Tangente an eine Kurve

Wolfgang Kippels

15. Dezember 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Einleitung

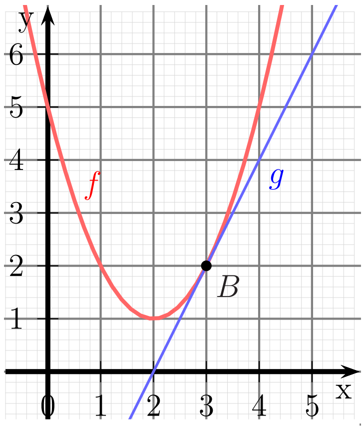
In diesem Artikel geht es darum, an den Graph einer bekannten Funktion eine (oder mehrere) Tangente(n) zu legen und die zugehörige(n) Tangentengleichun(en) zu berechnen. Für das Verständnis müssen die Grundkenntnisse der Differentialrechnung vorausgesetzt werden. Diese kann man beispielsweise hier nachlesen:

http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/diffrech.pdf

3 Tangentenbestimmung im Berührpunkt

3.1 Problemdarstellung

Nebenstehend ist eine Funktion f dargestellt. Im Berührpunkt B soll eine Gerade g als Tangente an den Graphen von f angelegt werden. Die Geradengleichung $g(x)$ soll berechnet werden.



Die Vorgehensweise möchte ich an einem Beispiel erläutern.

Beispiel: Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

Die Gerade soll an der Stelle $x_B = 3$ den Funktionsgraphen von f als Tangente berühren.

Lösung: Zunächst wird der y-Wert y_B des Punktes B berechnet.

$$\begin{aligned} y_B &= f(x_B) \\ &= x_B^2 - 4x_B + 5 \\ &= 3^2 - 4 \cdot 3 + 5 \\ y_B &= 2 \end{aligned}$$

Damit ist der Berührpunkt $B(3|2)$ bekannt.

Ausgegangen wird von der Funktionsgleichung der Tangenten als Geradengleichung in Normalform:

$$g(x) = mx + b$$

Da die Gerade die Kurve **berührt**, haben beide die gleiche **Steigung**. Diese kann berechnet werden. Dafür wird zunächst die Ableitung der gegebenen Funktion benötigt.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 5 \\ f'(x) &= 2x - 4 \end{aligned}$$

Hiermit kann der Parameter m berechnet werden.

$$\begin{aligned} m &= f'(x_B) \\ &= 2x_B - 4 \\ &= 2 \cdot 3 - 4 \\ m &= 2 \end{aligned}$$

Damit sieht die Tangentengleichung so aus:

$$g(x) = 2x + b$$

Zur Berechnung des Parameters b können die bekannten Koordinaten des Berührpunktes $B(3|2)$ eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} g(x_B) &= y_B \\ 2x_B + b &= y_B \\ 2 \cdot 3 + b &= 2 \\ 6 + b &= 2 \qquad | - 6 \\ b &= -4 \end{aligned}$$

Damit lautet die Tangentengleichung: $\boxed{g(x) = 2x - 4}$

3.2 Zusammenfassung

Fassen wir die Vorgehensweise allgemein zusammen. Damit kommen wir zu folgenden Schema:

1. Bestimmung der y-Koordinate des Berührpunktes
2. Bestimmung der Steigung der Funktion (und damit auch der Tangenten) im Berührpunkt
3. Aufstellen der Tangentengleichung in Normalform
4. Einsetzen der bekannten Steigung in die Tangentengleichung
5. Einsetzen der Berührpunktkoordinaten in die Tangentengleichung

3.3 Beispiele

Zwei Beispiele sollen das Gelernte vertiefen.

3.3.1 Beispiel 1

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

An der Stelle $x_B = 2$ soll eine Tangente an den Funktionsgraphen von f gelegt werden. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Tangenten g!

Schritt 1:

$$\begin{aligned} y_B &= f(x_B) \\ &= x_B^3 - 6x_B + 9x_B \\ &= 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 \\ y_B &= 2 \end{aligned}$$

Schritt 2:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 6x^2 + 9x \\ f'(x) &= 3x^2 - 12x + 9 \\ m &= 3x_B^2 - 12x_B + 9 \\ &= 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 \\ m &= -3 \end{aligned}$$

Schritt 3:

$$g(x) = mx + b$$

Schritt 4:

$$g(x) = -3x + b$$

Schritt 5:

$$\begin{aligned} g(x_B) &= y_B \\ -3x_B + b &= y_B \\ -3 \cdot 2 + b &= 2 \\ -6 + b &= 2 \quad | + 6 \\ b &= 8 \end{aligned}$$

Damit lautet die Funktionsgleichung der Tangente: $\boxed{g(x) = -3x + 8}$

3.3.2 Beispiel 2:

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = 2x^4 - 6x^2 + 5$$

An der Stelle $x_B = 1$ soll eine Tangente an den Funktionsgraphen von f gelegt werden. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Tangenten g!

Schritt 1:

$$\begin{aligned} y_B &= f(x_B) \\ &= 2x_B^4 - 6x_B^2 + 5 \\ &= 2 \cdot 1^4 - 6 \cdot 1^2 + 5 \\ y_B &= 1 \end{aligned}$$

Schritt 2:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 - 6x^2 + 5 \\ f'(x) &= 8x^3 - 12x \\ m &= f'(x_B) \\ &= 8x_B^3 - 12x_B \\ &= 8 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1 \\ m &= -4 \end{aligned}$$

Schritt 3:

$$g(x) = mx + b$$

Schritt 4:

$$g(x) = -4x + b$$

Schritt 5:

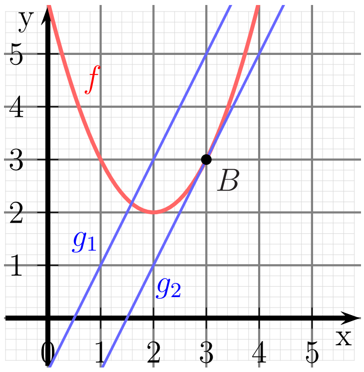
$$\begin{aligned} g(x_B) &= y_B \\ -4x_B + b &= y_B \\ -4 \cdot 1 + b &= 1 \\ -4 + b &= 1 \qquad | + 4 \\ b &= 5 \end{aligned}$$

Damit lautet die Funktionsgleichung der Tangente: $\boxed{g(x) = -4x + 5}$

4 Tangente mit bekannter Steigung

4.1 Problemdarstellung

Gegeben ist jetzt neben der Funktion f noch eine Gerade g_1. Diese Gerade soll so parallelverschoben werden, dass sie den Funktionsgraphen von f als Tangente berührt. Die verschobene Gerade heißt dann g_2.



