entwickelt werden, dessen **zweidimensionales** Bild nebenstehend skizziert ist.



a) Bestimmen Sie den Parameter x so, dass sich zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein **Rechter Winkel** ergibt.

b) Weisen Sie nach, dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **gleich lang** sind. Gehen Sie dabei von $x = 2$ aus.

c) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{c}$, der sowohl senkrecht auf $\vec{a}$ als auch auf $\vec{b}$ steht und die gleiche Länge wie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ hat.

d) Bestimmen Sie den Punkt P_4, so dass die Punkte P_1, P_2, P_4, P_3 ein Quadrat ergeben. (Das Quadrat ist im Bild gelb markiert.)

e) Ergänzen Sie das Quadrat aus **d)** zu einem Würfel mit den weiteren Eckpunkten P_5, P_6, P_7 und P_8 gemäß dem obenstehenden Bild. Gehen Sie hierbei von $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ aus.

f) Um den **dreidimensionalen** Würfel zeichnen zu können, soll er auf die **zweidimensionale** Ebene abgebildet werden. Die Projektion erfolgt nach dieser Abbildungsvorschrift:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x + 0{,}5z \\ y + 0{,}5z \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie zu jedem Punkt $P_1 \ldots P_8$ aus dem $\mathbb{R}^3$ (aus dem dreidimensionalen Raum) den jeweils zugehörigen Punkt $P_1^* \ldots P_8^*$ aus dem $\mathbb{R}^2$ (aus der zweidimensionalen Zeichenebene)!

g) Berechnen Sie sie gelb markierte parallelogrammförmige Fläche auf der Zeichenebene (im $\mathbb{R}^2$), die durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird!

zu a) Zweckmäßigerweise definiert man zu jedem Punkt $P_n = (n_1|n_2|n_3)$ einen „Aufvektor“ $\vec{P}_n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, der vom Koordinatenursprung zum jeweiligen Punkt P_n verläuft.

Damit können die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wie folgt aufgestellt werden.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 7-2 \\ 1-1 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{b} &= \vec{P}_3 - \vec{P}_1 = \begin{pmatrix} x-2 \\ 5-1 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

Diese Gleichung kann nach x aufgelöst werden.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} &= 0 \\ 5 \cdot (x-2) + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 3 &= 0 \\ 5x - 10 &= 0 \quad |+10 \\ 5x &= 10 \quad |:5 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

zu b) Zunächst muss $\vec{b}$ bestimmt werden:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} x-2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Gleiche Länge von Vektoren bedeutet gleiche Beträge. Daher werden die Beträge von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bestimmt.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3} = \sqrt{5^2 + 0^2 + 0^2} = 5$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^3} = \sqrt{0^2 + 4^2 + 3^2} = 5$$

Damit ist der Nachweis erbracht, die Längen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind gleich.

zu c) Es gibt zwei grundsätzlich verschiedene Lösungswege. Zum einen kann mit dem Kreuzprodukt, zum anderen mit dem Skalarprodukt gearbeitet werden.

Lösungsvariante 1: Mit Hilfe des Kreuzproduktes wird ein Hilfs-Vektor $\vec{h}$ senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugt. Dieser muss anschließend durch Multiplikation mit einem Skalar auf die richtige Länge gebracht werden.

$$\vec{h} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 - 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 0 - 5 \cdot 3 \\ 5 \cdot 4 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Die Länge dieses Hilfsvektors wird bestimmt:

$$\left|\vec{h}\right| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2} = \sqrt{0^2 + (-15)^2 + 20^2} = 25$$

Damit kann der Verkürzungsfaktor λ bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \lambda \cdot \vec{h} \\ |\vec{c}| &= |\lambda| \cdot \left|\vec{h}\right| \\ 5 &= |\lambda| \cdot 25 \quad | : 25 \\ \frac{1}{5} &= |\lambda| \\ \lambda_{1,2} &= \pm\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Jetzt kann $\vec{c}$ bestimmt werden. Ich beginne mit $\lambda_1 = \frac{1}{5}$.

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \lambda_1 \cdot \vec{h} \\ \vec{c} &= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \\ 20 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \cdot 0 \\ \frac{1}{5} \cdot (-15) \\ \frac{1}{5} \cdot 20 \end{pmatrix} \\ \vec{c}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit $\lambda_2 = -\frac{1}{5}$ ergibt sich der Gegenvektor von $\vec{c}_1$, also:

$$\vec{c}_2 = -\vec{c}_1 = -\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Beide Lösungen für $\vec{c}$ sind möglich und auch gleich richtig.

