

Grundlagen der Stochastik

Wolfgang Kippels

18. März 2019

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	2
2	Einführung	3
3	Wichtige Begriffe	3
3.1	Ereignis und Ergebnis	3
3.2	Warscheinlichkeit	4
4	Zufallsexperimente	6
4.1	Umfang der Stichprobe	6
4.2	Häufigkeit	6
5	Ereignisbaum	7
5.1	Einstufige Experimente	7
5.2	Mehrstufige Experimente	8
5.3	Unterschiedliche Warscheinlichkeiten	11
5.4	Abhängige Warscheinlichkeiten	12
6	Erwartungswert	15
6.1	Erwartungswert im Bernulli-Experiment	15
6.2	Erwartungswert bei abhängiger Warscheinlichkeit	16
7	Beispiele	17
7.1	Beispiel 1	17
8	Lösungen der Beispiele	18
8.1	Beispiel 1	18

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Einführung

Manchmal passieren Ereignisse in der Welt zufällig. Das ist mathematisch nicht vorhersehbar. Trotzdem versucht man in der Mathematik, auch den Zufall mit mathematischen Methoden zu beschreiben. Dabei geht es aber nie darum, zufällige Ereignisse in der Zukunft **vorherzusagen**, sondern nur eine Aussage über die **Warscheinlichkeit** bestimmter Ereignisse zu machen. Das nennt der Mathematiker dann **Warscheinlichkeitsrechnung** oder mit einem Fremdwort **Stochastik**. Ein Beispiel aus dem praktischen Leben soll das verdeutlichen.

Mit einer Haftpflichtversicherung kann ich mich gegen Missgeschicke bei einer Versicherungsgesellschaft versichern. Das bedeutet zwar nicht, dass die Versicherungsgesellschaft dafür sorgt, dass mir kein Missgeschick passiert, aber sie bezahlt den Schaden, den ich dabei anrichte.¹ Ob mir ein soches Missgeschick passiert oder nicht, ist vom Zufall abhängig und von mir (fast) nicht zu beeinflussen. Dabei kann der Schaden, den ich schuldhaft verursache, durchaus in die Millionen gehen. Trotzdem verlangt die Versicherungsgesellschaft von mir nur einen zwei- oder dreistelligen Jahresbeitrag. Warum kann sie das? Reine Menschenfreundlichkeit ist das sicher nicht.

Die Versicherungsgesellschaft rechnet mit der **Warscheinlichkeit**, mit der mir ein teures Missgeschick passiert. Hat sie hinreichend viele Kunden, dann werden in aller Regel die Einnahmen von allen Kunden zur Deckung der Schäden ausreichen, die nur einige wenige verursachen. **Wer** genau die Schäden verursacht, ist den Versicherern herzlich egal, sie interessieren sich nur dafür, **wieviele** das ungefähr sein werden. Hierbei helfen ihnen die Methoden der Stochastik.

3 Wichtige Begriffe

3.1 Ereignis und Ergebnis

Die ersten Begriffe sind das **Ereignis** und das **Ergebnis**. Unter einem *Ereignis* versteht man einen Vorgang, der zu unterschiedlichen *Ergebnissen* führen kann. Das Werfen einer Münze als *Ereignis* mit den *Ergebnissen* Kopf oder Zahl, oder das Würfeln mit einem Würfel als *Ereignis* mit den *Ergebnissen* 1 ... 6 kann hier als Beispiel dienen. Auch die Ziehung der Lottozahlen in einer Lostrommel ist ein solches *Ereignis*. Das *Ergebnis* wären die 7 gezogenen Zahlen oder je nach der Fragestellung auch mein Gewinn (meist leider nur 0€).

Wenn das Ergebnis in einer Formel auftaucht, dann wird dafür gern das Formelzeichen *e* verwendet. Solche Zusammenhänge werden aber erst etwas später in diesem Artikel deutlich.

¹Die Einzelheiten regeln die Versicherungsbestimmungen des jeweiligen Vertrages, das steht hier aber nicht zur Debatte.