Nebenstehend ist ein Beispiel dargestellt mit
$f(x) = x^2 - 4x + 6 \quad$ und $\quad g_1(x) = 2x - 1$.
Die Gerade wird so (nach rechts) verschoben, dass sie die Parabel im Punkt B berührt. Wie kann nun die Funktionsgleichung von g_2 berechnet werden?

4.2 Grundsätzliche Vorgehensweise an einem Beispiel

Beim Verschieben der Gerade verändert sich ihre Steigung nicht. Im Berührpunkt muss also die Steigung der Geraden mit der Steigung der Kurve übereinstimmen. Außerdem müssen die Koordinaten des Berührpunktes sowohl die Funktionsgleichung von $f(x)$ als auch von $g_2(x)$ erfüllen.[1]

Führen wir das für unser Beispiel durch. Die Funktionsgleichung der Tangente hat diese Normalform:

$$g_2(x) = mx + b$$

Dabei ist der Parameter m aus der Funktionsgleichung der Geraden g_1 mit $m = 2$ bekannt. Setzen wir das in die Gleichung von g_2 ein, erhalten wir:

$$g_2(x) = 2x + b$$

Ich benenne die Koordinaten des Berührpunktes mit $B(x_B|y_B)$. Den Wert für x_B erhalten wir aus der Bedingung für gleiche Steigung im Berührpunkt.

$$\boxed{f'(x_B) = m}$$

$$\begin{aligned} f'(x_B) &= m \\ 2x_B - 4 &= 2 \quad \mid +4 \\ 2x_B &= 6 \quad \mid :2 \\ x_B &= 3 \end{aligned}$$

[1] Die Vorgehensweise ähnelt sehr der Methode, die man zum Aufstellen einer Funktionsgleichung nach vorgegebenen Eigenschaften verwendet. Das ist beispielsweise hier ausführlich beschrieben: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/fktauf1.pdf

Als nächstes nutzen wir aus, dass im Berührpunkt beide y-Werte übereinstimmen müssen. Deshalb können wir die beiden Funktionsgleichungen mit $x = x_B$ gleichsetzen.

$$\boxed{g_2(x_B) = f(x_B)}$$

$$\begin{aligned}
g_2(x_B) &= f(x_B) \\
2x_B + b &= x_B^2 - 4x_B + 6 \\
2 \cdot 3 + b &= 3^2 - 4 \cdot 3 + 6 \\
6 + b &= 3 \qquad\qquad | -6 \\
b &= -3
\end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Geradengleichung:

$$g_2(x) = 2x - 3$$

4.3 Weiteres Beispiel

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung:

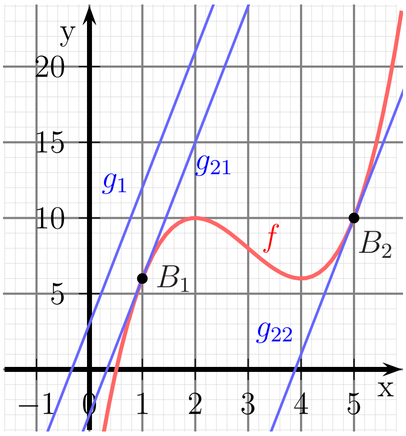
$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$$

und die Gerade mit der Gleichung:

$$g_1(x) = 9x + 3$$

Die Gerade soll so verschoben werden, dass sie den Funktionsgraph f als Tangente berührt.

Nebenstehend sind der Funktionsgraph sowie die Geraden dargestellt. Wie mal leicht erkennt, gibt es zwei Lösungen, die Gerade g_{21} mit dem Berührpunkt B_1 und die Gerade g_{22} mit dem Berührpunkt B_2.



Gehen wir zur Lösung genauso vor, wie im ersten Beispiel.

$$\begin{aligned}
f'(x_B) &= m \\
3x_B^2 - 18x_B + 24 &= 9 \qquad\qquad | -9 \\
3x_B^2 - 18x_B + 15 &= 0 \qquad\qquad | :3 \\
x_B^2 - 6x_B + 5 &= 0 \\
x_{B1/2} &= 3 \pm \sqrt{9-5} \\
x_{B1/2} &= 3 \pm 2 \\
x_{B1} = 1 \qquad & x_{B2} = 5
\end{aligned}$$

Für beide Lösungen müssen jetzt separat die b-Werte bestimmt werden. Beginnen wir mit dem Parameter b_1 für den Punkt B_1.

$$\begin{aligned}
g_{21}(x_{B1}) &= f(x_{B1}) \\
9x_{B1} + b_1 &= x_{B1}^3 - 9x_{B1}^2 + 24x_{B1} - 10 \\
9 \cdot 1 + b_1 &= 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 - 10 \\
9 + b_1 &= 6 \qquad\qquad | -9 \\
b_1 &= -3
\end{aligned}$$

Mit diesem Ergebnis lautet die erste Geradengleichung:

$$\boxed{g_{21}(x) = 9x - 3}$$

Mit $x_{B2} = 5$ kann nun b_2 berechnet werden.