Lösungsvariante 2: Zunächst wird der gesuchte Vektor $\vec{c}$ mit seinen Komponenten festgelegt:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Drei Bedingungen müssen erfüllt werden:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \vec{c} & \perp & \vec{a} \\ (2) & \vec{c} & \perp & \vec{b} \\ (3) & |\vec{c}| & = & |\vec{a}| \end{array}$$

Diese Bedingungen führen zu drei Gleichungen:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & = & 0 \\ (2) & \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} & = & 0 \\ (3) & \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} & = & 5 \\ \hline (1) & 5 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3 & = & 0 \\ (2) & 0 \cdot c_1 + 4 \cdot c_2 + 3 \cdot c_3 & = & 0 \\ (3) & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 & = & 25 \end{array}$$

Aus (1) folgt sofort:

$$\begin{array}{rcll} 5c_1 & = & 0 & |:5 \\ c_1 & = & 0 & \end{array}$$

Das Ergebnis kann in beide anderen Gleichungen eingesetzt werden.

$$\begin{array}{lrcl} (2) & 4c_2 + 3c_3 & = & 0 \\ (3) & c_2^2 + c_3^2 & = & 25 \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist **nicht linear**, daher kommt zur Lösung nur das **Einsetzungsverfahren** in Frage. Ich löse Gleichung (2) nach c_2 auf.

$$\begin{array}{rcll} 4c_2 + 3c_3 & = & 0 & | - 3c_3 \\ 4c_2 & = & -3c_3 & |:4 \\ c_2 & = & -\frac{3}{4} \cdot c_3 & \end{array}$$

Das Ergebnis wird in (3) eingesetzt.

$$\begin{aligned}
c_2^2 + c_3^2 &= 25 \\
\left(-\tfrac{3}{4} \cdot c_3\right)^2 + c_3^2 &= 25 \\
\frac{9}{16} \cdot c_3^2 + c_3^2 &= 25 && | \cdot 16 \\
9c_3^2 + 16c_3^2 &= 400 \\
25c_3^2 &= 400 && | : 25 \\
c_3^2 &= 16 && |\sqrt{\ } \\
c_{31/32} &= \pm 4 \\
c_{31} = 4 \qquad & c_{32} = -4
\end{aligned}$$

Mit zwei Lösungen für c_3 erhält man auch zwei Lösungen für c_2, wenn man die Ergebnisse in die umgestellte Gleichung (2) einsetzt.

$$c_{21} = -\frac{3}{4} \cdot c_{31} = -\frac{3}{4} \cdot 4 = -3$$

$$c_{22} = -\frac{3}{4} \cdot c_{32} = -\frac{3}{4} \cdot (-4) = 3$$

Hiermit lauten die beiden Lösungen für $\vec{c}$:

$$\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ oder: } \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

d)

$$\vec{P}_4 = \vec{P}_2 + \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Alternativ kann auch mit $\vec{P}_4 = \vec{P}_3 + \vec{a}$ oder mit $\vec{P}_4 = \vec{P}_1 + \vec{a} + \vec{b}$ o. ä. gerechnet werden.

e)

$$\vec{P}_5 = \vec{P}_1 + \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_6 = \vec{P}_2 + \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_7 = \vec{P}_3 + \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_8 = \vec{P}_4 + \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

f) Die Abbildung erfolgt nach der angegebenen Abbildungsvorschrift.

$$\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{P}_1^* = \begin{pmatrix} 2 + 0{,}5 \cdot 3 \\ 1 + 0{,}5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{P}_2^* = \begin{pmatrix} 7 + 0{,}5 \cdot 3 \\ 1 + 0{,}5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{P}_3^* = \begin{pmatrix} 2 + 0{,}5 \cdot 6 \\ 5 + 0{,}5 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{P}_4^* = \begin{pmatrix} 7 + 0{,}5 \cdot 6 \\ 5 + 0{,}5 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{P}_5^* = \begin{pmatrix} 2 + 0{,}5 \cdot 7 \\ -2 + 0{,}5 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_6 = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{P}_6^* = \begin{pmatrix} 7 + 0{,}5 \cdot 7 \\ -2 + 0{,}5 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_7 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{P}_7^* = \begin{pmatrix} 2 + 0{,}5 \cdot 10 \\ 2 + 0{,}5 \cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_8 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{P}_8^* = \begin{pmatrix} 7 + 0{,}5 \cdot 10 \\ 2 + 0{,}5 \cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

g) Zur Flächenberechnung des Parallelogramms bietet sich das Kreuzprodukt an. Da es jedoch nur im $\mathbb{R}^3$, nicht aber im $\mathbb{R}^2$ definiert ist, muss eine dritte Komponente mit jeweils dem Wert 0 hinzugefügt werden. Zuvor müssen jedoch auch die zweidimensionalen Abbildungen $\vec{a}^*$ und $\vec{b}^*$ von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bestimmt werden.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{a}^* = \begin{pmatrix} 5 + 0{,}5 \cdot 0 \\ 0 + 0{,}5 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{b}^* = \begin{pmatrix} 0 + 0{,}5 \cdot 3 \\ 4 + 0{,}5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 5{,}5 \end{pmatrix}$$