3.2 Warscheinlichkeit

Der nächste wichtige Begriff ist die **Warscheinlichkeit** mit dem Formelzeichen P (*englisch*: Possibility). Sie wird üblicherweise als Verhältniszahl (als Bruch) oder manchmal auch in Prozent angegeben. Wenn alle Ergebnisse gleich warscheinlich sind,² dann lässt sich die Warscheinlichkeit so definieren:

$$P = \frac{\text{Zahl der } \mathbf{günstigen} \text{ Ereignisse}}{\text{Zahl der } \mathbf{möglichen} \text{ Ereignisse}}$$

Nehmen wir den Wurf einer Münze als Beispiel, dann gibt es zwei **mögliche** Ergebnisse: **Kopf** oder **Zahl**. Davon stellt eins das **günstige** Ergebnis dar, je nachdem, was vorher vereinbart wurde. Suchen wir die Warscheinlichkeit dafür, dass die Münze nach dem Wurf mit der Zahl nach oben liegen bleibt, erhält man:

$$P = \frac{1}{2} = 50\%$$

Man kann auch sagen: Bei durchschnittlich jedem zweiten Wurf bleibt die Münze mit der Zahl nach oben liegen.

Die gleiche Warscheinlichkeit gilt natürlich auch für den Fall, dass die Münze bei „Kopf“ liegen bleiben soll. Der theoretisch denkbare Fall, dass die Münze auf einer Kante stehen bleibt, wird dabei vernachlässigt. Die menschliche Erfahrung zeigt, dass dieser Fall eben extrem unwarscheinlich ist.

Beim Würfeln mit einem klassischen hexaederförmigen Würfel³ gibt es die Zahlen von 1 bis 6 als Ergebnis, also 6 mögliche Ergebnisse. Für jede würfelbare Augenzahl ist dann die Warscheinlichkeit:

$$P = \frac{1}{6} \approx 16,7\%$$

Man kann auch sagen: Bei durchschnittlich jedem sechsten Wurf würfele ich beispielsweise eine 3.

²Bei gleich warscheinlichen Ergebnissen spricht man von einem **Bernulli-Experiment**.

³Das ist ein Würfel mit 6 gleichgroßen Quadraten als Seitenflächen.

Wichtig ist hierbei natürlich, dass der Würfel tatsächlich in jeder Richtung symmetrisch ist. Sind etwa die Quadrate mit der 1 und der 6 (die liegen auf gegenüberliegenden Seiten) größer, als die anderen Würfelflächen, ist also der „Würfel“ nur ein Quader, dann wird er seltener auf den rechteckigen Seitenflächen mit 2, 3, 4 und 5 Augen liegen bleiben, als auf der 1 oder der 6. Solche Fälle lassen wir zunächst aus, sie stellen kein Bernulli-Experiment dar.⁴ Wir erhalten also beim Würfeln wie oben beschrieben 6 mögliche Ergebnisse, die alle gleich wahrscheinlich sind.

Ein weiteres Beispiel soll die Rechenmethode weiter erläutern. Beim Würfelspiel soll eine **gerade Zahl** gewürfelt werden. Dann gibt es bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit 3 **günstige** Ergebnisse, nämlich die 2, die 4 und die 6 bei 6 **möglichen** Ergebnissen. Dann wird die Wahrscheinlichkeit für den Wurf einer geraden Zahl so berechnet:

$$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$$

Man kann auch sagen: Bei durchschnittlich jedem zweiten Wurf würfelle ich eine gerade Zahl.

Ein letztes Beispiel: Ein Kartenspiel als „Skatblatt“ enthält 32 Karten mit den Zahlenwerten 7, 8, 9 und 10 sowie den Bildern Bube, Dame, König und Ass. Alle diese Werte können in vier verschiedenen Farben⁵ vorliegen. Ich suche jetzt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ich aus einem gemischten Kartenspiel ein beliebiges Ass ziehe.