$$\begin{aligned}
g_{22}(x_{B1}) &= f(x_{B2}) \\
9x_{B2} + b_2 &= x_{B2}^3 - 9x_{B2}^2 + 24x_{B2} - 10 \\
9 \cdot 5 + b_1 &= 5^3 - 9 \cdot 5^2 + 24 \cdot 5 - 10 \\
45 + b_2 &= 10 && \mid -45 \\
b_1 2 &= -35
\end{aligned}$$

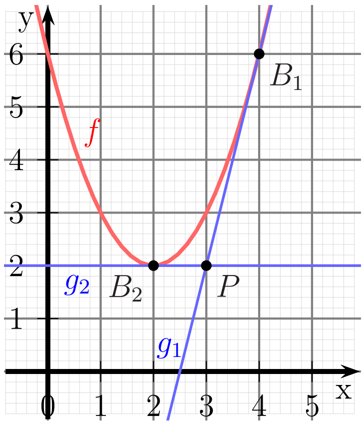
Damit lautet die zweite Geradengleichung:

$$\boxed{g_{22}(x) = 9x - 35}$$

5 Tangentenbestimmung von einem Punkt außerhalb

5.1 Problemstellung

Jetzt soll ein Punkt P gegeben sein, der **nicht** auf dem Funktionsgraphen liegen soll. Im nebenstehd dargestellten Beispiel gibt es zwei Lösungen, je nach Art der Funktion und Lage des Punktes P können es aber auch mehr oder weniger sein. Es stellt sich die Frage: Wie können die zugehörigen Tangentengleichungen ermittelt werden?



Die Vorgehensweise möchte ich an einem **Beispiel** zeigen, zu dem auch der nebenstehende Funktionsgraph passt. Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung:

$$f(x) = x^2 - 4x + 6$$

Der Punkt, durch den die Tangenten verlaufen sollen, heißt $P(3|2)$.

5.2 Grundsätzliche Lösungsstrategien

Gehen wir zur Lösung zunächst allgemein von einem Punkt $P(x_P|y_P)$ und einem Berührpunkt $B(x_B|y_B)$ aus. Damit können wir die Geradensteigung m angeben.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_P}{x_B - x_P}$$

Da der Wert y_B durch die Funktion f gegeben ist können wir ds einsetzen:

$$m = \frac{f(x_B) - y_p}{x_B - x_P}$$

Die Steigung m ist zugleich auch die Ableitung $f'(x)$. Die Steigung der Geraden und der Tangenten müssen im Berührpunkt übereinstimmen. Das setzen wir ein.

$$\boxed{f'(x_B) = \frac{f(x_B) - y_p}{x_B - x_P}}$$

Damit haben wir eine Gleichung erhalten, aus der x_B berechnet werden kann.

Im konkreten Beispiel sieht das dann so aus:

$$\begin{array}{rcll}
f'(x_B) & = & \dfrac{f(x_B)-2}{x_B-3} & \\
2x_B-4 & = & \dfrac{(x_B^2-4x_B+6)-2}{x_B-3} & \\
2x_B-4 & = & \dfrac{x_B^2-4x_B+4}{x_B-3} & |\cdot(x_B-3) \\
(2x_B-4)\cdot(x_B-3) & = & x_B^2-4x_B+4 & \\
2x_B^2-6x_B-4x_B+12 & = & x_B^2-4x_B+4 & \\
2x_B^2-10x_B+12 & = & x_B^2-4x_B+4 & |-x_B+4x-4 \\
x_B-6x_B+8 & = & 0 & \\
x_{B1/2} & = & 3\pm\sqrt{9-8} & \\
x_{B1/2} & = & 3\pm 1 & \\
x_{B1}=4 & & x_{B2}=2 &
\end{array}$$

Mit diesen x-Werten kann über $f'(x_B)$ jeweils die Steigung der Geraden bestimmt werden. Mit Steigung und einem bekannten Punkt kann dann die jeweilige Geradengleichung bestimmt werden. Führen wir das zunächst für x_{B1} durch.

$$m_1 = f'(x_{B1}) = 2x_{B1}-4 = 2\cdot 4-4 = 4$$

Damit hat die Gerade g_{21} diese Form:

$$g_{21}(x) = 4x + b_1$$

Um b_1 zu bestimmen werden die Koordinaten von $P(3|2)$ in diese Funktionsgleichung eingesetzt.

$$\begin{array}{rcll}
g_{21}(x_P) & = & y_P & \\
4x_P+b_1 & = & y_P & \\
4\cdot 3+b_1 & = & 2 & \\
12+b_1 & = & 2 & |-12 \\
b_1 & = & -10 &
\end{array}$$

Damit erhalten wir die gesuchte erste Tangentengleichung: $\boxed{g_{21}(x) = 4x-10}$

Jetzt machen wir das Gleiche mit der Tangenten g_{22}.

$$m_2 = f'(x_{B2}) = 2x_{B2}-4 = 2\cdot 2-4 = 0$$

Damit hat die Gerade g_{22} diese Form:

$$g_{22}(x) = 0\cdot x + b_1$$

Wegen des Sonderfalles $m_2 = 0$ wird der nächste Schritt noch etwas einfacher.

$$\begin{array}{rcl}
g_{21}(x_P) & = & y_P \\
0\cdot x_P+b_1 & = & y_P \\
b_1 & = & 2
\end{array}$$

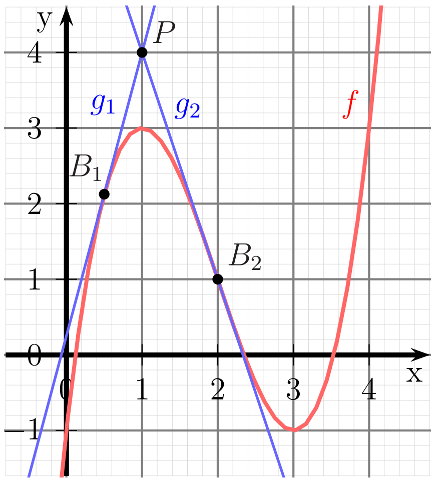
Die zweite Tangentengleichung lautet also: $\boxed{g_{22}(x) = 3}$

5.3 Weiteres Beispiel

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

sowie der Punkt $P(1|4)$. Gesucht sind alle Tangenten an den Funktionsgraphen von f, die durch P verlaufen.



