Symmetrie von Funktionen

Wolfgang Kippels

12. Mai 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Grundlagen zur Symmetrie

Man kann an Funktionen diverse Transformationen durchführen. Hierbei beziehe ich mich auf den **Funktionsgraphen**. Unter anderem kann man ihn auf unterschiedliche Art spiegeln.

Manchmal kommt es vor, dass bei der Spiegelung eines Funktionsgraphen an der Ordinate (y-Achse) oder am Koordinatenursprung eine Funktion entsteht, die mit der Originalfunktion übereinstimmt. In diesen Fällen spricht man von **symmetrischen** Funktionen.

2.1 Spiegelsymmetrie

Beginnen wir mit der Spiegelsymmetrie. Sie wird immer auf die Ordinate bezogen. Funktionen, die spiegelsymmetrisch zur Abszisse (x-Achse) sind, gibt es nicht.[1] Im Kapitel 5.1.1 (Spiegelung an der Abszisse) in diesem Artikel

https://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/transformation.pdf

steht die Formel:

$$f^*(x) = f(-x)$$

Da f^* mit f bei einer spiegelsymmetrischen Funktion übereinstimmen soll, erhalten wir damit die Definition für Spiegelsymmetrie:

$$\boxed{\text{Spiegelsymmetrie} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(-x)}$$

[1] Einzige Ausnahme: $f(x) = 0$.

2.2 Punktsymmetrie

Von „punktsymmetrischen“ Funktionen spricht man, wenn sie zum Koordinatenursprung punktsymmetrisch sind. Im Kapitel 5.2 (Punktspiegelungen) im eben erwähnten Artikel haben wir für eine Spiegelung am Koordinatenursprung diese Formel kennengelernt:

$$f^*(x) = -f(-x)$$

Da f^* mit f bei einer punktsymmetrischen Funktion übereinstimmen soll, erhalten wir damit die Definition für Punktsymmetrie:

$$\boxed{\text{Punktsymmetrie} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = -f(-x)}$$

2.3 Symmetrische Funktionen

Die Frage, die sich stellt, lautet:

> ***Woran kann ich möglichst einfach erkennen, ob eine gegebene Funktion symmetrisch ist?***

Die Antwort auf diese Frage ähnelt der Methode, wie man einfach Ableitungen[2] findet. Man benötigt:

1. einige grundlegende symmetrische Funktionen
2. einige Regeln zur Verknüpfung symmetrischer Funktionen

2.3.1 Grundlegende symmetrische Funktionen

Ohne Herleitung[3] möchte ich hier einige Funktionen angeben.

Beginnen wir mit der Potenzfunktion:

$$f(x) = x^z \text{ mit } z \in \mathbb{Z}$$

Wenn z eine **gerade Zahl** (also eine durch 2 teilbare Zahl) ist, dann ist die Potenz auf jeden Fall positiv. Dann ist $f(-x) = f(x)$. Es liegt dann also **Spiegelsymmetrie** vor. Ist dagegen z eine **ungerade** Zahl, dann gilt: $f(-x) = -f(x)$, wir haben **Punktsymmetrie**. Das kann man so schreiben:

$$\boxed{f(x) = x^{2z} \;\wedge\; z \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow \text{Spiegelsymmetrie}}$$

$$\boxed{f(x) = x^{2z-1} \;\wedge\; z \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow \text{Punktsymmetrie}}$$

[2]Details zur Ableitungsbestimmung siehe hier:
https://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/ablreg.pdf

[3]Zur Herleitung muss lediglich die jeweilige Symmetriedefinition durch Einsetzen der jeweiligen Funktion überprüft werden.

Die nächsten Standard-Funktionen $f(x) = e^x$ und $f(x) = \ln x$ zeigen keinerlei Symmetrie. Anders bei den Winkelfunktionen:

$$\boxed{f(x) = \sin x \;\Rightarrow \text{Punktsymmetrie}}$$
$$\boxed{f(x) = \cos x \;\Rightarrow \text{Spiegelsymmetrie}}$$
$$\boxed{f(x) = \tan x \;\Rightarrow \text{Punktsymmetrie}}$$

2.3.2 Verknüpfungsregeln symmetrischer Funktionen

Mit den nachfolgenden Regeln können viele Funktionen auf Kombinationen von Grundfunktionen zurückgeführt werden.

Konstantenregel

> ***Wird eine symmetrische Funktion mit einer Konstanten k multipliziert, dann bleibt die Symmetrie erhalten.***

Wenn also $g(x)$ **spiegelsymmetrisch** ist, dann ist auch $f(x) = k \cdot g(x)$ eine **spiegelsymmetrische** Funktion. Ist $f(x)$ **punktsymmetrisch** ist, dann ist auch $f(x) = k \cdot g(x)$ eine **punktsymmetrische** Funktion.

