Die Strahlensätze

Wolfgang Kippels

10. April 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Grundlagen

2.1 Grundlegende Definitionen

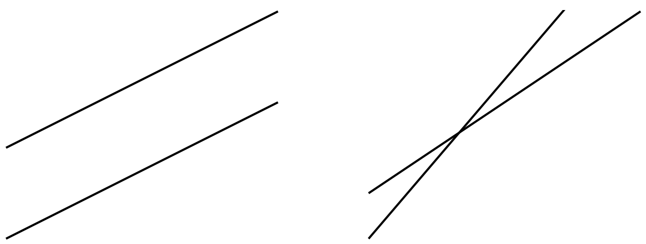
Strecken sind gerade Linien mit einem Anfangspunkt und einem Endpunkt. Ein 100-Meter-Lauf findet auf einer Strecke statt. Die Endpunkte sind dabei Start und Ziel.

Strahlen sind gerade Linien, die einen Anfangspunkt, aber keinen Endpunkt haben. Man kann sich dazu den Lichtstrahl aus einer Taschenlampe vorstellen, den man Richtung Himmel schickt.

Geraden sind gerade Linien, die weder einen Anfangspunkt noch einen Endpunkt haben. Ein praktisches Beispiel dazu kann ich nicht angeben. Meist handelt es sich um gedachte Linien, die nur durch ihre Lage irgendwo eine Orientierung geben sollen. Die Richtschnur eines Maurers wäre eine solche Gerade, wenn man dabei davon absieht, dass die Richtschnur dennoch an beiden Enden befestigt ist.

2.2 Eigenschaften von Geraden

Geraden in einer Ebene (beispielsweise in der Zeichenebene) sind entweder **parallel** oder sie **schneiden sich** irgendwo.[1] Sind sie parallel, dann haben sie überall den gleichen Abstand voneinander.



parallele Geraden *sich schneidende Geraden*

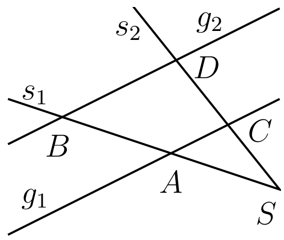
Etwas anders sieht es im dreidimensionalen Raum aus. Hier kann es nicht nur sein, dass die Geraden sich schneiden oder parallel sind, sie können auch **windschief**[2] zueinander liegen. Man kann sich die Lage beispielsweise in einem Zimmer vorstellen, wo eine Gerade auf dem Fußboden verläuft und die andere sich in der Ebene der Zimmerdecke befindet. Wenn sie nicht zufällig parallel sind, dann sind sie windschief. Sie schneiden sich nirgendwo.

[1] Der Schnittpunkt der Geraden kann natürlich auch außerhalb eines Papierblattes liegen, auf das sie gezeichnet sind.

[2] „Windschief“ ist tatsächlich ein mathematischer Fachausdruck!

3 Die Lehrsätze

Nebenstehend ist ein sogenannter „Zweistrahl“ mit zwei parallelen Geraden dargestellt. Die beiden Strahlen heißen s_1 und s_2. Der gemeinsame Startpunkt der beiden Strahlen ist der Punkt S. Diese beiden Strahlen werden von den beiden **parallelen** Geraden g_1 und g_2 geschnitten. Die Schnittpunkte der Geraden sind die eingetragenen Punkte A, B, C und D.



Das nebenstehende Bild ist die Planfigur für beide Strahlensätze.

3.1 Der erste Strahlensatz

Der **erste** Strahlensatz beschäftigt sich nur mit den Abschnitten auf den beiden Strahlen. Er lautet:

> ***Die Verhältnisse der Abschnitte auf dem einen Strahl sind gleich der Verhältnisse der entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl.***

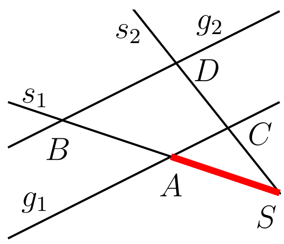
Hierbei ist zunächst zu klären, was „*entsprechenden*“ bedeutet. Dazu sehen wir uns die Planskizze an. Der Strecke $\overline{SA}$ auf dem Strahl s_1 entspricht der Strecke $\overline{SC}$ auf dem Strahl s_2, der Strecke $\overline{SB}$ auf dem Strahl s_1 entspricht der Strecke $\overline{SD}$ auf dem Strahl s_2, und der Strecke $\overline{AB}$ auf dem Strahl s_1 entspricht der Strecke $\overline{CD}$ auf dem Strahl s_2.

Jetzt kann man zum ersten Strahlensatz drei passende Verhältnisse aufstellen:

$$\boxed{\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SD}}} \text{ oder: } \boxed{\frac{\overline{SA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{CD}}} \text{ oder: } \boxed{\frac{\overline{SB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SD}}{\overline{CD}}}$$

Alle drei Formel stellen den ersten Strahlensatz dar.