Es gibt 32 Karten, also 32 **mögliche** Ereignisse. Weil es insgesamt 4 Asses gibt (in Kreuz, Pik, Herz und Karo), haben wir 4 **günstige** Ereignisse. Wir können die Wahrscheinlichkeit berechnen:

$$P = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

Bei durchschnittlich jeder achten gezogenen Karte handelt es sich um ein Ass.

⁴Streng genommen ist sogar der klassische Würfel, der in Gesellschaftsspielen üblich ist, ein „gezinkter“ Würfel, der kein reines Bernulli-Experiment darstellt. Die markierten „Würfelaugen“ liegen nämlich normalerweise in kleinen Vertiefungen. Dadurch ist der Würfel auf der Seite der 1 etwas schwerer aus auf der Seite der 6. Liegt der Würfel mit der 1 nach unten (also der 6 nach oben), dann liegt sein Schwerpunkt tiefer als umgekehrt. Daher müsste die 6 etwas häufiger als die 1 gewürfelt werden. Dieser Unterschied ist jedoch so gering, dass er in der Praxis kaum eine Rolle spielt.

⁵Als „Farbe“ gilt beim Kartenspiel nicht die Farbe **Rot** oder **Schwarz**, sondern die Farben Kreuz ♣, Pik ♠, Herz ♥ und Karo ♦.

4 Zufallsexperimente

Man kann die berechneten Wahrscheinlichkeiten auch durch Experimente überprüfen. Im Gegensatz zur herkömmlichen Mathematik, die eindeutig nachvollziehbare Ergebnisse liefert, wird man dabei nie **genau** zu den berechneten Wahrscheinlichkeiten kommen, sondern nur mehr oder weniger **ungefähr**. Bei einem solchen Zufallsexperiment kommen nun noch ein paar weitere Begriffe ins Spiel.

4.1 Umfang der Stichprobe

Will man beispielsweise die Wahrscheinlichkeiten beim Werfen einer Münze experimentell überprüfen, reicht es nicht, nur ein einziges Mal eine Münze zu werfen. Man muss **viele** Würfe machen und dann die Ergebnisse auswerten. Die **Anzahl** dieser Würfe nennt man dann den *Umfang der Stichprobe*. Hierfür verwendet man das Formelzeichen N .

4.2 Häufigkeit

Unter der **Häufigkeit eines Ergebnisses** versteht man die Anzahl der Ergebnisse, die in N Experimenten aufgetreten sind. Hierbei unterscheidet man noch zwischen der *absoluten* und der *relativen* Häufigkeit. Die **absolute Häufigkeit** bekommt das Formelzeichen n und die **relative Häufigkeit** das Formelzeichen h . Hierbei sind n und h von dem erwarteten Ergebnis abhängig. Sie sind also mathematisch gesehen eine **Funktion** des Ergebnisses. Deshalb schreibt man $n(e)$ und $h(e)$.

Am Beispiel *Münzwurf* wird das vielleicht deutlich. Nehmen wir an, ich habe die Münze 100 mal geworfen. Dabei blieb sie 44 mal bei *Kopf* und 56 mal bei *Zahl* liegen. Dann ist der *Umfang der Stichprobe* $N = 100$. Die Häufigkeit ist zunächst davon abhängig, **was ich erwarte**. Frage ich nach der (absoluten) Häufigkeit für *Kopf*, dann kann ich das so schreiben: $n(K) = 44$. Die (absolute) Häufigkeit für *Zahl* ist dann $n(Z) = 56$.