Zwei Beispiele sollen das vertiefen.

Beispiel 1: Gegeben ist diese Funktion:

$$f(x) = 3 \cdot x^4$$

Die Unterfunktion $g(x) = x^4$ ist **spiegelsymmetrisch**, weil der Exponent **4** eine gerade Zahl ist. Deshalb ist auch die Funktion $f(x) = 3 \cdot x^4$ **spiegelsymmetrisch**.

Beispiel 2: Gegeben ist diese Funktion:

$$f(x) = \frac{3}{x}$$

Diese Funktion lässt sich schreiben als $f(x) = 3 \cdot x^{-1}$. Die Unterfunktion $g(x) = x^{-1}$ ist eine Potenzfunktion mit **ungeradem** Exponenten, sie ist also **punktsymmetrisch**. Darum ist auch $f(x) = \frac{3}{x}$ **punktsymmetrisch**.

Summenregel

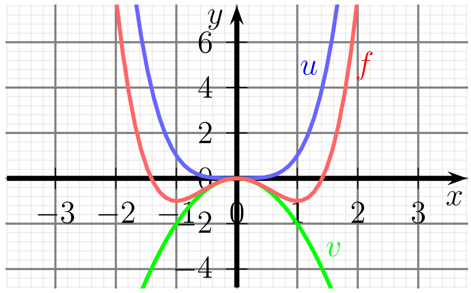
> ***Die Summe zweier spiegelsymmetrischen (punktsymmetrischen) Funktionen stellt ebenfalls eine spiegelsymmetrische (punktsymmetrische) Funktion dar.***

Wichtig ist hierbei, dass **beide** Teilfunktionen die **gleiche** Art von Symmetrie haben, also entweder **beide Spiegelsymmetrie** oder **beide Punktsymmetrie**. Die Summenfunktion hat dann die gleiche Art der Symmetrie wie die beiden Teilfunktionen.

Auch hier sollen ein paar Beispiele das verdeutlichen.

Beispiel 1: Gegeben ist die Funktion:

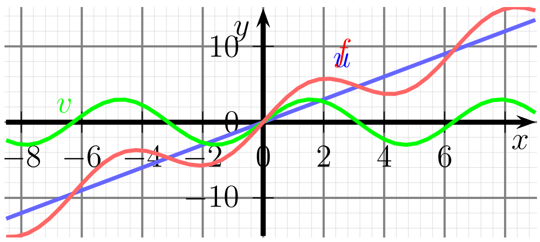
$$f(x) = x^4 - 2x^2$$



Die Teilfunktionen $u(x) = x^4$ und $v(x) = -2x^2$ sind beide **spiegelsymmetrisch**. Bei der Funktion u folgt das direkt aus dem gradzahligen Exponenten 4, bei der Funktion v muss zusätzlich noch die Konstantenregel mit herangezogen werden. Die Funktion $f(x) = x^4 - 2x^2$ ist daher ebenfalls **spiegelsymmetrisch**.

Beispiel 2: Gegeben ist die Funktion:

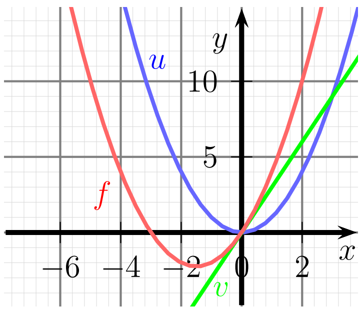
$$f(x) = 1{,}5x + 3\sin x$$



Hier sind beide Teilfunktionen $u(x) = 1{,}5x$ und $v(x) = 3\sin x$ **punktsymmetrisch**. Daher ist auch die Summenfunktion
$f(x) = 1{,}5x + 3\sin x$ **punktsymmetrisch**.

Beispiel 3: Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = x^2 + 3x$$



Hier ist die erste Teilfuntion $u(x) = x^2$ **spiegelsymmetrisch**, die zweite Teilfunktion $v(x) = 3x$ aber **punktsymmetrisch**. Daher liegt bei der Summenfunktion $f(x) = x^2 + 3x$ **keine** Symmetrie vor.

Produktregel

> ***Das Produkt zweier symmetrischen Funktionen stellt ebenfalls eine symmetrische Funktion dar. Haben die Teilfunktionen die*** **gleiche** ***Art von Symmetrie, dann erhalten wir eine*** **spiegelsymmetrische** ***Funktion, haben die Teilfunktionen*** **verschiedenartige** ***Symmetrie, dann ist die Produktfunktion*** $\mathbf{f(x) = u(x) \cdot v(x)}$ **punktsymmetrisch*****.***

Dieses Ergebnis lässt sich als Tabelle darstellen.