Nach meinen Beobachtungen macht es immer wieder Schwierigkeiten herauszufinden, wie genau welche Formel anzusetzen ist. Dazu sehen wir uns die nebenstehende Planskizze an. Ich möchte zunächst eine Formel aufstellen, die mit der Strecke $\overline{SA}$ beginnt. Das sieht dann so aus:



$$\frac{\overline{SA}}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

Die Strecke $\overline{SA}$ steht auf der linken Seite im Zähler des Bruches. Was im Nenner steht, ist zunächst ohne Belang. (Da kann ein beliebiger Abschnitt stehen, der **auf dem gleichen Strahl** liegt, wie die Strecke $\overline{SA}$. Das könnte $\overline{SB}$ oder $\overline{AB}$ sein.) Ich suche jetzt die Strecke **auf dem anderen Strahl**, also auf s_2, der der Strecke $\overline{SA}$ auf dem Strahl s_1 entspricht. Die muss nämlich auf der anderen Seite des Gleichheitszeichens ebenfalls im Zähler stehen.

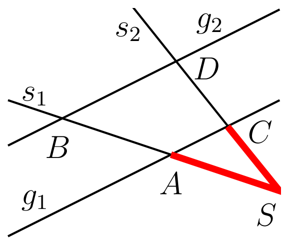
Hier ist es wichtig zu erkennen, was das Wort „entsprechenden“ bedeutet.

- Die Strecke $\overline{SA}$ beginnt am gemeinsamen Startpunkt S der beiden Strahlen. Also muss die **entsprechende** Strecke auf dem anderen Strahl ebenfalls am gemeinsamen Startpunkt S der beiden Strahlen beginnen.

- Die Strecke $\overline{SA}$ liegt auf dem Strahl s_1. Also muss die **entsprechende** Strecke auf dem **anderen** Strahl, nämlich auf s_2 liegen.

- Die Strecke $\overline{SA}$ reicht bis an die Gerade g_1 heran. Also muss die **entsprechende** Strecke auf dem anderen Strahl ebenfalls bis an die Gerade g_2 heranreichen.

Betrachtet man diese drei Bedingungen, dann kann die entsprechende Strecke zu $\overline{SA}$ auf dem Strahl s_1 nur die Strecke $\overline{SC}$ auf dem Strahl s_2 sein. Diese ist nebenstehend eingezeichnet. In der Formel sieht das dann so aus:

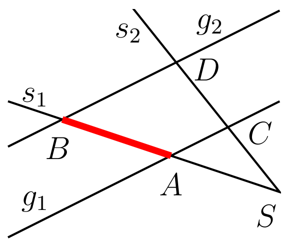


$$\frac{\overline{SA}}{\dots} = \frac{\overline{SC}}{\dots}$$

Als nächstes kümmern wir uns nun um die Nenner. In der ersten Hälfte des Strahlensatzes heißt es:

Die Verhältnisse der Abschnitte auf dem einen Strahl...

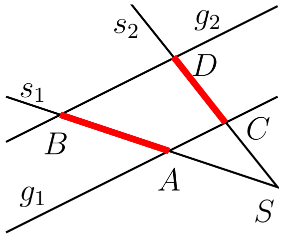
Wenn wir jetzt auf der linken Seite der Gleichung ein solches Verhältnis (also einen Bruch) aufstellen wollen, dann kommen dort nur Abschnitte auf dem Strahl s_1 in Frage, weil die Strecke $\overline{SA}$, die schon im Zähler steht, ja auch auf s_1 liegt. Dort gibt es noch die Strecken $\overline{SB}$ und $\overline{AB}$. Mit beiden können wir den ersten Strahlensatz aufstellen. Ich nehme jetzt willkürlich die Strecke $\overline{AB}$, wie nebenstehend dargestellt.



$$\frac{\overline{SA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SC}}{\dots}$$

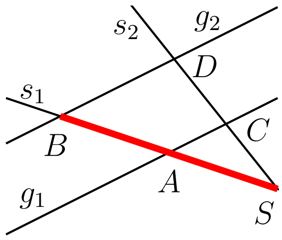
Wieder stellt sich die Frage: Welche Strecke auf dem anderen Strahl (s_2) ist die Strecke, die der Strecke $\overline{AB}$ auf dem Strahl s_1 entspricht?