Bevor wir mit der ersten hergeleiteten Formel zur Berechnung von x_B beginnen können, benötigen wir noch die Ableitung von f.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 6x^2 + 9x - 1 \\ f'(x) &= 3x^2 - 12x + 9 \end{aligned}$$

Damit können wir die beim ersten Beispiel angesprochene Formel zur Berechnung von x_B nutzen.

$$\begin{aligned} f'(x_B) &= \frac{f(x_B) - y_p}{x_B - x_P} \\ 3x_B^2 - 12x_B + 9 &= \frac{x_B^3 - 6x_B^2 + 9x_B - 1 - 4}{x_B - 1} && | \cdot (x_B - 1) \\ (x_B - 1) \cdot \left(3x_B^2 - 12x_B + 9\right) &= x_B^3 - 6x_B^2 + 9x_B - 5 \\ 3x_B^3 - 12x_B^2 + 9x_B - 3x_B^2 + 12x_B - 9 &= x_B^3 - 6x_B^2 + 9x_B - 5 \\ 3x_B^3 - 15x_B^2 + 21x_B - 9 &= x_B^3 - 6x_B^2 + 9x_B - 5 && | - x_B^3 + 6x_B^2 - 9x_B + 5 \\ 2x_B^3 - 9x_B^2 + 12x_B - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Mit einem beliebigen Verfahren[2] oder auch mit dem GTR erhält man folgende Lösungen:

$$x_{B1} = 0{,}5 \qquad x_{B2} = 2$$

An der Gleichung erkennt man schon, dass bis zu drei Lösungen möglich sind. (In diesem Fall ist aber $x_{B2} = 2$ eine doppelte Lösung.) Außerdem ist (vermutlich) ersichtlich, dass bei Funktionstermen mit Polynomen höheren Grades mehr Rechenaufwand notwendig ist.[3] Für jeden x_B-Wert muss nun ein eigener Lösungsweg vorgenommen werden.

<u>1. Teillösung für $x_{B1} = 0{,}5$:</u>

[2]Details siehe auch hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/nullst.pdf

[3]Deshalb möchte ich an dieser Stelle auf weitere Beispiele dazu verzichten.

$$\begin{aligned} m_1 &= f'(x_{B1}) \\ &= 3x_B1^2 - 12x_{B1} + 9 \\ &= 3 \cdot 0{,}5^2 - 12 \cdot 0{,}5 + 9 \\ m_1 &= 3{,}75 \end{aligned}$$

Damit hat die Gerade g_{21} diese Form:

$$g_{21}(x) = 3{,}75x + b_1$$

Um b_1 zu bestimmen werden die Koordinaten von $P(1|4)$ in diese Funktionsgleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned} g_{21}(x_P) &= y_P \\ 3{,}75 \cdot 1 + b_1 &= 4 \qquad | - 3{,}75 \\ b_1 &= 0{,}25 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die gesuchte erste Tangentengleichung: $\boxed{g_{21}(x) = 3{,}75x + 0{,}25}$

2. Teillösung für $x_{B2} = 2$:

$$\begin{aligned} m_2 &= f'(x_{B2}) \\ &= 3x_B2^2 - 12x_{B2} + 9 \\ &= 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 \\ m_2 &= -3 \end{aligned}$$

Damit hat die Gerade g_{22} diese Form:

$$g_{22}(x) = -3x + b_2$$

Um b_2 zu bestimmen werden die Koordinaten von $P(1|4)$ in diese Funktionsgleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned} g_{22}(x_P) &= y_P \\ -3 \cdot 1 + b_2 &= 4 \qquad | + 3 \\ b_2 &= 7 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die gesuchte zweite Tangentengleichung: $\boxed{g_{22}(x) = -3x + 7}$

6 Übungsaufgaben

6.1 Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = x^3 + 6x^2$$

Gesucht ist die Geradengleichung $g(x)$ für die Tangente, die den Funktionsgraphen im Berührpunkt bei $x_B = -2$ berührt.

6.2 Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 2$$

Gesucht ist die Geradengleichung $g(x)$ für die Tangente, die den Funktionsgraphen im Berührpunkt bei $x_B = 2$ berührt.

6.3 Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$$

An den Funktionsgraphen soll eine Gerade mit der Steigung $m = \frac{9}{4}$ angelegt werden. Berechnen Sie die Funktionsgleichungen für alle möglichen Geraden!

6.4 Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$$

Die Gerade g_1 mit der Funktionsgleichung

$$g_1(x) = 4x - 10$$

soll so verschoben werden, dass sie den Funktionsgraphen von f als Tangente berührt. Berechnen Sie alle möglichen Geradengleichungen!

6.5 Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = x^2$$

Vom Punkt $P(2|3)$ aus soll eine Tangente an die Parabel gelegt werden. Berechnen Sie alle möglichen Tangentengleichungen!

6.6 Aufgabe 6

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x + 2$$

Vom Punkt $P(1|-1)$ aus soll eine Tangente an die Parabel gelegt werden. Berechnen Sie alle möglichen Tangentengleichungen!

7 Lösungen der Übungsaufgaben

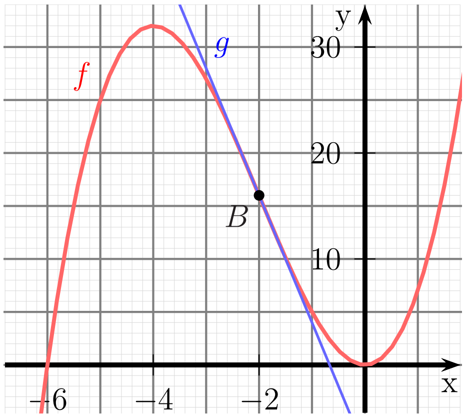
7.1 Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = x^3 + 6x^2$$

Gesucht ist die Geradengleichung $g(x)$ für die Tangente, die den Funktionsgraphen im Berührpunkt bei $x_B = -2$ berührt.

