Die Strahlensätze

Wolfgang Kippels

20. März 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Grundlagen

2.1 Grundlegende Definitionen

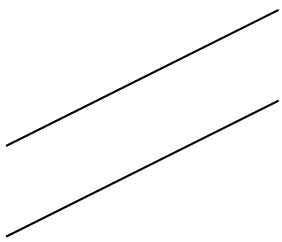
Strecken sind gerade Linien mit einem Anfangspunkt und einem Endpunkt. Ein 100-Meter-Lauf findet auf einer Strecke statt. Die Endpunkte sind dabei Start und Ziel.

Strahlen sind gerade Linien, die einen Anfangspunkt, aber keinen Endpunkt haben. Man kann sich dazu den Lichtstrahl aus einer Taschenlampe vorstellen, den man Richtung Himmel schickt.

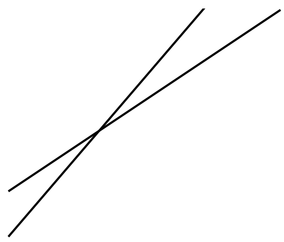
Geraden sind gerade Linien, die weder einen Anfangspunkt noch einen Endpunkt haben. Ein praktisches Beispiel dazu kann ich nicht angeben. Meist handelt es sich um gedachte Linien, die nur durch ihre Lage irgendwo eine Orientierung geben sollen. Die Richtschnur eines Maurers wäre eine solche Gerade, wenn man dabei davon absieht, dass die Richtschnur dennoch an beiden Enden befestigt ist.

2.2 Eigenschaften von Geraden

Geraden in einer Ebene (beispielsweise in der Zeichenebene) sind entweder **parallel** oder sie **schneiden sich** irgendwo.[1] Sind sie parallel, dann haben sie überall den gleichen Abstand voneinander.



parallele Geraden



sich schneidende Geraden

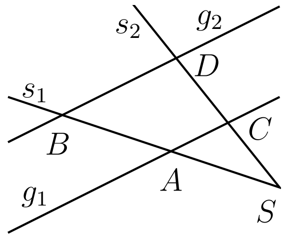
Etwas anders sieht es im dreidimensionalen Raum aus. Hier kann es nicht nur sein, dass die Geraden sich schneiden oder parallel sind, sie können auch **windschief**[2] zueinander liegen. Man kann sich die Lage beispielsweise in einem Zimmer vorstellen, wo eine Gerade auf dem Fußboden verläuft und die andere sich in der Ebene der Zimmerdecke befindet. Wenn sie nicht zufällig parallel sind, dann sind sie windschief. Sie schneiden sich nirgendwo.

[1] Der Schnittpunkt der Geraden kann natürlich auch außerhalb eines Papierblattes liegen, auf das sie gezeichnet sind.

[2] „Windschief“ ist tatsächlich ein mathematischer Fachausdruck!

3 Die Lehrsätze

Nebenstehend ist ein sogenannter „Zweistrahl“ mit zwei parallelen Geraden dargestellt. Die beiden Strahlen heißen s_1 und s_2. Der gemeinsame Startpunkt der beiden Strahlen ist der Punkt S. Diese beiden Strahlen werden von den beiden **parallelen** Geraden g_1 und g_2 geschnitten. Die Schnittpunkte der Geraden sind die eingetragenen Punkte A, B, C und D.



Das nebenstehende Bild ist die Planfigur für beide Strahlensätze.

3.1 Der erste Strahlensatz

Der **erste** Strahlensatz beschäftigt sich nur mit den Abschnitten auf den beiden Strahlen. Er lautet:

> ***Die Verhältnisse der Abschnitte auf dem einen Strahl sind gleich der Verhältnisse der entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl.***

Hierbei ist zunächst zu klären, was *entsprechenden* bedeutet. Dazu sehen wir uns die Planskizze an. Der Strecke $\overline{SA}$ auf dem Strahl s_1 entspricht der Strecke $\overline{SC}$ auf dem Strahl s_2, der Strecke $\overline{SB}$ auf dem Strahl s_1 entspricht der Strecke $\overline{SD}$ auf dem Strahl s_2, und der Strecke $\overline{AB}$ auf dem Strahl s_1 entspricht der Strecke $\overline{CD}$ auf dem Strahl s_2.