Die Strecke $\overline{AB}$ beginnt am Schnittpunkt von s_1 mit der Geraden g_1 und endet am Schnittpunkt von s_1 mit der Geraden g_2. Also muss die „entsprechende“ Strecke auch am Schnittpunkt mit der Geraden g_1 beginnen und am Schnittpunkt mit der Geraden g_2 enden, nur eben auf dem **anderen** Strahl, nämlich auf s_2. Das wäre somit die Strecke $\overline{CD}$, wie nebenstehend dargestellt. Das führt dann zu dieser Gleichung:



$$\frac{\overline{SA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{CD}}$$

Die letzte Variante, die mit der Strecke $\overline{SA}$ im Zähler beginnt, sähe so aus:

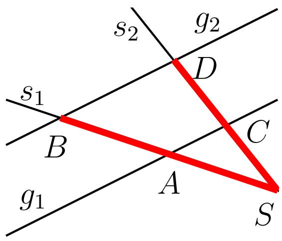


$$\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SC}}{\ldots}$$

Wieder müssen wir eine „entsprechende“ Strecke auf dem anderen Strahl finden, diesmal zur Strecke $\overline{SB}$ auf dem Strahl s_1. Diese steht nämlich links im Nenner, der rechte Nenner fehlt noch. Welche könnte das sein?

Die Strecke $\overline{SB}$ beginnt am gemeinsamen Startpunkt S beider Strahlen. Daher muss die gesuchte Strecke auch hier beginnen.

Die Strecke $\overline{SB}$ endet am Schnittpunkt mit der Geraden g_2. Daher muss die gesuchte Strecke auch am Schnittpunkt mit der Geraden g_2 enden, allerdings auf dem anderen Strahl. Das ist der Punkt D. Die Strecke auf dem Strahl s_2, die der Strecke $\overline{SB}$ auf dem Strahl s_1 entspricht ist daher die Strecke $\overline{SD}$, wie hier nebenstehend eingezeichnet. Die Formel zum ersten Strahlensatz sieht somit so aus:



$$\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SD}}$$

3.2 Der zweite Strahlensatz

Der **zweite** Strahlensatz verknüpft die Abschnitte auf den beiden parallelen Geraden mit den Abschnitten auf einem der Strahlen. Er lautet:

> ***Das Verhältnis der Abschnitte auf den Parallelen ist gleich dem Verhältnis der zugehörigen Strahlenabschnitte auf einem Strahl.***

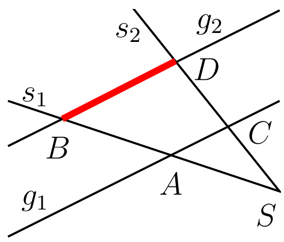
Hierbei ist es wichtig zu wissen, was genau mit den **Strahlenabschnitten** gemeint ist. Es geht dabei immer um die jeweilige Strecke **zwischen dem gemeinsamen Punkt S der beiden Strahlen und dem jeweiligen Schnittpunkt** mit einer der beiden Geraden.

Weil der zweite Strahlensatz mit dem einen oder anderen Strahl aufgestellt werden, haben wir zwei Formeln, die diesen Strahlensatz repräsentieren:

$$\boxed{\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SB}}} \text{ oder: } \boxed{\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SD}}}$$

Auch beim zweiten Strahlensatz erscheint es mir notwendig zu sein, etwas ausführlicher darauf einzugehen, was die **entsprechenden** Abschnitte sind. Das möchte ich an einem Beispiel erklären.

Wir suchen die Strecke $\overline{BD}$. Dazu ein Tipp: **Es ist immer sinnvoll, den Gleichunganſatz mit der gesuchten Größe zu beginnen.** Unser erster Ansatz sieht dann so aus:

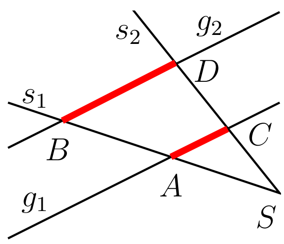


$$\frac{\overline{BD}}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

Zunächst sehen wir nach, was das denn für eine Größe ist, die wir suchen. Es ist unschwer zu erkennen, dass es sich um einen Abschnitt auf einer der beiden Parallelen handelt. Im zweiten Strahlensatz steht:

> ***Das Verhältnis der Abschnitte auf den Parallelen ist . . .***

Also muss unsere Strecke $\overline{BD}$ ins Verhältnis zum Abschnitt auf der anderen Parallelen gesetzt werden. Das ist dann die Strecke $\overline{AC}$, wie hier nebenstehend dargestellt ist. Unser Formelansatz sieht dann so aus:



$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \frac{\dots}{\dots}$$

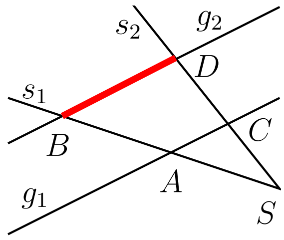
Jetzt fehlt noch die rechte Seite der Gleichung. Schauen wir, wie der zweite Strahlensatz weiter lautet:

> ***. . . ist gleich dem Verhältnis der*** **zugehörigen** ***Strahlenabschnitte auf*** **einem** ***Strahl.***

Es heißt dort:„…auf **einem** Strahl“. Das bedeutet, dass wir uns einen der beiden Strahlen aussuchen können, mit dem wir weiter arbeiten wollen. In der Praxis nehmen wir natürlich den Strahl, auf dem die Strahlenabschnitte liegen, deren Länge wir kennen oder auf andere Art ausrechnen können.