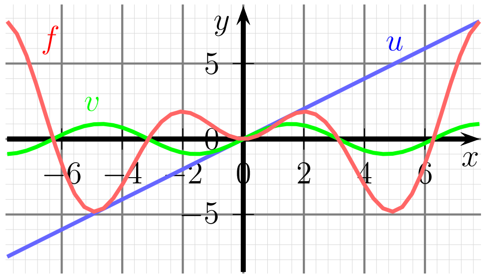
$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$u(x)$	$v(x)$	$f(x)$
spiegelsymmetrisch	spiegelsymmetrisch	spiegelsymmetrisch
spiegelsymmetrisch	punktsymmetrisch	punktsymmetrisch
punktsymmetrisch	spiegelsymmetrisch	punktsymmetrisch
punktsymmetrisch	punktsymmetrisch	spiegelsymmetrisch

Auch hierzu möchte ich ein paar Beispiele vorstellen.

Beispiel 1: Gegeben ist die Funktion:

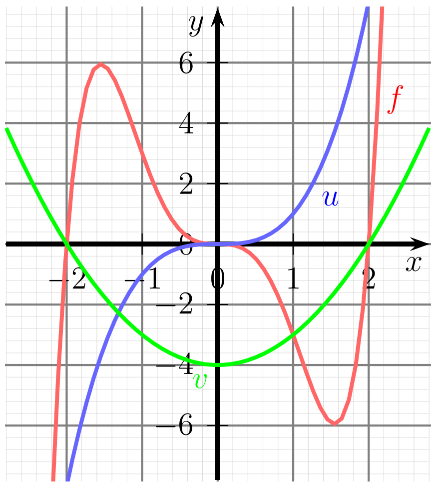
$$f(x) = x \cdot \sin x$$



Beide Teilfunktionen sind **punktsymmetrisch**, daher ist die Ergebnisfunktion **spiegelsymmetrisch**. Dargestellt sind nebenstehend neben der Ergebnisfunktion f auch die Teilfunktionen u und v.

Beispiel 2: Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = x^3 \cdot (x^2 - 4)$$



Die Teilfunktion $u(x) = x^3$ ist **punktsymmetrisch**, denn sie stellt eine Potenzfunktion mit **ungeradem** Exponenten dar. Die andere Teilfunktion $v(x) = x^2 - 4$ lässt sich mit der Summenregel analysieren. Sie besteht aus zwei Summenden. Der erste Summand x^2 ist eine Potenzfunktion mit geradem Exponenten. Der zweite Summand -4 kann als Produkt aus Konstante und Potenzfunktion aufgefasst werden: $-4 \cdot x^0$. Die Potenzfunktion x^0 hat einen geraden Exponenten, ist also spiegelsymmetrisch, und wird mit einer Konstanten (nämlich -4) multipiziert. Nach der Konstantenregel ist sie damit ebenfalls spiegelsymmetrisch. Somit ist auch $v(x) = x^2 - 4$ spiegelsymmetrisch. Beim Produkt $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ wird eine punktsymmetrische Teilfunktion mit spiegelsymmetrischen multipliziert. Damit ist $f(x) = x^3 \cdot (x^2 - 4)$ punktsymmetrisch.

Das lässt sich leicht nachprüfen, indem man die Funktionsgleichung ausmultipliziert.

$$f(x) = x^3 \cdot (x^2 - 4) = x^5 - 4x^3$$

Hier tauchen nun ausschließlich **ungerade** Exponenten auf, was ein Merkmal für punktsymmetrische Polynome ist.

Quotientenregel

> ***Der Quotient zweier symmetrischen Funktionen stellt ebenfalls eine symmetrische Funktion dar. Haben die Teilfunktionen die* gleiche *Art von Symmetrie, dann erhalten wir eine* spiegelsymmetrische *Funktion, haben die Teilfunktionen* verschiedenartige *Symmetrie, dann ist die Bruchfunktion* $\mathbf{f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}}$ punktsymmetrisch.**

Auch dieses Ergebnis lässt sich als Tabelle darstellen. Die Tabelle entspricht genau der Tabelle für die Produktregel.