Lösung: Zunächst wird die Steigung der Geraden als Ableitung im Berührpunkt berechnet.



$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 6x^2 \\ f'(x) &= 3x^2 + 12x \\ m &= f'(x_B) \\ &= 3 \cdot (-2)^2 + 12 \cdot (-2) \\ m &= -12 \end{aligned}$$

Damit kann die Geradengleichung schon etwas konkretisiert werden.

$$g(x) = -12x + b$$

Als nächstes wird der Funktionswert im Berührpunkt $B(x_B|y_B)$ bestimmt.

$$\begin{aligned} y_B &= f(x_B) \\ &= f(-2) \\ &= (-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 \\ &= -8 + 24 \\ y_B &= 16 \end{aligned}$$

Die Koordinaten des Berührpunktes werden in die Geradengleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned} g(x_B) &= y_B \\ m \cdot x_B + b &= y_B \\ -12 \cdot (-2) &= 16 \\ 24 &= 16 \quad | -24 \\ b &= -8 \end{aligned}$$

Somit lautet die gesuchte Geradengleichung: $\boxed{g(x) = -12x - 8}$

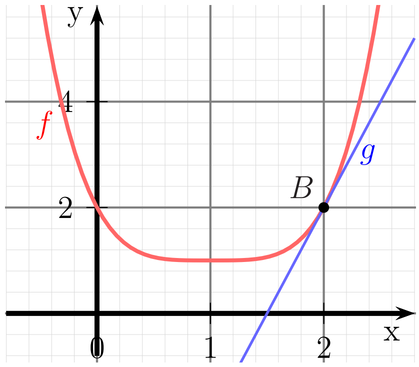
7.2 Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 2$$

Gesucht ist die Geradengleichung $g(x)$ für die Tangente, die den Funktionsgraphen im Berührpunkt bei $x_B = 2$ berührt.

Lösung: Zunächst wird die Steigung der Geraden als Ableitung im Berührpunkt berechnet.



$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 2\\
f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4\\
m &= f'(x_B)\\
&= 4 \cdot 2^3 - 12 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 4\\
m &= 4
\end{aligned}$$

Damit kann die Geradengleichung schon etwas konkretisiert werden.

$$g(x) = 4x + b$$

Als nächstes wird der Funktionswert im Berührpunkt $B(x_B|y_B)$ bestimmt.

$$\begin{aligned}
y_B &= f(x_B)\\
&= f(2)\\
&= 2^4 - 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 2\\
&= 16 - 32 + 24 - 8 + 2\\
y_B &= 2
\end{aligned}$$

Die Koordinaten des Berührpunktes werden in die Geradengleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned}
g(x_B) &= y_B\\
m \cdot x_B + b &= y_B\\
4 \cdot 2 &= 2 \qquad | - 8\\
b &= -6
\end{aligned}$$

Somit lautet die gesuchte Geradengleichung: $\boxed{g(x) = 4x - 6}$

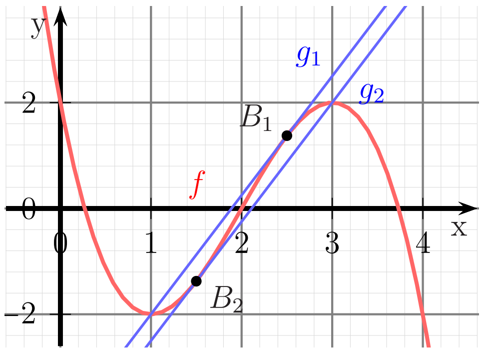
7.3 Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$$

An den Funktionsgraphen soll eine Gerade mit der Steigung $m = \frac{9}{4}$ angelegt werden. Berechnen Sie die Funktionsgleichungen für alle möglichen Geraden!

Lösung: Zunächst wird die Ableitung f' berechnet.



$$\begin{aligned} f(x) &= -x^3 + 6x^2 - 9x + 2 \\ f'(x) &= -3x^2 + 12x - 9 \end{aligned}$$

Die Ableitung muss mit der Geradensteigung im Berührpunkt übereinstimmen. Damit können die x-Werte x_{B1} und x_{B2} der Berührpunkte bestimmt werden.

$$\begin{aligned} f'(x_B) &= m \\ -3x_B^2 + 12x_B - 9 &= \frac{9}{4} && \left| -\frac{9}{4} \right. \\ -3x_B^2 + 12x_B - \frac{45}{4} &= 0 && |:(-3) \\ x_B^2 - 4x_B + \frac{15}{4} &= 0 \\ x_{B1/2} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - \frac{15}{4}} \\ &= 2 \pm \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{15}{4}} \\ &= 2 \pm \frac{1}{2} \\ x_{B1} = \frac{5}{2} & \qquad x_{B2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Mit der Funktionsgleichung von f können nacheinander die zugehörigen y-Werte y_{B1} und y_{B2} bestimmt werden.

<u>Untersuchung für B_1:</u>

$$\begin{aligned} y_{B1} &= f(x_{B1}) \\ &= -x_{B1}^3 + 6x_{B1}^2 - 9x_{B1} + 2 \\ &= -\left(\frac{5}{2}\right)^3 + 6 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 9 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) + 2 \\ &= -\frac{125}{8} + \frac{150}{4} - \frac{45}{2} + 2 \\ y_{B1} &= \frac{11}{8} \end{aligned}$$

Die Geradengleichung lautet:

$$g_1(x) = \frac{9}{4}x + b_1$$

Durch Einsetzen von x_{B1} und y_{B1} kann b_1 berechnet werden.

$$\begin{aligned}
g_1(x_{B1}) &= y_{B1} \\
m \cdot x_{B1} + b_1 &= y_{B1} \\
\frac{9}{4} \cdot \frac{5}{2} + b_1 &= \frac{11}{8} \\
\frac{45}{8} + b_1 &= \frac{11}{8} \qquad | - \frac{45}{8} \\
b_1 &= -\frac{34}{8} \\
b_1 &= -\frac{17}{4}
\end{aligned}$$