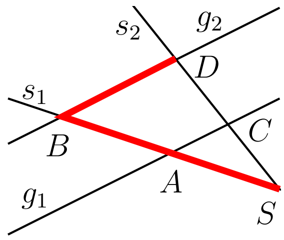
Gehen wir hier davon aus, dass wir mit dem Strahl s_1 weiterarbeiten wollen.

In unserem Formelansatz steht die Strecke $\overline{BD}$ im Zähler. Auf der anderen Seite der Gleichung muss dann im Zähler der zur Strecke $\overline{BD}$ **zugehörige** Strahlenabschnitt stehen. Hierbei ist zu beachten, dass alle Strahlenabschnitte am gemeinsamen Startpunkt der beiden Strahlen beginnen, also im Punkt S.

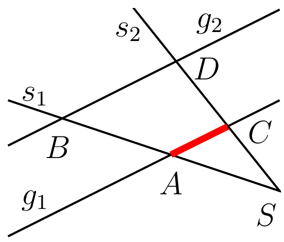


Die im linken Zähler stehende Strecke $\overline{BD}$ liegt auf der Geraden g_2. Deswegen muss der **zugehörige** Strahlenabschnitt bis an diese Gerade g_2 heranreichen. Anderenfalls würde er zu einem anderen Parallelenabschnitt gehören. Es kann also nur die Strecke $\overline{SB}$ sein. Damit ist unsere Formel nun bis hierher bekannt:

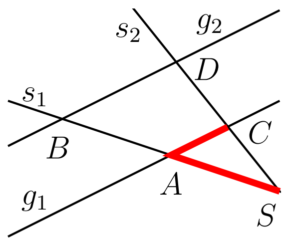
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{SB}}{\ldots}$$



Jetzt fehlt nur noch der Nenner auf der rechten Seite. Auf der linken Seite steht im Nenner die Strecke $\overline{AC}$. Wir müssen für den rechnen Nenner nach dem zur Strecke $\overline{AC}$ **zugehörigen** Strahlenaschnitt suchen. Zudem muss er auf dem selben Strahl liegen, wie der Strahlenabschnitt $\overline{SB}$ im rechten **Zähler**, also ebenfalls auf dem Strahl s_1.



Die Strecke $\overline{AC}$ liegt auf der Geraden g_1. Der **zugehörige** Strahlenabschnitt muss daher bis an diese Gerade heranreichen. Zudem muss er als **Strahlenabschnitt** am gemeinsamen Startpunkt S der beiden Strahlen beginnen. Das kann dann nur noch die Strecke $\overline{SA}$ sein. Diese ist hier nebenstehend eingezeichnet. Damit können wir die komplette Formel für den zweiten Strahlensatz angeben:



$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{SB}}{\overline{SA}}$$

Hätten wir uns für die Anwendung des zweiten Strahlensatzes den Strahl s_2 ausgesucht, dann hätten wir diese Gleichung erhalten:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{SD}}{\overline{SC}}$$

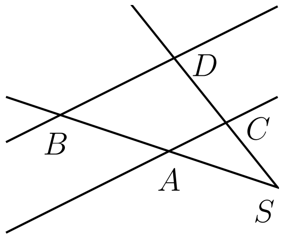
4 Aufgaben

4.1 Aufgabe 1

Gemäß nebenstehender Planskizze sind folgende Größen bekannt:

$$\overline{SA} = 3\,\text{cm} \quad \overline{AB} = 2\,\text{cm} \quad \overline{SC} = 4{,}5\,\text{cm}$$

Gesucht ist die Strecke $\overline{CD}$.

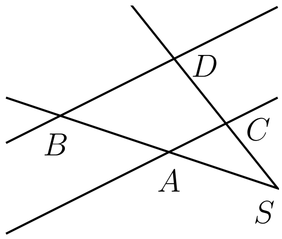


4.2 Aufgabe 2

Gemäß nebenstehender Planskizze sind folgende Größen bekannt:

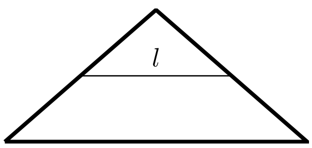
$$\overline{SA} = 3{,}6\,\text{cm} \quad \overline{AB} = 1{,}2\,\text{cm} \quad \overline{AC} = 2{,}7\,\text{cm}$$

Gesucht ist die Strecke $\overline{BD}$.



4.3 Aufgabe 3

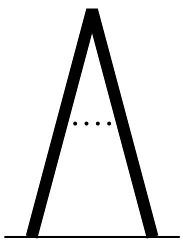
Auf einem Dachboden soll Wäsche zum Trocknen aufgehängt werden können. Der Dachboden ist 9,50 Meter breit und in der Mitte 3,80 Meter hoch. Die Wäscheleinen sollen 2 Meter über dem Fußboden waagerecht aufgespannt werden. Welche Länge l hat jede Leine von Haken zu Haken?