Jetzt kann man zum ersten Strahlensatz drei passende Verhältnisse aufstellen:

$$\boxed{\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SD}}} \text{ oder: } \boxed{\frac{\overline{SA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{CD}}} \text{ oder: } \boxed{\frac{\overline{SB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SD}}{\overline{CD}}}$$

Alle drei Formel stellen den ersten Strahlensatz dar.

3.2 Der zweite Strahlensatz

Der **zweite** Strahlensatz verknüpft die Abschnitte auf den beiden parallelen Geraden mit den Abschnitten auf einem der Strahlen. Er lautet:

> ***Das Verhältnis der Abschnitte auf den Parallelen ist gleich dem Verhältnis der* zugehörigen *Strahlenabschnitte auf* einem *Strahl.***

Hierbei ist es wichtig zu wissen, was genau mit den **Strahlenabschnitten** gemeint ist. Es geht dabei immer um die jeweilige Strecke **zwischen dem gemeinsamen Punkt S der beiden Strahlen und dem jeweiligen Schnittpunkt** mit einer der beiden Geraden.

Weil der zweite Strahlensatz mit dem einen oder anderen Strahl aufgestellt werden, haben wir zwei Formeln, die diesen Strahlensatz repräsentieren:

$$\boxed{\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SB}}} \text{ oder: } \boxed{\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SD}}}$$

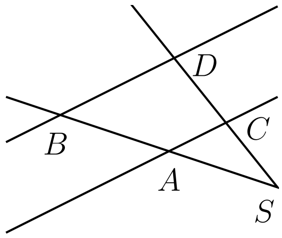
4 Aufgaben

4.1 Aufgabe 1

Gemäß nebenstehender Planskizze sind folgende Größen bekannt:

$$\overline{SA} = 3\,\text{cm} \quad \overline{AB} = 2\,\text{cm} \quad \overline{SC} = 4{,}5\,\text{cm}$$

Gesucht ist die Strecke $\overline{CD}$.

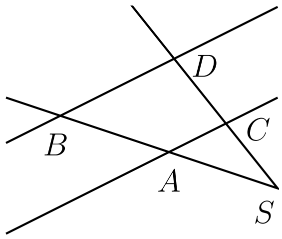


4.2 Aufgabe 2

Gemäß nebenstehender Planskizze sind folgende Größen bekannt:

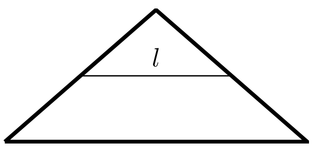
$$\overline{SA} = 3{,}6\,\text{cm} \quad \overline{AB} = 1{,}2\,\text{cm} \quad \overline{AC} = 2{,}7\,\text{cm}$$

Gesucht ist die Strecke $\overline{BD}$.



4.3 Aufgabe 3

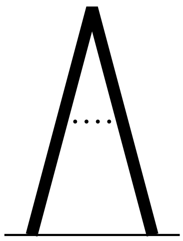
Auf einem Dachboden soll Wäsche zum Trocknen aufgehängt werden können. Der Dachboden ist 9,50 Meter breit und in der Mitte 3,80 Meter hoch. Die Wäscheleinen sollen 2 Meter über dem Fußboden waagerecht aufgespannt werden. Welche Länge l hat jede Leine von Haken zu Haken?



4.4 Aufgabe 4

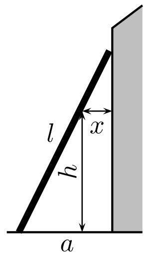
Eine Stehleiter mit einer Leiterholmlänge von 2,60 Metern wird beim Aufstellen durch eine Kette gesichert. Die Kette soll verhindern, dass die Holmen zu weit auseinander stehen und dadurch wegrutschen können.