Somit lautet die erste gesuchte Geradengleichung: $\boxed{g_1(x) = \frac{9}{4}x - \frac{17}{4}}$

<u>Untersuchung für B_2:</u>

$$\begin{aligned}
y_{B2} &= f(x_{B2}) \\
&= -x_{B2}^3 + 6x_{B2}^2 - 9x_{B2} + 2 \\
&= -\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 2 \\
&= -\frac{27}{8} + \frac{54}{4} - \frac{27}{2} + 2 \\
y_{B2} &= -\frac{11}{8}
\end{aligned}$$

Die Geradengleichung lautet:

$$g_2(x) = \frac{9}{4}x + b_2$$

Durch Einsetzen von x_{B2} und y_{B2} kann b_2 berechnet werden.

$$\begin{aligned}
g_2(x_{B2}) &= y_{B2} \\
m \cdot x_{B2} + b_1 &= y_{B2} \\
\frac{9}{4} \cdot \frac{3}{2} + b_1 &= -\frac{11}{8} \\
\frac{27}{8} + b_1 &= -\frac{11}{8} \qquad | - \frac{27}{8} \\
b_2 &= -\frac{38}{8} \\
b_2 &= -\frac{19}{4}
\end{aligned}$$

Hiermit lautet die zweite gesuchte Geradengleichung: $\boxed{g_1(x) = \frac{9}{4}x - \frac{19}{4}}$

7.4 Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung:

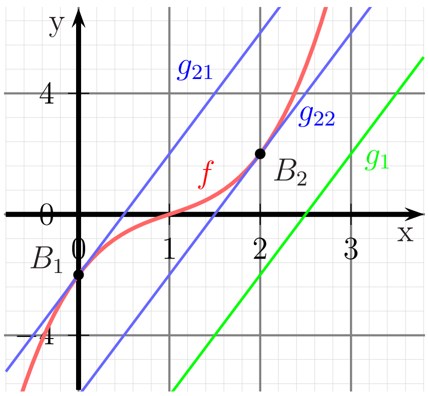
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$$

Die Gerade g_1 mit der Funktionsgleichung

$$g_1(x) = 4x - 10$$

soll so verschoben werden, dass sie den Funktionsgraphen von f als Tangente berührt. Berechnen Sie alle möglichen Geradengleichungen!

Lösung: Zunächst wird untersucht, wo die Funktion f die gleiche Steigung wie die Gerade g_1 hat. Dafür wird die Ableitung von f benötigt.



$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x^2 + 4x - 2 \\ f'(x) &= 3x^2 - 6x + 4 \\ f'(x_B) &= m \\ 3x_B^2 - 6x_B + 4 &= 4 && | -4 \\ 3x_B^2 - 6x_B &= 0 && | :3 \\ x_B^2 - 2x_B &= 0 \end{aligned}$$

An dieser Stelle kann man mit der p-q-Formel weiterarbeiten. Einfacher geht es jedoch durch Ausklammern von x_B und mit dem Lehrsatz:

> ***Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist.***

$$\begin{aligned} x_B^2 - 2x_B &= 0 \\ x_B \cdot (x_B - 2) &= 0 \quad \Rightarrow \quad x_{B1} = 0 \\ x_{B2} - 2 &= 0 \\ x_{B2} &= 2 \end{aligned}$$

Mit der Funktionsgleichung von f können nacheinander die zugehörigen y-Werte y_{B1} und y_{B2} bestimmt werden.

<u>Untersuchung für B_1:</u>

$$\begin{aligned} y_{B1} &= f(x_{B1} \\ &= x_{B1}^3 - 3x_{B1}^2 + 4x_{B1} - 2 \\ &= 0^3 - 3 \cdot 0 - 2 \\ y_{B1} &= -2 \end{aligned}$$

Die Geradengleichung lautet:

$$g_1(x) = 4x + b_1$$

Durch Einsetzen von x_{B1} und y_{B1} kann b_1 berechnet werden.

$$\begin{aligned} g_1(x_{B1}) &= y_{B1} \\ m \cdot x_{B1} + b_1 &= y_{B1} \\ 4 \cdot 0 + b_1 &= -2 \\ b_1 &= -2 \end{aligned}$$

Somit lautet die erste gesuchte Geradengleichung: $\boxed{g_{21}(x) = 4x - 2}$

<u>Untersuchung für B_2:</u>

$$\begin{aligned} y_{B2} &= f(x_{B2}) \\ &= x_{B2}^3 - 3x_{B2}^2 + 4x_{B2} - 2 \\ &= 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 2 \\ y_{B2} &= 2 \end{aligned}$$

Die Geradengleichung lautet:

$$g_2(x) = 4x + b_2$$

Durch Einsetzen von x_{B2} und y_{B2} kann b_2 berechnet werden.

$$\begin{aligned} g_2(x_{B2}) &= y_{B2} \\ m \cdot x_{B2} + b_2 &= y_{B2} \\ 4 \cdot 2 + b_2 &= 2 \qquad | -8 \\ b_2 &= -6 \end{aligned}$$

Hiermit lautet die zweite gesuchte Geradengleichung: $\boxed{g_{22}(x) = 4x - 6}$

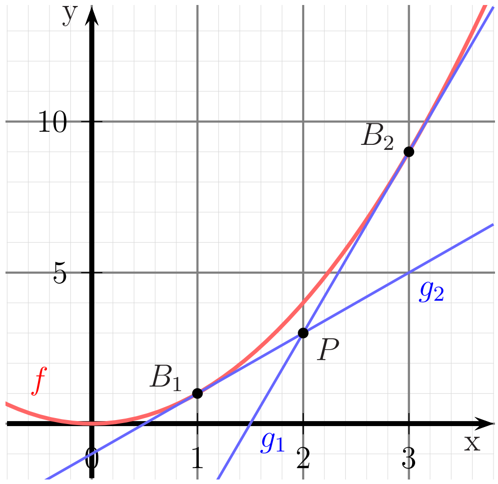
7.5 Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = x^2$$

Vom Punkt $P(2|3)$ aus soll eine Tangente an die Parabel gelegt werden. Berechnen Sie alle möglichen Tangentengleichungen!