Die zugehörigen erweiterten dreidimensionalen Vektoren heißen dann:

$$\vec{a}^{**} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b}^{**} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 5{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Kreuzprodukt kann gebildet werden.

$$\vec{a}^{**} \times \vec{b}^{**} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 5{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 5{,}5 \\ 0 \cdot 1{,}5 - 5 \cdot 0 \\ 5 \cdot 5{,}5 - 0 \cdot 1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 27{,}5 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Fläche ist hiervon der Betrag.

$$A = \left| \vec{a}^{**} \times \vec{b}^{**} \right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 27{,}5^2} = 27{,}5\,\mathrm{FE}$$

6.3 Aufgabe 14:

Gegeben sind die drei Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} u \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ v \\ -8 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ w \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Parameter u, v und w so, dass die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ paarweise aufeinander senkrecht stehen!

Ein Quader hat die Eckpunkte D, E, F, G, H, I, J und K. Die Kanten $\vec{ED}$, $\vec{EI}$ und $\vec{EF}$ entsprechen den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Der Punkt E hat die Koordinaten (6|20|15).

Das Kantenmodell des Quaders soll auf einem Bildschirm dargestellt werden. Die Koordinaten x, y und z des dreidimensionalen Quaders werden auf den zweidimensionalen Bildschirm mit den Koordinaten x_b und y_b abgebildet durch die Zuordnung $x_b = x + 0,5z$ und $y_b = y + 0,5z$. Berechnen Sie die Bildschirmkoordinaten aller 8 Eckpunkte des Quaders!

Lösung: Wir können 3 Skalarprodukte von je zwei Vektoren aufstellen. Diese sind jeweils gleich Null, da die Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

$$\begin{array}{lclcl}
\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 & \Rightarrow & 4u + 10v + 40 = 0 & \Rightarrow & 4u + 10v = -40 \\
\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 & \Rightarrow & 11u - 20 - 5w = 0 & \Rightarrow & 11u - 5w = 20 \\
\vec{b} \cdot \vec{c} = 0 & \Rightarrow & 44 - 2v - 8w = 0 & \Rightarrow & -2v - 8w = -44
\end{array}$$

Dieses Lineargleichungssystem kann mit einem beliebigen Verfahren[7] aufgelöst werden. Man erhält dann:

$$u = 5 \qquad v = -6 \qquad w = 7$$

Die gesuchten Vektoren lauten damit:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Nun müssen noch die Eckpunkte des Quaders bestimmt werden. Gegeben ist der Punkt E. Wir stellen ihn dar durch den Vektor $\vec{E}$, der vom Koordinatenursprung zum Punkt E verläuft. Den zugehörigen zweidimensionalen Punkt auf dem Bildschirm nennen wir

[7] Einzelheiten zu Lineargleichungssystemen finden sie beispielsweise hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/lingl.pdf

E^*. Entsprechend ordnen wir ihm den Vektor $\vec{E}^*$ zu.

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}^* = \begin{pmatrix} 6+7,5 \\ 20+7,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13,5 \\ 27,5 \end{pmatrix}$$

Durch die Bildung geeigneter Vektorsummen können wir nun die entsprechenden dreidimensionalen Vektoren $\vec{D}$ bis $\vec{K}$ und die zugehörigen zweidimensionalen Vektoren $\vec{D}^*$ bis $\vec{K}^*$ bestimmen. Damit ist die Aufgabe gelöst.

$$\vec{D} = \vec{E} + \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{D}^* = \begin{pmatrix} 11+5 \\ 30+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 35 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = \vec{E} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 18 \\ 22 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}^* = \begin{pmatrix} 17+11 \\ 18+11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 29 \end{pmatrix}$$

$$\vec{G} = \vec{D} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 11 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 28 \\ 17 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{G}^* = \begin{pmatrix} 22+8,5 \\ 28+8,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30,5 \\ 36,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{H} = \vec{D} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{H}^* = \begin{pmatrix} 15+1 \\ 24+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$\vec{I} = \vec{E} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{I}^* = \begin{pmatrix} 10+3,5 \\ 14+3,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13,5 \\ 17,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{J} = \vec{F} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 17 \\ 18 \\ 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{J}^* = \begin{pmatrix} 21+7 \\ 12+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$\vec{K} = \vec{G} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 22 \\ 28 \\ 17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 22 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{K}^* = \begin{pmatrix} 26+4,5 \\ 22+4,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30,5 \\ 26,5 \end{pmatrix}$$