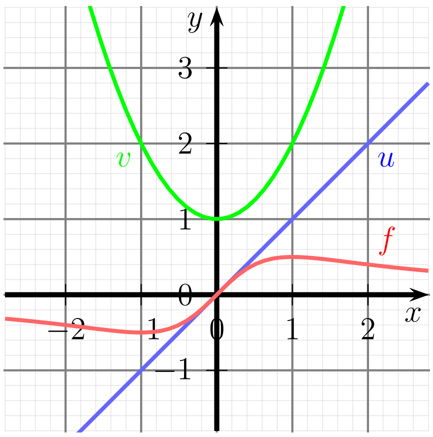
$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$u(x)$	$v(x)$	$f(x)$
spiegelsymmetrisch	spiegelsymmetrisch	spiegelsymmetrisch
spiegelsymmetrisch	punktsymmetrisch	punktsymmetrisch
punktsymmetrisch	spiegelsymmetrisch	punktsymmetrisch
punktsymmetrisch	punktsymmetrisch	spiegelsymmetrisch

Auch hier möchte ich ein paar Beispiele vorstellen.

Beispiel 1: Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

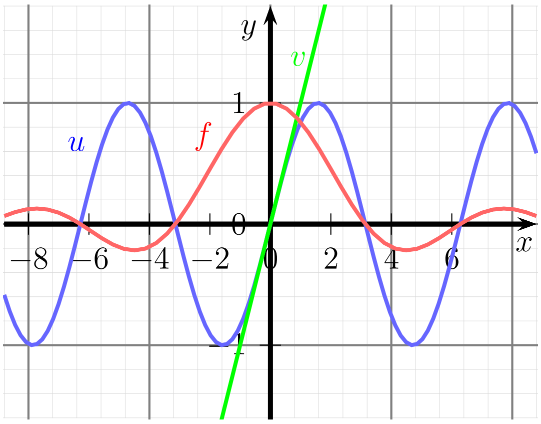


Im Zähler steht eine Potenzfunktion mit dem Exponenten 1, also einer ungeraden Zahl. Damit stellt die Zählerfunktion $u(x) = x$ eine **punktsymmetrische** Funktion dar. Im Nenner $v(x) = x^2 + 1$ haben wir die Summe aus zwei **spiegelsymmetrischen** Teilfunktionen, alle Exponenten sind gerade. Daher ist die Quotientenfunktion $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ eine **punktsymmetrische** Funktion.

Beispiel 2: Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

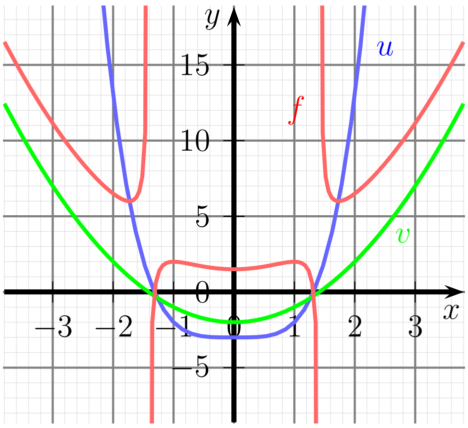
Die Zählerfunktion $u(x) = \sin x$ ist **punktsymmetrisch** zum Koordinatenursprung, die Nennerfunktion $v(x) = x$ ebenfalls, wie rechts dargestellt. Die Quotientenfunktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ist deshalb **spiegelsymmetrisch** zur Ordinate. In den nebenstehend dargestellten Funktionsgraphen wird das deutlich.



Beispiel 3: Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = \frac{x^4 - 3}{x^2 - 2}$$

Die nebenstehende Darstellung der Funktionsgraphen ist etwas verworren. Trotzdem ist erkennbar, dass sowohl die Zählerfunktion $u(x) = x^4 - 3$ als auch die Nennerfunktion $v(x) = x^2 - 2$ spiegelsymmetrisch zur Ordinate sind. Beide stellen Polynome dar, die ausschließlich **gradzahlige** Exponenten enthält. Derhalb ist auch die Quotientenfunktion $f(x) = \frac{x^4-3}{x^2-2}$ zur Ordinate **spiegelsymmetrisch**.



Kettenregeln:

> ***Ist die Funktion $f(x)$ die Funktion einer Unterfunktion $g(x)$, dann ist $f(x)$ spiegelsymmetrisch, wenn auch $g(x)$ spiegelsymmetrisch ist. Die Eigenschaften von $f(g)$ spielen dabei keine Rolle.***
>
> ***Ist die Funktion $f(x)$ die Funktion einer Unterfunktion $g(x)$, dann ist $f(x)$ nicht symmetrisch, wenn $g(x)$ nicht symmetrisch ist. Die Eigenschaften von $f(g)$ spielen dabei keine Rolle***
>
> ***Ist die Funktion $f(x)$ die Funktion einer Unterfunktion $g(x)$, dann ist $f(x)$ punktsymmetrisch, wenn sowohl $g(x)$ als auch $f(g)$ punktsymmetrisch ist.***
>
> ***Ist die Funktion $f(x)$ die Funktion einer Unterfunktion $g(x)$, dann ist $f(x)$ spiegelsymmetrisch, wenn $g(x)$ punktsymmetrisch und $f(g)$ spiegelsymmetrisch ist.***