Lösung: Ab Seite 11 (Tangentenbestimmung von einem Punkt außerhalb) hatten wir eine Formel zur Bestimmung von x_B entwickelt. Um die Formel nutzen zu können, benötigen wir noch $f'(x)$.



$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ f'(x) &= 2x \end{aligned}$$

Damit können wir die Formel anwenden.

$$\begin{aligned} f'(x_B) &= \frac{f(x_B) - y_p}{x_B - x_P} \\ 2x_B &= \frac{x_B^2 - 3}{x_B - 2} && |\cdot(x_B - 2) \\ 2x_B^2 - 4x_B &= x_B^2 - 3 && |-x_B^2 + 3 \\ x_B^2 - 4x_B + 3 &= 0 \\ x_{B1/2} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \\ &= 2 \pm 1 \\ x_{B1} = 1 & \qquad x_{B2} = 3 \end{aligned}$$

Mit diesen x-Werten kann über $f'(x_B)$ jeweils die Steigung der Geraden bestimmt werden. Mit Steigung und einem bekannten Punkt kann dann die jeweilige Geradengleichung bestimmt werden. Führen wir das zunächst für x_{B1} durch.

Untersuchung für $x_{B1} = 1$:

$$m_1 = f'(x_{B1}) = 2x_{B1} = 2 \cdot 1 = 2$$

Damit hat die Gerade g_1 diese Form:

$$g_1(x) = 2x + b_1$$

Um b_1 zu bestimmen werden die Koordinaten von $P(2|3)$ in diese Funktionsgleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned} g_1(x_P) &= y_P \\ 2x_P + b_1 &= y_P \\ 2 \cdot 2 + b_1 &= 3 \\ 4 + b_1 &= 3 && |-4 \\ b_1 &= -1 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die gesuchte erste Tangentengleichung: $\boxed{g_1(x) = 2x - 1}$

Untersuchung für $x_{B2} = 3$:

$$m_2 = f'(x_{B2}) = 2x_{B2} = 2 \cdot 3 = 6$$

Damit hat die Gerade g_2 diese Form:

$$g_2(x) = 6x + b_2$$

Um b_2 zu bestimmen werden die Koordinaten von $P(2|3)$ in diese Funktionsgleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned}
g_2(x_P) &= y_P \\
6x_P + b_2 &= y_P \\
6 \cdot 2 + b_2 &= 3 \\
12 + b_2 &= 3 \qquad | - 12 \\
b_2 &= -9
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die gesuchte zweite Tangentengleichung: $\boxed{g_2(x) = 6x - 9}$

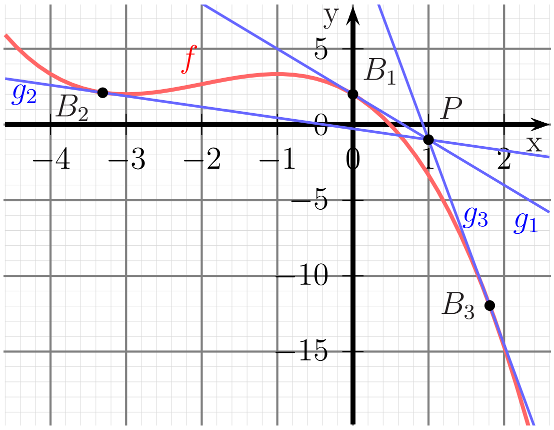
7.6 Aufgabe 6

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x + 2$$

Vom Punkt $P(1|-1)$ aus soll eine Tangente an die Parabel gelegt werden. Berechnen Sie alle möglichen Tangentengleichungen!

Lösung: Zunächst wird die Ableitung der Funktion f bestimmt.



$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x + 2 \\ f'(x) &= -x^2 - 4x - 3 \end{aligned}$$

Damit lässt sich die in Kapitel 5 hergeleitete Formel zur Bestimmung des x-Wertes x_B des Berührpunktes anwenden.

$$\begin{aligned} f'(x_B) &= \frac{f(x_B) - y_p}{x_B - x_P} \\ -x_B^2 - 4x_B - 3 &= \frac{-\frac{1}{3}x_B^3 - 2x_B - 3x_B^2 + 2 - (-1)}{x_B - 1} && | \cdot (x_B - 1) \\ -x_B^3 + x_B^2 - 4x_B^2 + 4x_B - 3x_B + 3 &= -\frac{1}{3}x_B^3 - 2x_B^2 - 3x_B + 3 && | + \frac{1}{3}x_B^3 - 3 \\ -\frac{2}{3}x_B^3 - 3x_B^2 + x_B &= -2x_B^2 - 3x_B && | + 2x_B^2 + 3x_B \\ -\frac{2}{3}x_B^3 - x_B^2 + 4x_B &= 0 && | \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \\ x_B^3 + \frac{3}{2}x_B^2 - 6x_B &= 0 \end{aligned}$$

Mit einem beliebigen Verfahren[4] oder auch mit dem GTR kann man die Lösungen bestimmen. Weil es einfach geht, führe ich hier die analytische Lösung vor.

Weil das **absolute Glied** fehlt, kann x_B ausgeklammert werden.

$$\begin{aligned} x_B^3 + \frac{3}{2}x_B^2 - 6x_B &= 0 \\ x_B \cdot \left(x_B^2 + \frac{3}{2}x_B - 6\right) &= 0 \end{aligned}$$

Dieser Lehrsatz hilft jetzt weiter:

[4] Details siehe auch hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/nullst.pdf

Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist.