Aussagekräftiger als die **absolute** Häufigkeit ist die **relative** Häufigkeit. Man bezieht sie auf den Umfang der Stichprobe. Es gilt die Formel:

$$h(e) = \frac{n(e)}{N}$$

Das wenden wir auf unser Beispiel an. Ich bestimme zunächst die *relative Häufigkeit* für *Kopf*. Weil das erwartete Ergebnis *Kopf* heißt, setze ich für die Ereignisvariable e ein K ein.

$$h(K) = \frac{n(K)}{N} = \frac{44}{100} = 44\%$$

Für die *relative Häufigkeit* von *Zahl* gilt dann mit der Ergebnisvariablen Z wie *Zahl*:

$$h(Z) = \frac{n(Z)}{N} = \frac{56}{100} = 56\%$$

Vergleichen wir diese Ergebnisse mit der *Warscheinlichkeit* P für diese Ereignisse, die wir weiter vorn mit $\frac{1}{2} = 50\%$ berechnet haben, dann erkennt man, dass die von der Wirklichkeit mit der *relativen Häufigkeit* beide nicht ganz getroffen wurden, aber man liegt immerhin irgendwo in der Nähe.

Erhöhen wir den Umfang der Stichprobe nun von 100 auf 1 000, erhalten wir beispielsweise 478 mal *Kopf* und 522 mal *Zahl*. Obwohl die Abweichung von den jeweils erwarteten 500 mit 22 deutlich größer als die 6 bei der kleineren Stichprobe, kann man dennoch sagen, dass die berechnete Warscheinlichkeit diesmal besser getroffen wurde. Die Rechnung zeigt:

$$h(K) = \frac{n(K)}{N} = \frac{478}{1\,000} = 47,8\%$$

und

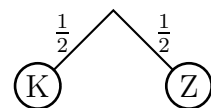
$$h(Z) = \frac{n(Z)}{N} = \frac{522}{1\,000} = 52,2\%$$

Die Abweichung der *relativen Häufigkeit* beträgt statt 6% hier nur noch 2,2%. Wenn ich nun behaupte, dass diese Abweichung zwischen der Warscheinlichkeit $P(e)$ und der *relativen Häufigkeit* $h(e)$ um so kleiner wird, je größer N ist, kann das leider niemand direkt nachweisen. Man müsste dazu viele (zeitaufwändige!) Experimente durchführen, und trotzdem kann es dabei vorkommen, dass bei einer von ganz vielen Experimentreihen mit $N = 100$ die Warscheinlichkeit einmal besser getroffen wird, als mit $N = 1\,000$. Es ist eben nur **warscheinlich**, dass meine Behauptung stimmt. Es ist ja auch so, dass fast jedes Wochenende jemand mit 6 Richtigen im Lotto gewinnt, obwohl die Warscheinlichkeit dafür bei rund $\frac{1}{14\,000\,000}$ liegt. Bei vielen Millionen Tippfern ist das Ereignis eines Gewinnes irgendwo in Deutschland als solches dann nicht mehr unwarscheinlich, auch wenn die Warscheinlichkeit dafür, dass es mich oder Sie trifft, verschwindend klein ist.

5 Ereignisbaum

5.1 Einstufige Experimente

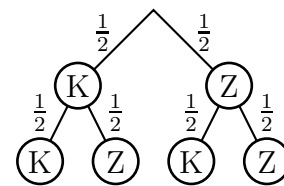
Man kann die möglichen Ereignisse gut in einem **Ereignisbaum** (auch Warscheinlichkeitsbaum genannt) darstellen. Für einen einzelnen Münzwurf sähe dieser etwa so aus, wie nebenstehend dargestellt.



Man startet oben in der Mitte. Von dort verzweigt sich der Baum nach **K** für *Kopf* und **Z** für *Zahl*. An jeden Zweig ist die jeweilige Warscheinlichkeit angetragen, im Fall des Münzwurfes $\frac{1}{2}$. Allerdings ist ein solcher Baum für einen einzigen Wurf wenig sinnvoll.