4.4 Aufgabe 4

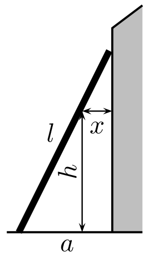
Eine Stehleiter mit einer Leiterholmlänge von 2,60 Metern wird beim Aufstellen durch eine Kette gesichert. Die Kette soll verhindern, dass die Holmen zu weit auseinander stehen und dadurch wegrutschen können.

Wenn die Leiter so aufgestellt ist, dass die Kette stramm ist, soll der Abstand zwischen den Leiterfüßen 80 Zentimeter betragen. Die Kette ist beidseitig in einem Abstand von 1,43 Metern von den Leiterfüßen entfernt angebracht. Welche Länge muss diese Kette haben?



4.5 Aufgabe 5

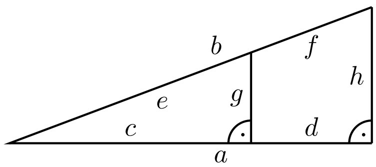
Eine Leiter mit einer Länge von $l = 3{,}90\,\mathrm{m}$ ist an eine Hauswand angelehnt, wie nebenstehend dargestellt. Der Fußpunkt der Leiter hat von der Hauswand einen Abstand von $a = 1{,}50\,\mathrm{m}$. In welcher Höhe h über dem Erdboden beträgt der Abstand x zwischen Leiter und Hauswand genau 50 Zentimeter?



4.6 Aufgabe 6

Gemäß nebenstehender Planfigur sind folgende Größen bekannt:

$$\begin{aligned} a &= 18\,\mathrm{cm} \\ d &= 6\,\mathrm{cm} \\ g &= 5\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$



Die Strecken g und h sind zueinander parallel, a mit h sowie c mit g bilden jeweils einen Rechten Winkel.

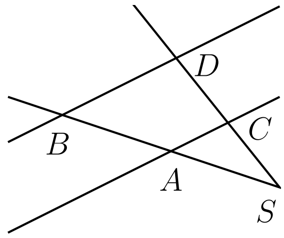
Berechnen Sie alle übrigen Strecken b, c, e, f und h. Wählen Sie bei der Berechnung eine sinnvolle Reihenfolge.

5 Lösungen der Aufgaben

5.1 Aufgabe 1

Gemäß nebenstehender Planskizze sind folgende Größen bekannt:

$$\overline{SA} = 3\,\text{cm} \quad \overline{AB} = 2\,\text{cm} \quad \overline{SC} = 4{,}5\,\text{cm}$$



Gesucht ist die Strecke $\overline{CD}$.

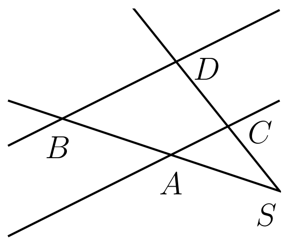
Lösung: Hier hilft der erste Strahlensatz weiter.

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{SA}}{\overline{AB}} &= \frac{\overline{SC}}{\overline{CD}} \\
\frac{3\,\text{cm}}{2\,\text{cm}} &= \frac{4{,}5\,\text{cm}}{\overline{CD}} \\
1{,}5 &= \frac{4{,}5\,\text{cm}}{\overline{CD}} \quad \left|\cdot \overline{CD}\right. \\
1{,}5 \cdot \overline{CD} &= 4{,}5\,\text{cm} \quad |:1{,}5 \\
\overline{CD} &= 3\,\text{cm}
\end{aligned}$$

5.2 Aufgabe 2

Gemäß nebenstehender Planskizze sind folgende Größen bekannt:

$$\overline{SA} = 3{,}6\,\text{cm} \quad \overline{AB} = 1{,}2\,\text{cm} \quad \overline{AC} = 2{,}7\,\text{cm}$$



Gesucht ist die Strecke $\overline{BD}$.

Lösung: Da mit der Strecke $\overline{AC}$ ein Abschnitt auf einer der Parallelen bekannt ist, kommt hier der zweite Strahlensatz zum Einsatz. Die bekannte Strecke $\overline{AB}$ ist jedoch **kein** Strahlenabschnitt, den man für diesen Strahlensatz benötigt, Strahlenabschnitte haben immer den Punkt S als einen Endpunkt. Aus $\overline{SA}$ und $\overline{AB}$ kann jedoch $\overline{SB}$ vorab berechnet werden.

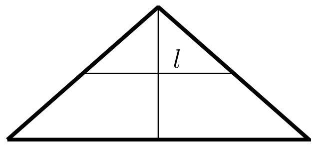
$$\overline{SB} = \overline{SA} + \overline{AB} = 3{,}6\,\text{cm} + 1{,}2\,\text{cm} = 4{,}8\,\text{cm}$$

Der Strahlensatz kann angewendet werden.