Möglicherweise ist dem einen oder anderen nicht ganz klar, was „eine Funktion von einer Funktion“ denn sein soll. Das habe ich etwas ausführlicher hier im Kapitel 5.5 (Kettenregel)

https://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/ablreg.pdf

oder hier im Kapitel 3.2.5 (Beispiele zur Kettenregel) beschrieben:

https://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/diffrech.pdf

Die weiter unten nachfolgenden Beispiele sollten das aber ebenfalls deutlich machen.

Da das Ganze etwas unübersichtlich ist, möchte ich die Zusammenhänge in einer Tabelle zusammenfassen.

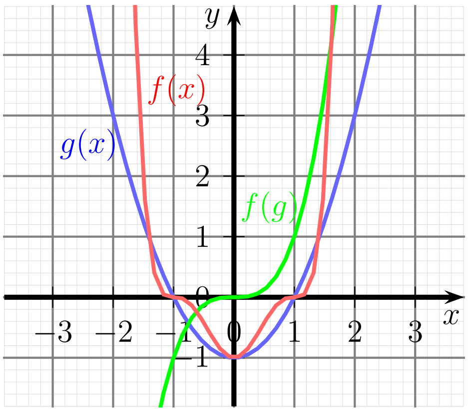
$$f(x) = f\big(g(x)\big)$$

$f(g)$	$g(x)$	$f(x)$
spiegelsymmetrisch	spiegelsymmetrisch	spiegelsymmetrisch
punktsymmetrisch	spiegelsymmetrisch	spiegelsymmetrisch
nicht symmetrisch	spiegelsymmetrisch	spiegelsymmetrisch
spiegelsymmetrisch	punktsymmetrisch	spiegelsymmetrisch
punktsymmetrisch	punktsymmetrisch	punktsymmetrisch
nicht symmetrisch	punktsymmetrisch	nicht symmetrisch
spiegelsymmetrisch	nicht symmetrisch	nicht symmetrisch
punktsymmetrisch	nicht symmetrisch	nicht symmetrisch
nicht symmetrisch	nicht symmetrisch	nicht symmetrisch

Ein paar Beispiele sollen das verdeutlichen.

Beispiel 1: Gegeben ist die Funktion

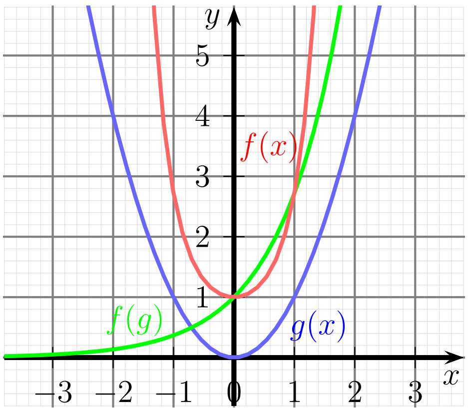
$$f(x) = (x^2 - 1)^3$$



Wir können den Klammerinhalt $x^2 - 1$ mit g bezeichnen. Unsere **innere Funktion** lautet dann $g(x) = x^2 - 1$. Die innere Funktion stellt ein Polynom mit ausschließlich gradzahligen Exponenten dar, ist also spiegelsymmetrisch. Die äußere Funktion lauten dann $f(g) = g^3$. Diese ist punktsymmetrisch, der Exponent ist ungerade. Das spielt aber keine Rolle, es genügt, dass $g(x)$ spiegelsymmetrisch ist, daher ist sofort $f(x)$ ebenfalls spiegelsymmetrisch.

Beispiel 2: Gegeben ist die Funktion

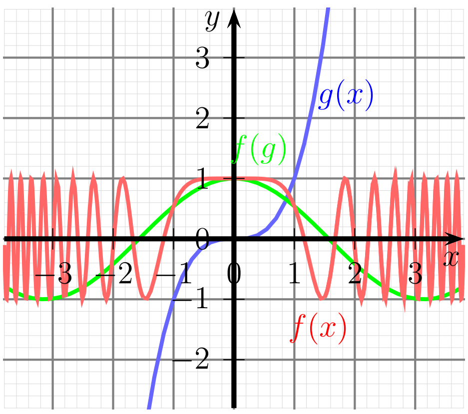
$$f(x) = e^{x^2}$$



Die „innere Funktion“ (also die, die zuerst ausrechnet werden muss) lautet hier $g(x) = x^2$. Das ist eine spiegelsymmetrische Funktion, weil es eine Potenz mit gradzahligem Exponenten ist. Da spielt es keine Rolle, dass die „äußere Funktion“ $f(g) = e^g$ keinerlei Symmetrie hat. Allein wegen Spiegelsymmetrie von $g(x) = x^2$ ist auch $f(x) = e^{x^2}$ spiegelsymmetrisch.