5.2 Mehrstufige Experimente

Sinnvoll wird ein solcher Ereignisbaum eigentlich erst, wenn man mehrere Ereignisse miteinander verknüpft. Wirft man die Münze zwei mal nacheinander, dann erhält man den nebenstehend dargestellten Baum. Beim ersten Wurf gibt es zwei Möglichkeiten, die als Strich nach schräg links für *Kopf* und schräg rechts für *Zahl* dargestellt sind. Beim zweiten Wurf rutschen wir in die nächste Ebene darunter. Haben wir zwei mal nacheinander *Kopf* geworfen, landen wir im Baum unten links; kam nach dem ersten Wurf mit *Kopf* eine *Zahl*, dann sind wir in der untersten Zeile an der zweiten Stelle von links bei **Z** für *Zahl* angekommen, usw.



Diesen Baum können wir nun nutzen, um unterschiedliche Warscheinlichkeiten zu berechnen. Zunächst möchte ich wissen, wie groß die Warscheinlichkeit dafür ist, dass ich zwei mal nacheinander *Kopf* werfe. Dieser Fall ist im linken Pfad vom Ausgangspunkt oben über **K** in er ersten Ebene nach **K** in der untersten Ebene dargestellt. Hierbei hilft folgender Lehrsatz weiter:

Die Warscheinlichkeit für einen bestimmten Pfad erhält man, indem man die Warscheinlichkeiten für jede Stufe miteinander multipliziert.

Man kann das auch als Formel schreiben:

$$P_{ges} = P_1 \cdot P_2 \cdot \dots$$

Ich nenne in unserem Beispiel die Warscheinlichkeite dafür, mit dem ersten Wurf *Kopf* zu werfen P_1 und die Warscheinlichkeite dafür, mit dem zweiteten Wurf *Kopf* zu werfen P_2 . Dann erhalte ich die Gesamtwerscheinlichkeit P_{KK} dafür, zwei mal *Kopf* zu werfen, mit dieser Rechnung:

$$P_{KK} = P_1 \cdot P_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Ähnlich sieht es mit der Warscheinlichkeit P_{ZZ} dafür aus, dass ich beide Male eine *Zahl* werfe. Im Ereignisbaum gehe ich dazu am rechten Rand hinunter und durchlaufe wieder zwei mal die Warscheinlichkeit $P_1 = P_2 = \frac{1}{2}$. Insgesamt ergibt das wieder:

$$P_{ZZ} = P_1 \cdot P_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Etwas anders sieht es aus, wenn ich die Warscheinlichkeit P_{gleich} dafür suche, dass beide Würfe das gleiche Ergebnis liefern, also zwei mal *Kopf* oder zwei mal *Zahl*. Aus dem Ereignisbaum kann man erkennen, dass es **zwei** Zweige gibt, die das gewünschte Ergebnis liefern, nämlich der ganz linke Zweig für zwei mal *Kopf* und der ganz rechte zwei mal *Zahl*. In einem solchen Fall gilt die **Summenregel** für die Zusammenfassung mehrerer Zweige:

Die Gesamtwarscheinlichkeit mehrerer Zweig erhält man, indem man die Teilwarscheinlichkeiten dieser Zweige addiert.

Auch das kann man als Formel schreiben:

$$P_{ges} = P_1 + P_2 + \dots$$

Konkret bedeutet das für unsere Aufgabenstellung:

$$P_{ges} = P_{KK} + P_{ZZ} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Nun kann man auch beispielsweise die Warscheinlichkeit dafür suchen, dass bei den beiden Würfeln **mindestens einmal** ein *Kopf* dabei war. Im Ereignisbaum erkennt man schnell, dass hierfür die **drei linken** Zweige ein gültiges Ergebnis liefern, nur der ganz rechte Zweig nicht. Das führt zu dieser Lösung:

$$P_{min1K} = P_{KK} + P_{KZ} + P_{ZK} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Dies kann man auch etwas einfacher lösen. Dazu benötigt man diesen Lehrsatz:

Sie Summe aller Warscheinlichkeiten in n Zweigen ist immer 1.