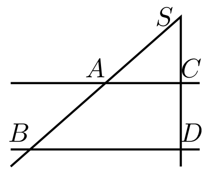
$$\begin{aligned}
\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} &= \frac{\overline{SB}}{\overline{SA}} \\
\frac{\overline{BD}}{2{,}7\,\text{cm}} &= \frac{4{,}8\,\text{cm}}{3{,}6\,\text{cm}} \quad \left|\cdot 2{,}7\,\text{cm}\right. \\
\overline{BD} &= \frac{4{,}8\,\text{cm}}{3{,}6\,\text{cm}} \cdot 2{,}7\,\text{cm} \\
\overline{BD} &= 3{,}6\,\text{cm}
\end{aligned}$$

5.3 Aufgabe 3

Auf einem Dachboden soll Wäsche zum Trocknen aufgehängt werden können. Der Dachboden ist 9,50 Meter breit und in der Mitte 3,80 Meter hoch. Die Wäscheleinen sollen 2 Meter über dem Fußboden waagerecht aufgespannt werden. Welche Länge l hat jede Leine von Haken zu Haken?



Lösung: Zur Lösung wird ein Hilfslinie eingetragen, die die Höhe des Dachbodens darstellt. Jetzt kann z. B. im linken Teildreieck der zweite Strahlensatz angewendet werden. Die beiden Strahlen sind die Höhe des Dachbodens und die Seitenlinie entlang der Dachfläche, die Parallelen sind der Fußboden des Dachbodens und die Wäscheleinenebene.



Bekannt sind die Strecken $\overline{BD}$ als halbe Dachbodenbreite mit $\overline{BD} = 4{,}75\,\text{m}$, die Strecke $\overline{SD}$ als Dachbodenhöhe mit $\overline{SD} = 3{,}80\,\text{m}$ und die Strecke $\overline{CD}$ als Leinenhöhe mit $\overline{CD} = 2{,}00\,\text{m}$.

Schaut man sich die Lage der gegebenen und gesuchten Größen an, dann erkennt man, dass die Strecke $\overline{CD}$ nicht zum zweiten Strahlensatz passt. Es wird jeweils der Abschnitt vom Scheitelpunkt S aus benötigt. Wir müssen also zunächst die Strecke $\overline{SC}$ berechnen.

$$\overline{SC} = \overline{SD} - \overline{CD} = 3{,}8\,\text{m} - 2\,\text{m} = 1{,}8\,\text{m}$$

Damit kann der Strahlensatz angesetzt werden:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} &= \frac{\overline{SC}}{\overline{SD}} \\ \frac{\overline{AC}}{4{,}75\,\text{m}} &= \frac{1{,}8\,\text{m}}{3{,}8\,\text{m}} \qquad\qquad \mid \cdot 4{,}75\,\text{m} \\ \overline{AC} &= \frac{1{,}8\,\text{m}}{3{,}8\,\text{m}} \cdot 4{,}75\,\text{m} \\ \overline{AC} &= 2{,}25\,\text{m} \end{aligned}$$

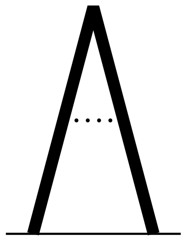
Die Leinenlänge ist aus Symmetriegründen doppelt so groß.

$$l = 2 \cdot \overline{AC} = 2 \cdot 2{,}25\,\text{m} = 4{,}5\,\text{m}$$

Ergebnis: Die Leinen haben eine Länge von 4,50 Meter.

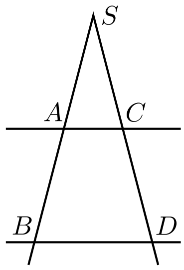
5.4 Aufgabe 4

Eine Stehleiter mit einer Leiterholmlänge von 2,60 Metern wird beim Aufstellen durch eine Kette gesichert. Die Kette soll verhindern, dass die Holmen zu weit auseinander stehen und dadurch wegrutschen können.



Wenn die Leiter so aufgestellt ist, dass die Kette stramm ist, soll der Abstand zwischen den Leiterfüßen 80 Zentimeter betragen. Die Kette ist beidseitig in einem Abstand von 1,43 Metern von den Leiterfüßen entfernt angebracht. Welche Länge muss diese Kette haben?

Lösung: Auch hier zeichne ich zunächst eine mathematische Planfigur, in die nun Bezeichnungen eingetragen werden können.



Da auch Parallelenabschnitte vorkommen (Kettenlänge, Leiterfußabstand), muss der **zweite** Strahlensatz verwendet werden. Wegen der Symmetrie der Leiter kann man beliebig den linken oder rechten Holm verwenden. Für den zweiten Strahlensatz müssen aber beide Abschnitte auf dem **selben** Leiterholm liegen.