Wenn die Leiter so aufgestellt ist, dass die Kette stramm ist, soll der Abstand zwischen den Leiterfüßen 80 Zentimeter betragen. Die Kette ist beidseitig in einem Abstand von 1,43 Metern von den Leiterfüßen entfernt angebracht. Welche Länge muss diese Kette haben?



4.5 Aufgabe 5

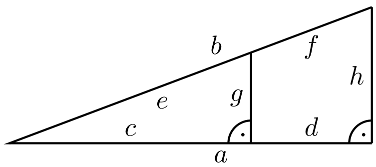
Eine Leiter mit einer Länge von $l = 3{,}90\,\mathrm{m}$ ist an eine Hauswand angelehnt, wie nebenstehend dargestellt. Der Fußpunkt der Leiter hat von der Hauswand einen Abstand von $a = 1{,}50\,\mathrm{m}$. In welcher Höhe h über dem Erdboden beträgt der Abstand x zwischen Leiter und Hauswand genau 50 Zentimeter?



4.6 Aufgabe 6

Gemäß nebenstehender Planfigur sind folgende Größen bekannt:

$$a = 18\,\mathrm{cm}$$
$$d = 6\,\mathrm{cm}$$
$$g = 5\,\mathrm{cm}$$



Die Strecken g und h sind zueinander parallel, a mit h sowie c mit g bilden jeweils einen Rechten Winkel.

Berechnen Sie alle übrigen Strecken b, c, e, f und h. Wählen Sie bei der Berechnung eine sinnvolle Reihenfolge.

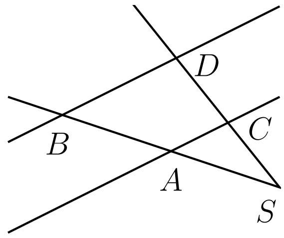
5 Lösungen der Aufgaben

5.1 Aufgabe 1

Gemäß nebenstehender Planskizze sind folgende Größen bekannt:

$$\overline{SA} = 3\,\text{cm} \quad \overline{AB} = 2\,\text{cm} \quad \overline{SC} = 4{,}5\,\text{cm}$$

Gesucht ist die Strecke $\overline{CD}$.



Lösung: Hier hilft der erste Strahlensatz weiter.

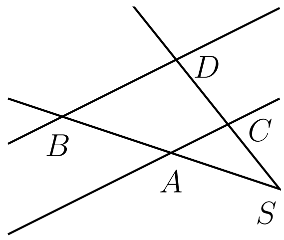
$$\begin{aligned}
\frac{\overline{SA}}{\overline{AB}} &= \frac{\overline{SC}}{\overline{CD}} \\
\frac{3\,\text{cm}}{2\,\text{cm}} &= \frac{4{,}5\,\text{cm}}{\overline{CD}} \\
1{,}5 &= \frac{4{,}5\,\text{cm}}{\overline{CD}} \quad |\cdot \overline{CD} \\
1{,}5 \cdot \overline{CD} &= 4{,}5\,\text{cm} \quad |:1{,}5 \\
\overline{CD} &= 3\,\text{cm}
\end{aligned}$$

5.2 Aufgabe 2

Gemäß nebenstehender Planskizze sind folgende Größen bekannt:

$$\overline{SA} = 3{,}6\,\text{cm} \quad \overline{AB} = 1{,}2\,\text{cm} \quad \overline{AC} = 2{,}7\,\text{cm}$$

Gesucht ist die Strecke $\overline{BD}$.