Als Formel geschrieben sieht das so aus:

$$P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$$

Es gibt nun auch den Begriff der **Gegenwarscheinlichkeit**, Formelzeichen \bar{P} . In der Gegenwarscheinlichkeit \bar{P} sind alle Warscheinlichkeiten der Zweige enthalten, die **nicht** zu dem gewünschten Ergebnis führen. Im aktuellen Beispiel ist das nur ein einziger Fall, nämlich zwei mal *Zahl*. Mit dem vorstehenden Lehrsatz kann ich nun relativ einfach⁶ zum gleichen Ergebnis kommen. Die Gegenwarscheinlichkeit zur gesuchten ist nämlich einfach zur zwei mal *Zahl*.

$$P_{min1K} = 1 - \overline{P_{min1K}} = 1 - P_{ZZ} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Um die ganzen Zusammenhänge an einem anderen Beispiel noch einmal zu verdeutlichen nehme ich mir noch einmal den klassischen Würfel vor. Leider ist bei 6 möglichen Ergebnissen schon ein zweistufiger Ereignisbaum recht groß. Wir erhalten insgesamt $6 \cdot 6 = 36$ unterschiedliche Ergebnisse. Daher möchte ich auf das Zeichnen des Baumes verzichten. Wir können ihn uns aber im Kopf vorstellen.

Das Experiment besteht nun also darin, zwei mal zu würfeln. Das kann mit einem einzigen Würfel **nacheinander** oder mit zwei Würfeln **gleichzeitig** erfolgen, das führt zum selben Ergebnis. Als erstes möchte ich wissen, wie groß die Warscheinlichkeit dafür ist, dass die Summe der gewürfelten Augen 3 ist. Diese Warscheinlichkeit bezeichne ich als $P(3)$. Auch ohne gezeichneten Ergebnisbaum Ergebnisbaum kann man sich sicher vorstellen, dass es zur Lösung genau zwei mögliche Konstellationen gibt:

⁶Ich gebe zu, wirklich kompliziert ist die ursprüngliche Rechnung nicht, weil das Beispiel so einfach ist. Es gibt aber auch mehrstufige Bäume, wo es erheblich komplizierter wird.

1. Der erste Würfel zeigt 1 Auge und der zweite Würfel zeigt 2 Augen.
2. Der erste Würfel zeigt 2 Augen und der zweite Würfel zeigt 1 Auge.

Aus den Überlegungen weiter vorn wissen wir noch, dass die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Augenzahl beim Würfeln mit einem einzigen Würfel jeweils $\frac{1}{6}$ beträgt. Ich verwende die Würfelnummer (oder die Nummer des Wurfes bei nur einem Würfel) im folgenden als Index. P_1 ist demnach der erste Wurf und P_2 der zweite Wurf (bzw. Würfel). Entsprechend bezeichne ich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim ersten Würfel (Wurf) eine 1 gewürfelt wurde mit $P_1(1)$ und dafür, dass eine 2 gewürfelt wurde mit $P_1(2)$.

Jetzt werden die Würfe (Würfel) kombiniert, also entweder gleichzeitig nacheinander ausgeführt. Im ersten günstigen Fall sollte Würfel 1 eine Augenzahl von 1 zeigen und der zweite eine Augenzahl von 2. Die zugehörige Wahrscheinlichkeit nenne ich $P(1;2)$. Ich berechne:

$$P(1;2) = P_1(1) \cdot P_2(2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Für die Augenzahlsumme 3 kann aber auch zuerst die 2 und danach die 1 gewürfelt worden sein. Ich erhalte dafür:

$$P(2;1) = P_1(2) \cdot P_2(1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Beide Fälle zusammen ergeben die Gesamtwahrscheinlichkeit $P(3)$ für die Augenzahlsumme 3:

$$P(3) = P(1;2) + P(2;1) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$$

Als nächstes möchte ich wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit $P(7)$ für die Augenzahlsumme 7 ist. Dafür gibt es jetzt 6 Möglichkeiten:

$$1 + 6 = 7 \quad 2 + 5 = 7 \quad 3 + 4 = 7 \quad 4 + 3 = 7 \quad 5 + 2 = 7 \quad 6 + 1 = 7$$