Wenn der erste Faktor Null ist, erhalten wir sofort die Lösung:

$$x_{B1} = 0$$

Die beiden weiteren Lösungen erhalten wir aus dem zweiten Faktor, dem Klammerausdruck. Mit der p-q-Formel können sie bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
x_B^2 + \frac{3}{2}x_B - 6 &= 0 \\
x_{B2/3} &= -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - (-6)} \\
x_{B2/3} &= -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{96}{16}} \\
x_{B2/3} &= -\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{105}}{4}
\end{aligned}$$

$$x_{B2} = \frac{-3 - \sqrt{105}}{4} \approx -3{,}312 \qquad x_{B3} = \frac{-3 + \sqrt{105}}{4} \approx 1{,}812$$

Mit diesen x-Werten kann über $f'(x_B)$ jeweils die Steigung der Geraden bestimmt werden. Mit Steigung und einem bekannten Punkt kann dann die jeweilige Geradengleichung bestimmt werden. Führen wir das zunächst für x_{B1} durch.

Untersuchung für $x_{B1} = 0$:

$$m_1 = f'(x_{B1}) = -x_{B1}^2 - 4x_{B1} - 3 = 0^2 - 4 \cdot 0 - 3 = -3$$

Damit hat die Gerade g_1 diese Form:

$$g_1(x) = -3x + b_1$$

Um b_1 zu bestimmen werden die Koordinaten von $P(1|-1)$ in diese Funktionsgleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned}
g_1(x_P) &= y_P \\
-3x_P + b_1 &= y_P \\
-3 \cdot 1 + b_1 &= -1 \\
-3 + b_1 &= -1 \quad | + 3 \\
b_1 &= 2
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die gesuchte erste Tangentengleichung: $\boxed{g_1(x) = -3x + 2}$

<u>Untersuchung für $x_{B2} = \frac{-3-\sqrt{105}}{4}$:</u>

$$\begin{aligned}
m_2 &= f'(x_{B2}) \\
&= -x_{B2}^2 - 4x_{B2} - 3 \\
&= -\left(\frac{-3-\sqrt{105}}{4}\right)^2 - 4\cdot\frac{-3-\sqrt{105}}{4} - 3 \\
&= -\frac{9+6\cdot\sqrt{105}+105}{16} + 3 + \sqrt{105} - 3 \\
&= -\frac{114+6\cdot\sqrt{105}}{16} + \sqrt{105} \\
&= \frac{-114-6\cdot\sqrt{105}+16\cdot\sqrt{105}}{16} \\
&= \frac{-114+10\cdot\sqrt{105}}{16} \\
&= \frac{-57+5\cdot\sqrt{105}}{8} \\
m_2 &\approx -0{,}721
\end{aligned}$$

Damit hat die Gerade g_2 diese Form:

$$g_2(x) = \frac{-57+5\cdot\sqrt{105}}{8}\cdot x + b_2$$

Um b_2 zu bestimmen werden die Koordinaten von $P(1|-1)$ in diese Funktionsgleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned}
g_2(x_P) &= y_P \\
\frac{-57+5\cdot\sqrt{105}}{8}\cdot x_P + b_2 &= y_P \\
\frac{-57+5\cdot\sqrt{105}}{8}\cdot 1 + b_2 &= -1 \\
\frac{-57+5\cdot\sqrt{105}}{8} + b_2 &= -1 \qquad \Big| -\frac{-57+5\cdot\sqrt{105}}{8} \\
b_2 &= -\frac{8}{8} - \frac{-57+5\cdot\sqrt{105}}{8} \\
&= \frac{49-5\cdot\sqrt{105}}{8} \\
b_2 &\approx -0{,}279
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die zweite gesuchte Tangentengleichung:

$$g_2(x) = \frac{-57+5\cdot\sqrt{105}}{8}\cdot x + \frac{49-5\cdot\sqrt{105}}{8}$$

oder als Näherung:

$$\boxed{g_2(x) \approx -0{,}721x - 0{,}279}$$

<u>Untersuchung für $x_{B3} = \frac{-3+\sqrt{105}}{4}$:</u>

$$\begin{aligned}
m_3 &= f'(x_{B3}) \\
&= -x_{B3}^2 - 4x_{B3} - 3 \\
&= -\left(\frac{-3+\sqrt{105}}{4}\right)^2 - 4\cdot\frac{-3+\sqrt{105}}{4} - 3 \\
&= -\frac{9-6\cdot\sqrt{105}+105}{16} + 3 - \sqrt{105} - 3 \\
&= -\frac{114-6\cdot\sqrt{105}}{16} - \sqrt{105} \\
&= \frac{-114+6\cdot\sqrt{105}-16\cdot\sqrt{105}}{16} \\
&= \frac{-114-10\cdot\sqrt{105}}{16} \\
&= \frac{-57-5\cdot\sqrt{105}}{8} \\
m_3 &\approx -13{,}529
\end{aligned}$$

Damit hat die Gerade g_3 diese Form:

$$g_3(x) = \frac{-57-5\cdot\sqrt{105}}{8}\cdot x + b_3$$

Um b_3 zu bestimmen werden die Koordinaten von $P(1|-1)$ in diese Funktionsgleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned}
g_3(x_P) &= y_P \\
\frac{-57-5\cdot\sqrt{105}}{8}\cdot x_P + b_3 &= y_P \\
\frac{-57-5\cdot\sqrt{105}}{8}\cdot 1 + b_3 &= -1 \\
\frac{-57-5\cdot\sqrt{105}}{8} + b_3 &= -1 \qquad \left|-\frac{-57-5\cdot\sqrt{105}}{8}\right. \\
b_3 &= -\frac{8}{8} - \frac{-57-5\cdot\sqrt{105}}{8} \\
&= \frac{49+5\cdot\sqrt{105}}{8} \\
b_3 &\approx 12{,}529
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die zweite gesuchte Tangentengleichung:

$$g_3(x) = \frac{-57+5\cdot\sqrt{105}}{8}\cdot x + \frac{49-5\cdot\sqrt{105}}{8}$$

oder als Näherung:

$$\boxed{g_3(x) \approx -13{,}529x + 12{,}529}$$