Lösung: Da mit der Strecke $\overline{AC}$ ein Abschnitt auf einer der Parallelen bekannt ist, kommt hier der zweite Strahlensatz zum Einsatz. Die bekannte Strecke $\overline{AB}$ ist jedoch **kein** Strahlenabschnitt, den man für diesen Strahlensatz benötigt, Strahlenabschnitte haben immer den Punkt S als einen Endpunkt. Aus $\overline{SA}$ und $\overline{AB}$ kann jedoch $\overline{SB}$ vorab berechnet werden.

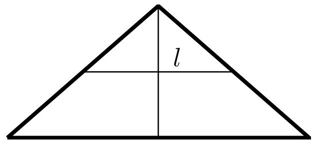
$$\overline{SB} = \overline{SA} + \overline{AB} = 3{,}6\,\text{cm} + 1{,}2\,\text{cm} = 4{,}8\,\text{cm}$$

Der Strahlensatz kann angewendet werden.

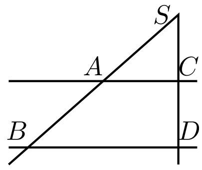
$$\begin{aligned}
\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} &= \frac{\overline{SB}}{\overline{SA}} \\
\frac{\overline{BD}}{2{,}7\,\text{cm}} &= \frac{4{,}8\,\text{cm}}{3{,}6\,\text{cm}} \quad |\cdot 2{,}7\,\text{cm} \\
\overline{BD} &= \frac{4{,}8\,\text{cm}}{3{,}6\,\text{cm}} \cdot 2{,}7\,\text{cm} \\
\overline{BD} &= 3{,}6\,\text{cm}
\end{aligned}$$

5.3 Aufgabe 3

Auf einem Dachboden soll Wäsche zum Trocknen aufgehängt werden können. Der Dachboden ist 9,50 Meter breit und in der Mitte 3,80 Meter hoch. Die Wäscheleinen sollen 2 Meter über dem Fußboden waagerecht aufgespannt werden. Welche Länge l hat jede Leine von Haken zu Haken?



Lösung: Zur Lösung wird ein Hilfslinie eingetragen, die die Höhe des Dachbodens darstellt. Jetzt kann z. B. im linken Teildreieck der zweite Strahlensatz angewendet werden. Die beiden Strahlen sind die Höhe des Dachbodens und die Seitenlinie entlang der Dachfläche, die Parallelen sind der Fußboden des Dachbodens und die Wäscheleinenebene.



Bekannt sind die Strecken $\overline{BD}$ als halbe Dachbodenbreite mit $\overline{BD} = 4{,}75\,\mathrm{m}$, die Strecke $\overline{SD}$ als Dachbodenhöhe mit $\overline{SD} = 3{,}80\,\mathrm{m}$ und die Strecke $\overline{CD}$ als Leinenhöhe mit $\overline{CD} = 2{,}00\,\mathrm{m}$.

Schaut man sich die Lage der gegebenen und gesuchten Größen an, dann erkennt man, dass die Strecke $\overline{CD}$ nicht zum zweiten Strahlensatz passt. Es wird jeweils der Abschnitt vom Scheitelpunkt S aus benötigt. Wir müssen also zunächst die Strecke $\overline{SC}$ berechnen.

$$\overline{SC} = \overline{SD} - \overline{CD} = 3{,}8\,\mathrm{m} - 2\,\mathrm{m} = 1{,}8\,\mathrm{m}$$

Damit kann der Strahlensatz angesetzt werden:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} &= \frac{\overline{SC}}{\overline{SD}} \\
\frac{\overline{AC}}{4{,}75\,\mathrm{m}} &= \frac{1{,}8\,\mathrm{m}}{3{,}8\,\mathrm{m}} \qquad \mid \cdot 4{,}75\,\mathrm{m} \\
\overline{AC} &= \frac{1{,}8\,\mathrm{m}}{3{,}8\,\mathrm{m}} \cdot 4{,}75\,\mathrm{m} \\
\overline{AC} &= 2{,}25\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

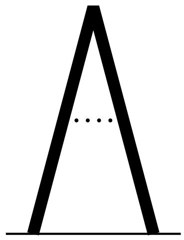
Die Leinenlänge ist aus Symmetriegründen doppelt so groß.

$$l = 2 \cdot \overline{AC} = 2 \cdot 2{,}25\,\mathrm{m} = 4{,}5\,\mathrm{m}$$

<u>Ergebnis:</u> Die Leinen haben eine Länge von 4,50 Meter.