Es gibt jetzt also 6 verschiedene Kombinationsmöglichkeiten für die Augenzahlsumme 7. Weil immer noch alle Wahrscheinlichkeiten für eine bestimmte Augenzahl bei jedem Wurf bei $\frac{1}{6}$ liegt, können wir jetzt etwas verkürzt so rechnen:

$$P(7) = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

Weil wir 6 Zweige mit gleicher Teilwahrscheinlichkeiten zu addieren hatten, war eine einfache Multiplikation mit 6 anstelle einer Summe mit 6 (gleichen) Summanden möglich. Man kann das Ergebnis auch mit $P(3)$ vergleichen. Offensichtlich ist es deutlich wahrscheinlicher, die Augenzahlsumme 7 als die 3 zu würfeln.

Zum Schluss möchte ich noch wissen, wie wahrscheinlich es ist, mit den beiden Würfeln **mindestens** 4 Augen zu würfeln. Das wird jetzt sehr unübersichtlich, denn die meisten

von den 36 möglichen Konstellationen führen zu dem gewünschten Ergebnis. Daher ist es hier sinnvoll, mit der **Gegenwahrscheinlichkeit** zu arbeiten. In der Gegenwahrscheinlichkeit sind nur die Fälle enthalten, in denen die Augenzahlsumme kleiner als 4 ist. Das sind nur diese drei Fälle:

$$1 + 1 = 1 \quad 1 + 2 = 3 \quad 2 + 1 = 3$$

Ich kann also so rechnen:

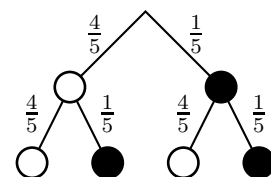
$$P_{\geq 4} = 1 - \overline{P_{\geq 4}} = 1 - P_{< 4} = 1 - 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

5.3 Unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten

Beim Bernulli-Experiment sind alle möglichen Ergebnisse gleich wahrscheinlich. Das war so beim Werfen einer Münze oder beim Würfeln. Es gibt jedoch auch Ereignisse, wo das nicht der Fall ist. Das kann ein „Würfel“ mit unterschiedlichen Kantenlängen sein oder auch ein Glücksrad mit unterschiedlich großen Gewinnfeldern. Es gibt Fälle, in denen die unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten leicht berechnet werden können⁷, es gibt aber auch Fälle, in denen gar keine Berechnung möglich ist. Als Beispiel nehme ich einen Biathleten, der auf die schwarze Scheibe schießt. Trifft er, dann klappt ein weißer Deckel vor das Schussfeld, ist alles ok. Trifft er nicht, dann bleibt das Schussfeld schwarz und er muss eine Strafrunde o.ä. machen. Die beiden möglichen Ergebnisse – Treffer oder Fehlschuss – sind logischerweise nicht gleich wahrscheinlich. Die Trefferwahrscheinlichkeit ist hauptsächlich abhängig von den Fertigkeiten des Biathleten und seinem Trainingszustand. Man kann sie daher nur aus seinen bisherigen Ergebnissen abschätzen.

Nehmen wir an, der Biathlet hat in seinen bisherigen Wettkämpfen eine Trefferquote von 80 % gehabt. Dann gehen wir für seinen nächsten Wettkampf von einer Trefferwahrscheinlichkeit von 80 % = $\frac{4}{5}$ aus. Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehlschuss liegt dann bei 20 % = $\frac{1}{5}$.

Nebenstehend ist ein Ereignisbaum für zwei Schüsse dargestellt. Im Biathlon werden zwar jeweils 5 Schüsse abgegeben, aber für den zugehörigen Ereignisbaum fehlt hier der Platz. Er hätte $2^5 = 32$ Enden. Als Anschauungsgrundlage sollte aber dieser verkürzte Baum aber ausreichen. Links ist jeweils eine helle Scheibe für einen Treffer und rechts eine schwarze für den Fehlschuss dargestellt.