Beispiel 3: Gegeben ist die Funktion

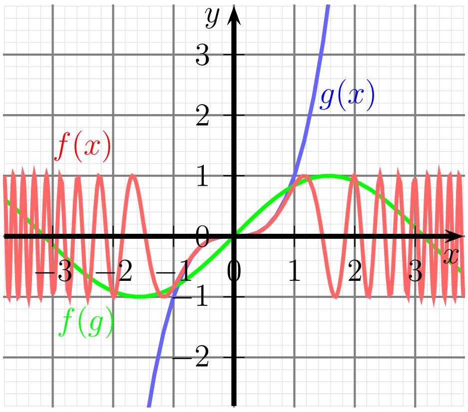
$$f(x) = \cos x^3$$



Hier ist die innere Funktion mit $g(x) = x^3$ eine Punktsymmetrische Funktion zum Koordinatenursprung, weil sie eine Potenz mit ungeradem Exponenten darstellt. Die äußere Funktion mit $f(g) = \cos g$ stellt eine spiegelsymmetrische Funktion dar. Aus obenstehender Tabelle ergibt sich, dass daher die Gesamtfunktion $f(x) = \cos x^3$ spiegelsymmetrisch sein muss. Im nebenstehenden Diagramm kann man das erkennen.

Beispiel 4: Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \sin x^3$$



Als letztes Beispiel haben wir hier eine zusammengesetzte Funktion, bei der sowohl die innere Funktion mit $g(x) = x^3$ als auch die äußere Funktion mit $f(g) = \sin g$ punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist. Aus obenstehender Tabelle ergibt sich, dass daraus folgt, dass auch die Gesamtfunktion $f(x) = \sin x^3$ punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung sein muss. In nebenstehenden Diagramm wird das deutlich.

3 Übungsaufgaben

Sind die nachfolgenden Funktionen symmetrisch oder nicht? Falls Symmetrie vorliegt, handelt es sich um Spiegelsymmetrie zur Ordinate (y-Achse) oder um Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung?

3.1 Aufgabe 1:

$$f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$$

3.2 Aufgabe 2:

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 1$$

3.3 Aufgabe 3:

$$f(x) = 2x^3 - 6x$$

3.4 Aufgabe 4:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

3.5 Aufgabe 5:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

3.6 Aufgabe 6:

$$f(x) = \sin x + 1$$

3.7 Aufgabe 7:

$$f(x) = \cos x + 1$$

3.8 Aufgabe 8:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

3.9 Aufgabe 9:

$$f(x) = e^x + e^{-x}$$

3.10 Aufgabe 10:

$$f(x) = (x^2 - 3x + 1)^2$$

3.11 Aufgabe 11:

$$f(x) = e^{\cos x}$$

3.12 Aufgabe 12:

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$$

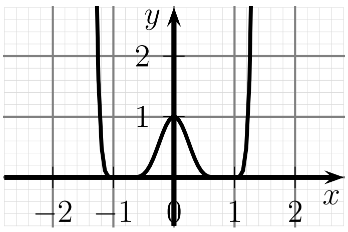
4 Lösungen der Übungsaufgaben

Sind die nachfolgenden Funktionen symmetrisch oder nicht? Falls Symmetrie vorliegt, handelt es sich um Spiegelsymmetrie zur Ordinate (y-Achse) oder um Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung?

4.1 Aufgabe 1:

$f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$

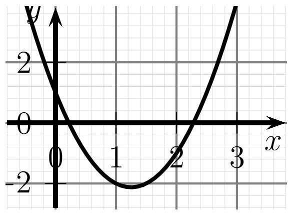
Hier haben wir die Summe aus drei Potenzen mit gradzahligen Exponenten. Die 1 kann aufgefasst werden als $1 \cdot x^0$. Auch die Null ist eine gerade Zahl. Die Funktion ist also **spiegelsymmetrisch** zur Ordinate.