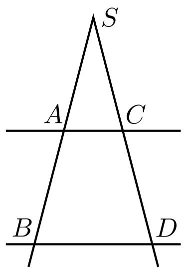
5.4 Aufgabe 4

Eine Stehleiter mit einer Leiterholmlänge von 2,60 Metern wird beim Aufstellen durch eine Kette gesichert. Die Kette soll verhindern, dass die Holmen zu weit auseinander stehen und dadurch wegrutschen können.



Wenn die Leiter so aufgestellt ist, dass die Kette stramm ist, soll der Abstand zwischen den Leiterfüßen 80 Zentimeter betragen. Die Kette ist beidseitig in einem Abstand von 1,43 Metern von den Leiterfüßen entfernt angebracht. Welche Länge muss diese Kette haben?

Lösung: Auch hier zeichne ich zunächst eine mathematische Planfigur, in die nun Bezeichnungen eingetragen werden können.



Da auch Parallelenabschnitte vorkommen (Kettenlänge, Leiterfußabstand), muss der **zweite** Strahlensatz verwendet werden. Wegen der Symmetrie der Leiter kann man beliebig den linken oder rechten Holm verwenden. Für den zweiten Strahlensatz müssen aber beide Abschnitte auf dem **selben** Leiterholm liegen.

Willkürlich wähle ich für die weiteren Rechnungen den **linken** Holm aus. Die Strahlenabschnitte heißen dann $\overline{SA}$ und $\overline{SB}$. Hierbei ist die Strecke $\overline{SA}$ als Leiterholmlänge mit $\overline{SA} = 2{,}6\,\mathrm{m}$ bekannt, die Strecke $\overline{SB}$ muss zunächst noch aus $\overline{SB}$ und $\overline{AB}$ berechnet werden.

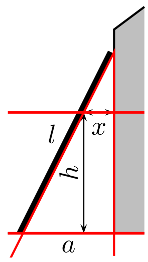
$$\overline{SA} = \overline{SB} - \overline{AB} = 2{,}6\,\mathrm{m} - 1{,}43\,\mathrm{m} = 1{,}17\,\mathrm{m}$$

Damit kann der zweite Strahlensatz angewendet werden:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} &= \frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} \\
\frac{\overline{AC}}{0{,}8\,\mathrm{m}} &= \frac{1{,}17\,\mathrm{m}}{2{,}6\,\mathrm{m}} \qquad | \cdot 0{,}8\,\mathrm{m} \\
\overline{AC} &= \frac{1{,}17\,\mathrm{m}}{2{,}6\,\mathrm{m}} \cdot 0{,}8\,\mathrm{m} \\
\overline{AC} &= 0{,}36\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

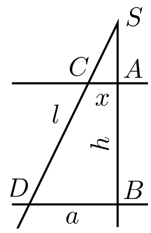
<u>Ergebnis:</u> Die Kette muss 36 Zentimeter lang sein.

5.5 Aufgabe 5



Eine Leiter mit einer Länge von $l = 3{,}90\,\text{m}$ ist an eine Hauswand angelehnt, wie nebenstehend dargestellt. Der Fußpunkt der Leiter hat von der Hauswand einen Abstand von $a = 1{,}50\,\text{m}$. In welcher Höhe h über dem Erdboden beträgt der Abstand x zwischen Leiter und Hauswand genau 50 Zentimeter?

Lösung: Zunächst sollte die Skizze zu einem Zweistrahl mit geschnittenen Parallelen ergänzt werden. Die dazu gehörenden Linien wurden hier in Rot eingetragen.