Willkürlich wähle ich für die weiteren Rechnungen den **linken** Holm aus. Die Strahlenabschnitte heißen dann $\overline{SA}$ und $\overline{SB}$. Hierbei ist die Strecke $\overline{SA}$ als Leiterholmlänge mit $\overline{SA} = 2{,}6\,\mathrm{m}$ bekannt, die Strecke $\overline{SB}$ muss zunächst noch aus $\overline{SB}$ und $\overline{AB}$ berechnet werden.

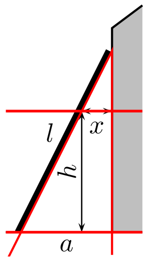
$$\overline{SA} = \overline{SB} - \overline{AB} = 2{,}6\,\mathrm{m} - 1{,}43\,\mathrm{m} = 1{,}17\,\mathrm{m}$$

Damit kann der zweite Strahlensatz angewendet werden:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} &= \frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} \\
\frac{\overline{AC}}{0{,}8\,\mathrm{m}} &= \frac{1{,}17\,\mathrm{m}}{2{,}6\,\mathrm{m}} \qquad \qquad | \cdot 0{,}8\,\mathrm{m} \\
\overline{AC} &= \frac{1{,}17\,\mathrm{m}}{2{,}6\,\mathrm{m}} \cdot 0{,}8\,\mathrm{m} \\
\overline{AC} &= 0{,}36\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

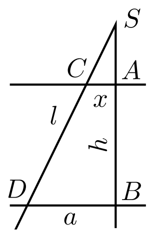
<u>Ergebnis:</u> Die Kette muss 36 Zentimeter lang sein.

5.5 Aufgabe 5



Eine Leiter mit einer Länge von $l = 3{,}90\,\mathrm{m}$ ist an eine Hauswand angelehnt, wie nebenstehend dargestellt. Der Fußpunkt der Leiter hat von der Hauswand einen Abstand von $a = 1{,}50\,\mathrm{m}$. In welcher Höhe h über dem Erdboden beträgt der Abstand x zwischen Leiter und Hauswand genau 50 Zentimeter?

Lösung: Zunächst sollte die Skizze zu einem Zweistrahl mit geschnittenen Parallelen ergänzt werden. Die dazu gehörenden Linien wurden hier in Rot eingetragen.



Wegen der besseren Übersichtlichkeit und damit Punktebezeichnungen eingetragen werden können, habe ich den Zweistrahl nun nebenstehend noch einmal als Struktur dargestellt.

Mit x und a sind zwei Parallelenabschnitte bekannt. Da nur im **zweiten** Strahlensatz Parallelenabschnitte vorkommen, muss dieser hier zum Einsatz kommen. Schaut man sich den zweiten Strahlensatz genau an, dann stellt man schnell fest, dass hier nur die Abschnitte auf **einem einzigen** Strahl vorkommen. Leider liegen die Leiterlänge l (Strecke $\overline{SD}$) und die gesuchte Höhe h (Strecke $\overline{AB}$) auf **verschiedenen** Strahlen. Man kann jedoch über das Rechtwinklige Dreieck ΔSBD aus a und l die Strecke $\overline{SB}$ mit Hilfe des Satzes des Pythagoras[3] ausrechnen.

$$\begin{aligned}
(\overline{SB})^2 + a^2 &= l^2 \\
(\overline{SB})^2 + (1{,}5\,\mathrm{m})^2 &= (3{,}9\,\mathrm{m})^2 && |-(1{,}5\,\mathrm{m})^2 \\
(\overline{SB})^2 &= 15{,}21\,\mathrm{m}^2 - 2{,}25\,\mathrm{m}^2 && |\sqrt{} \\
(\overline{SB}) &= \sqrt{12{,}96\,\mathrm{m}^2} \\
(\overline{SB}) &= 3{,}6\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

Mit dem zweiten Strahlensatz kann nun nicht direkt die Höhe h berechnet werden, weil h kein Strahlenabschnitt ist. Es muss zunächst die Strecke $\overline{SA}$ berechnet werden.

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{SA}}{x} &= \frac{\overline{SB}}{a} \\
\frac{\overline{SA}}{0{,}5\,\mathrm{m}} &= \frac{3{,}6\,\mathrm{m}}{1{,}5\,\mathrm{m}} \\
\frac{\overline{SA}}{0{,}5\,\mathrm{m}} &= 2{,}4 && |\cdot 0{,}5\,\mathrm{m} \\
\overline{SA} &= 1{,}2\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

[3]Einzelheiten zum Satz des Pythagoras siehe hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/pythagoras.pdf

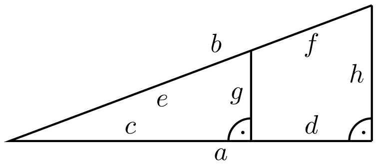
Die gesuchte Höhe h kann nun einfach über die Längendifferenz zwischen $\overline{SB}$ und $\overline{SA}$ berechnet werden.

$$h = \overline{SB} - \overline{SA} = 3{,}6\,\mathrm{m} - 1{,}2\,\mathrm{m} = 2{,}4\,\mathrm{m}$$

Ergebnis: In einem Abstand von 50 Zentimetern von der Wand ist die Leiter 2,40 Meter hoch.