4.2 Aufgabe 2:

$f(x) = 2x^2 - 5x + 1$

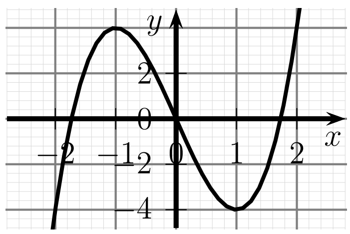
Auch hier haben wir eine Summe aus drei Potenzen. Diese sind allerdings teilweise gradzahlig, teilweise auch ungradzahlig. Daher liegt hier **keine** Symmerie vor.



4.3 Aufgabe 3:

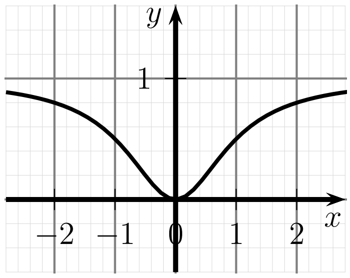
$f(x) = 2x^3 - 6x$

Diese Funktion besteht aus einer Summe von zwei Potenzen. Beide haben einen ungeraden Exponenten. Darum ist diese Funktion **punktsymmetrisch** zum Koordinatenursprung.



4.4 Aufgabe 4:

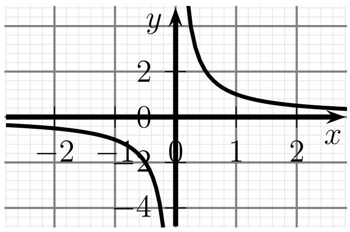
$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$$



Diese Funktion stellt einen Bruch dar. Der Zähler ist eine Potenzfunktion mit geradem Exponent und auch im Nennerpolynom kommen nur gerade Exponenten vor. Beide sind also spiegelsymmetrisch zur Ordinate. Deshalb ist auch die Quotientenfunktion **spiegelsymmetrisch** zur Ordinate.

4.5 Aufgabe 5:

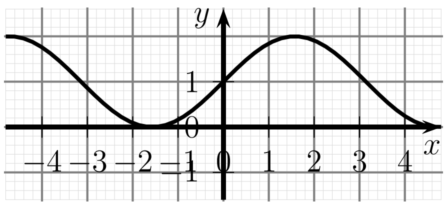
$$f(x) = \frac{1}{x}$$



Diese Funktion lässt sich umschreiben in $f(x) = x^{-1}$. Das ist eine Potenz mit einem ungeraden Exponenten. Also ist die Funktion **punktsymmetrisch** zum Koordinatenursprung. Alternativ kann man in der Funktion auch einen Quotienten mit einer Potenz mit geradem Exponenten im Zähler und einem ungeraden Exponenten im Nenner sehen. Auch das führt zur Punktsymmetrie, weil eine spiehelsymmetrische Funktion durch eine punktsymmetrische Funktion dividiert wird.

4.6 Aufgabe 6:

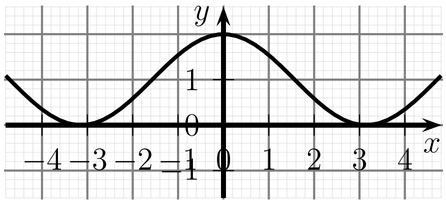
$f(x) = \sin x + 1$



Die Sinusfunktion ist als Grundfunktion spiegelsymmetrisch zur Ordinate. Hinzuaddiert wird eine Potenzfunktion mit geradem Exponenten (x^0). Daher haben wir in der Summenfunktion keinerlei Symmetrie.

4.7 Aufgabe 7:

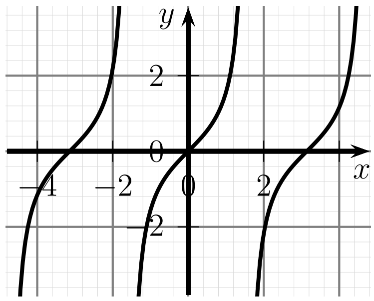
$f(x) = \cos x + 1$



Die Kosinusfunktion ist eine spiegelsymmetrische Grundfunktion. Hinzuaddiert wird eine Potenzfunktion, die mit geradem Exponenten (x^0) ebenfalls spiegelsymmetrisch ist. Daher haben ist auch die Summenfunktion **spiegelsymmetrisch** zur Ordinate.

4.8 Aufgabe 8:

$f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$



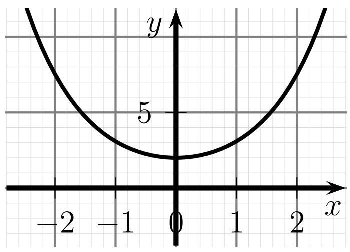
Die gegebene Funktion stellt einen Quotienten, also einen Bruch dar. Im Zähler steht mit der Sinusfunktion eine punktsymmetrische Funtion und im Nenner mit der Kosinusfunktion eine spiegelsymmetrische Funktion. Nach der Quotientenregel stellt die Bruchfunktion damit eine zum Koordinatenursprung **punktsymmetrische** Funktion dar.