Wegen der besseren Übersichtlichkeit und damit Punktebezeichnungen eingetragen werden können, habe ich den Zweistrahl nun nebenstehend noch einmal als Struktur dargestellt.

Mit x und a sind zwei Parallelenabschnitte bekannt. Da nur im **zweiten** Strahlensatz Parallelenabschnitte vorkommen, muss dieser hier zum Einsatz kommen. Schaut man sich den zweiten Strahlensatz genau an, dann stellt man schnell fest, dass hier nur die Abschnitte auf **einem einzigen** Strahl vorkommen. Leider liegen die Leiterlänge l (Strecke $\overline{SD}$) und die gesuchte Höhe h (Strecke $\overline{AB}$) auf **verschiedenen** Strahlen. Man kann jedoch über das Rechtwinklige Dreieck ΔSBD aus a und l die Strecke $\overline{SB}$ mit Hilfe des Satzes des Pythagoras[3] ausrechnen.

$$
\begin{aligned}
(\overline{SB})^2 + a^2 &= l^2 && \\
(\overline{SB})^2 + (1{,}5\,\text{m})^2 &= (3{,}9\,\text{m})^2 && |-(1{,}5\,\text{m})^2 \\
(\overline{SB})^2 &= 15{,}21\,\text{m}^2 - 2{,}25\,\text{m}^2 && |\sqrt{\ } \\
(\overline{SB}) &= \sqrt{12{,}96\,\text{m}^2} && \\
(\overline{SB}) &= 3{,}6\,\text{m} &&
\end{aligned}
$$

Mit dem zweiten Strahlensatz kann nun nicht direkt die Höhe h berechnet werden, weil h kein Strahlenabschnitt ist. Es muss zunächst die Strecke $\overline{SA}$ berechnet werden.

$$
\begin{aligned}
\frac{\overline{SA}}{x} &= \frac{\overline{SB}}{a} && \\
\frac{\overline{SA}}{0{,}5\,\text{m}} &= \frac{3{,}6\,\text{m}}{1{,}5\,\text{m}} && \\
\frac{\overline{SA}}{0{,}5\,\text{m}} &= 2{,}4 && |\cdot 0{,}5\,\text{m} \\
\overline{SA} &= 1{,}2\,\text{m} &&
\end{aligned}
$$

[3]Einzelheiten zum Satz des Pythagoras siehe hier:
http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/pythagoras.pdf

Die gesuchte Höhe h kann nun einfach über die Längendifferenz zwischen $\overline{SB}$ und $\overline{SA}$ berechnet werden.

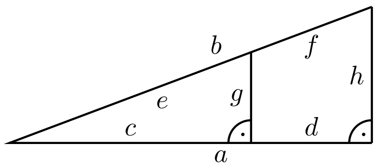
$$h = \overline{SB} - \overline{SA} = 3{,}6\,\mathrm{m} - 1{,}2\,\mathrm{m} = 2{,}4\,\mathrm{m}$$

Ergebnis: In einem Abstand von 50 Zentimetern von der Wand ist die Leiter 2,40 Meter hoch.

5.6 Aufgabe 6

Gemäß nebenstehender Planfigur sind folgende Größen bekannt:

$$a = 18\,\text{cm}$$
$$d = 6\,\text{cm}$$
$$g = 5\,\text{cm}$$



Die Strecken g und h sind zueinander parallel, a mit h sowie c mit g bilden jeweils einen Rechten Winkel.

Berechnen Sie alle übrigen Strecken b, c, e, f und h. Wählen Sie bei der Berechnung eine sinnvolle Reihenfolge.

Lösung: Mit der bekannten Strecke g ist ein Parallelenabschnitt bekannt. Da Parallelenabschnitte nur im **zweiten** Strahlensatz vorkommen, kommt dieser zur Anwendung.