5.6 Aufgabe 6

Gemäß nebenstehender Planfigur sind folgende Größen bekannt:



$$\begin{aligned} a &= 18\,\text{cm} \\ d &= 6\,\text{cm} \\ g &= 5\,\text{cm} \end{aligned}$$

Die Strecken g und h sind zueinander parallel, a mit h sowie c mit g bilden jeweils einen Rechten Winkel.

Berechnen Sie alle übrigen Strecken b, c, e, f und h. Wählen Sie bei der Berechnung eine sinnvolle Reihenfolge.

Lösung: Mit der bekannten Strecke g ist ein Parallelenabschnitt bekannt. Da Parallelenabschnitte nur im **zweiten** Strahlensatz vorkommen, kommt dieser zur Anwendung.

Im zweiten Strahlensatz kommen neben den Parallelenabschnitten nur die Strahlenabschnitte auf **einem der beiden** Strahlen vor. Die gegebenen Strecken a und d liegen beide auf dem unteren Strahl. Hierbei ist a der zu h gehörige Strahlenabschnitt, zu g gehört der Strahlenabschnitt c. Dieser ist noch nicht bekannt, kann aber leicht aus a und d berechnet werden.

$$c = a - d = 18\,\text{cm} - 6\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$$

Nun kann mit Hilfe des zweiten Strahlensatzes die Strecke h berechnet werden.

$$\begin{aligned} \frac{h}{g} &= \frac{a}{c} \\ \frac{h}{5\,\text{cm}} &= \frac{18\,\text{cm}}{12\,\text{cm}} \\ \frac{h}{5\,\text{cm}} &= 1{,}5 \qquad | \cdot 5\,\text{cm} \\ h &= 7{,}5\,\text{cm} \end{aligned}$$

Es fehlen noch die Strecke b, e und f. Diese liegen alle auf dem anderen Strahl. Ein Strahlensatz hilft hier nicht weiter, weil dann im Ansatz immer **zwei** unbekannte Größen vorkämen.

Bei genauerer Betrachtung kann man jedoch zwei **Rechtwinklige Dreiecke** erkennen, nämlich die Dreiecke bestehend aus a, h und b sowie aus c, g und e. In beiden gibt es nur eine Seite, die nicht bekannt ist. Der **Satz des Pythagoras** hilft hier weiter.

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + h^2 \\ &= (18\,\text{cm})^2 + (7{,}5\,\text{cm})^2 \\ &= 324\,\text{cm}^2 + 56{,}25\,\text{cm}^2 \\ &= 380{,}25\,\text{cm}^2 \qquad |\sqrt{} \\ b &= 19{,}5\,\text{cm} \end{aligned}$$

Die Strecke e kann nun ebenfalls mit dem Satz des Pythagoras, aber auch mit einem der beiden Strahlensätze ermittelt werden.

Lösungsvariante 1: Satz des Pythagoras

$$\begin{aligned} e^2 &= c^2 + g^2 \\ &= (12\,\text{cm})^2 + (5\,\text{cm})^2 \\ &= 144\,\text{cm}^2 + 25\,\text{cm}^2 \\ &= 169\,\text{cm}^2 \qquad \left|\sqrt{}\right. \\ e &= 13\,\text{cm} \end{aligned}$$

Lösungsvariante 2: Erster Strahlensatz

$$\begin{aligned} \frac{e}{c} &= \frac{b}{a} \\ \frac{e}{12\,\text{cm}} &= \frac{19{,}5\,\text{cm}}{18\,\text{cm}} \qquad \left|\cdot 12\,\text{cm}\right. \\ e &= \frac{19{,}5\,\text{cm}}{18\,\text{cm}} \cdot 12\,\text{cm} \\ e &= 13\,\text{cm} \end{aligned}$$

Lösungsvariante 3: Zweiter Strahlensatz

$$\begin{aligned} \frac{e}{g} &= \frac{b}{h} \\ \frac{e}{5\,\text{cm}} &= \frac{19{,}5\,\text{cm}}{7{,}5\,\text{cm}} \\ \frac{e}{5\,\text{cm}} &= 2{,}6 \qquad \left|\cdot 5\,\text{cm}\right. \\ e &= 13\,\text{cm} \end{aligned}$$

Als letzte Größe feht nur noch f. Die kann leicht aus b und e berechnet werden.

$$f = b - e = 19{,}5\,\text{cm} - 13\,\text{cm} = 6{,}5\,\text{cm}$$

Zusammenfassung der Ergebnisse:

$$\boxed{b = 19{,}5\,\text{cm} \qquad c = 12\,\text{cm} \qquad e = 13\,\text{cm} \qquad f = 6{,}5\,\text{cm} \qquad h = 7{,}5\,\text{cm}}$$