Anmerkung: Dem einen oder anderen ist auch dieser Zusammenhang bekannt:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

4.9 Aufgabe 9:

$f(x) = e^x + e^{-x}$



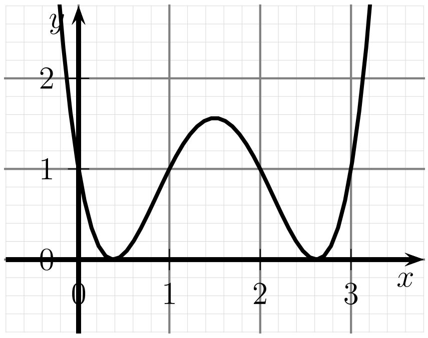
Hier haben wir eine Summe aus zwei Funktionen, die beide **keine** Symmetrie haben. An dieser Stelle hilft demnach keine der Regeln weiter. Daher verwende ich die Definition zum Nachweis. Da ich eine Spiegelsymmetrie zur Ordinate vermute, bilde ich $f(-x)$ und versuche diese Funktion so umzuformen, dass ich $f(x)$ erhalte.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x - e^{-x} \\ f(-x) &= e^{-x} + e^{-(-x)} \\ &= e^{-x} + e^x \\ &= e^x + e^{-x} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Damit ist der Nachweis erbracht.

4.10 Aufgabe 10:

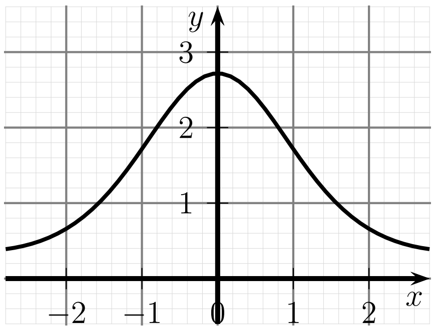
$f(x) = (x^2 - 3x + 1)^2$



Die gegebene Funktion stellt sich als eine Funktion von einer Funktion dar. Daher kommt die Kettenregel zum Einsatz. Dabei stellt die innere Funktion $g(x) = x^2 - 3x + 1$ den Klammerinhalt dar und die äußere Funktion $f(g) = g^2$ das, was mit der Klammer passiert. Da die innere Funktion ein Polynom mit teils geraden und teils ungeraden Exponenten ist und damit **keine** Symmetrie hat, spielt es keine Rolle, dass die äußere Funktion spiegelsymmetrisch ist. Nach der Kettenregel kann unabhängig von den Eigenschaften der äußeren Funktion bei der Gesamtfunktion **keine** Symmetrie mehr auftreten.

4.11 Aufgabe 11:

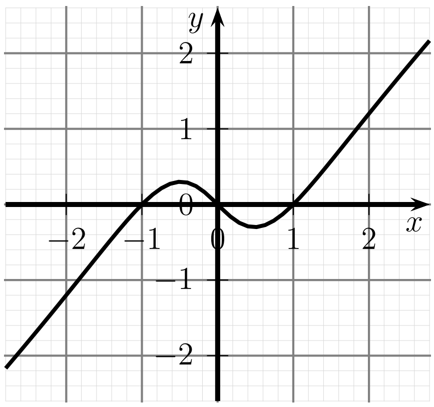
$f(x) = e^{\cos x}$



Auch bei dieser Funktion kommt die Kettenregel zum Einsatz. Die innere Funktion ist der Exponent mit $g(x) = \cos x$, die äußere Funktion $f(g) = e^g$. Die äußere Funktion ist als Grundfunktion ohne jede Symmetrie bekannt. Auch die innere Funktion ist eine Grundfunktion. Sie ist spiegelsymmetrisch zur Ordinate. Nach der Kettenregel reicht das aus, damit auch die Gesamtfunktion **spiegelsymmetrisch** zur Ordinate ist. Die fehlende Symmetrie der äußeren Funktion ist dabei ohne Belang.

4.12 Aufgabe 12:

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$$



Diese Funktion stellt einen Bruch, einen Quotienten dar. Daher kommt die Quotientenregel zur Anwendung. Im Zähler steht ein punktsymmetrisches Polynom, denn es kommen ausschließlich ungerade Exponenten vor. Die Nennerfunktion ist ebenfalls ein Polynom. Da dort ausschließlich gerade Exponente auftreten, haben wir hier Spiegelsymmetrie. Nach der Quotientenregel ist damit die Gesamtfunktion **punktsymmetrisch** zum Koordinatenursprung.