Im zweiten Strahlensatz kommen neben den Parallelenabschnitten nur die Strahlenabschnitte auf **einem der beiden** Strahlen vor. Die gegebenen Strecken a und d liegen beide auf dem unteren Strahl. Hierbei ist a der zu h gehörige Strahlenabschnitt, zu g gehört der Strahlenabschnitt c. Dieser ist noch nicht bekannt, kann aber leicht aus a und d berechnet werden.

$$c = a - d = 18\,\text{cm} - 6\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$$

Nun kann mit Hilfe des zweiten Strahlensatzes die Strecke h berechnet werden.

$$\begin{aligned}
\frac{h}{g} &= \frac{a}{c} \\
\frac{h}{5\,\text{cm}} &= \frac{18\,\text{cm}}{12\,\text{cm}} \\
\frac{h}{5\,\text{cm}} &= 1{,}5 \qquad | \cdot 5\,\text{cm} \\
h &= 7{,}5\,\text{cm}
\end{aligned}$$

Es fehlen noch die Strecke b, e und f. Diese liegen alle auf dem anderen Strahl. Ein Strahlensatz hilft hier nicht weiter, weil dann im Ansatz immer **zwei** unbekannte Größen vorkämen.

Bei genauerer Betrachtung kann man jedoch zwei **Rechtwinklige Dreiecke** erkennen, nämlich die Dreiecke bestehend aus a, h und b sowie aus c, g und e. In beiden gibt es nur eine Seite, die nicht bekannt ist. Der **Satz des Pythagoras** hilft hier weiter.

$$\begin{aligned}
b^2 &= a^2 + h^2 \\
&= (18\,\text{cm})^2 + (7{,}5\,\text{cm})^2 \\
&= 324\,\text{cm}^2 + 56{,}25\,\text{cm}^2 \\
&= 380{,}25\,\text{cm}^2 \qquad |\sqrt{\ } \\
b &= 19{,}5\,\text{cm}
\end{aligned}$$

Die Strecke e kann nun ebenfalls mit dem Satz des Pythagoras, aber auch mit einem der beiden Strahlensätze ermittelt werden.

Lösungsvariante 1: Satz des Pythagoras

$$\begin{aligned}
e^2 &= c^2 + g^2 \\
&= (12\,\text{cm})^2 + (5\,\text{cm})^2 \\
&= 144\,\text{cm}^2 + 25\,\text{cm}^2 \\
&= 169\,\text{cm}^2 \qquad\qquad |\sqrt{\ } \\
e &= 13\,\text{cm}
\end{aligned}$$

Lösungsvariante 2: Erster Strahlensatz

$$\begin{aligned}
\frac{e}{c} &= \frac{b}{a} \\
\frac{e}{12\,\text{cm}} &= \frac{19{,}5\,\text{cm}}{18\,\text{cm}} \qquad\qquad |\cdot 12\,\text{cm} \\
e &= \frac{19{,}5\,\text{cm}}{18\,\text{cm}} \cdot 12\,\text{cm} \\
e &= 13\,\text{cm}
\end{aligned}$$

Lösungsvariante 3: Zweiter Strahlensatz

$$\begin{aligned}
\frac{e}{g} &= \frac{b}{h} \\
\frac{e}{5\,\text{cm}} &= \frac{19{,}5\,\text{cm}}{7{,}5\,\text{cm}} \\
\frac{e}{5\,\text{cm}} &= 2{,}6 \qquad\qquad |\cdot 5\,\text{cm} \\
e &= 13\,\text{cm}
\end{aligned}$$

Als letzte Größe feht nur noch f. Die kann leicht aus b und e berechnet werden.

$$f = b - e = 19{,}5\,\text{cm} - 13\,\text{cm} = 6{,}5\,\text{cm}$$

Zusammenfassung der Ergebnisse:

$$\boxed{b = 19{,}5\,\text{cm} \qquad c = 12\,\text{cm} \qquad e = 13\,\text{cm} \qquad f = 6{,}5\,\text{cm} \qquad h = 7{,}5\,\text{cm}}$$