Zunächst wollen wir wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Biathlet 5 Treffer erzielt. Dazu gehen wir in dem (fünfstufigen) Baum jeweils nach links runter. An jedem Zweig

⁷Bei einem Glücksrad etwa, bei dem das Gewinnfeld nur halb so groß ist, wie das Feld für Nieten ist sofort erkennbar, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ ist, die Wahrscheinlichkeit für Nieten aber $\frac{2}{3}$.

steht $\frac{4}{5}$ für die Trefferwahrscheinlichkeit. Die Trefferwahrscheinlichkeit P_{5T} für 5 Treffer ist dann das Produkt:

$$P(5T) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \left(\frac{4}{5}\right)^5 = \frac{1024}{3125} = 32,768\%$$

Man erkennt sehr schön, dass man hier mit der Potenzschreibweise eine Vereinfachung in der Rechnung bekommt. Das geht aber nur, wenn bei jeder Stufe das gleiche Ergebnis erwartet wird. Wenn wir jetzt die Wahrscheinlichkeit für 5 Fehlschüsse berechnen wollen, ist das auch so. Die Rechnung sieht dann so aus:

$$P(5F) = \left(\frac{1}{5}\right)^5 = \frac{1}{3125} = 0,032\%$$

Als nächstes möchte ich wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit für **genau einen** Fehlschuss ist. Der kann natürlich beim ersten, beim zweiten, usw. bis beim fünften Schuss passieren. Im (nicht dargestellten) Gesamtbaum würden wir demnach 5 Zweige zu einem Ergebnis zusammenfassen müssen. In jedem Zweig mit 5 Faktoren ist jeweils einmal $\frac{1}{5}$ für einen Fehlschuss und viermal $\frac{4}{5}$ für einen Treffer enthalten. Das kann man so schreiben:

$$P(4T) = 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{256}{625} = 40,96\%$$

Etwas komplizierter wird es, wenn ich wissen will, wie groß die Wahrscheinlichkeit für **höchstens einen** Fehlschuss ist. Dann müssen die Fälle für **genau 5** und **genau 4** Treffer noch addiert werden.

$$P(\geq 4T) = P(5T) + P(4T) = \frac{1024}{3125} + \frac{256}{625} = \frac{2304}{3125} = 73,728\%$$

5.4 Abhängige Wahrscheinlichkeiten

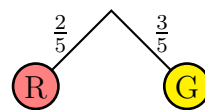
Manchmal sind die Teilwahrscheinlichkeiten unterschiedlich und hängen auch von dem ab, was bisher bereits passiert ist. Ein Beispiel soll das erklären.

Wir haben eine Tüte mit 10 roten und 15 gelben Schokolinsen vor uns stehen. Wenn ich in die Tüte greife, ist die Wahrscheinlichkeit für eine rote Schokolinse anders als für eine gelbe, denn gelbe sind ja mehr da. Von insgesamt 25 Schokolinsen sind 10 rot. Nebenstehend ist ein zugehöriger Ereignisbaum dargestellt. Die Wahrscheinlichkeit eine rote zu erwischen lässt sich daher so berechnen:

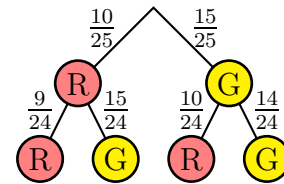
$$P_{rot} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

Wenn ich eine gelbe erwischen möchte, rechne ich so:

$$P_{gelb} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$



Diese unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten sind im obigen Ereignisbaum so eingetragen. Spannend wird es aber jetzt, wenn ich noch eine zweite Schokolinse herausnehmen möchte. Dabei gehe ich davon aus, dass ich die erste aufgegessen habe. Es sind dann ja nur noch insgesamt 24 Schokolinsen da, eine rote oder eine gelbe fehlt. Daher müssen die Wahrscheinlichkeiten für den nächsten Zugriff für jeden möglichen Fall neu berechnet werden. Wir erhalten den nebenstehenden zweistufigen Ereignisbaum. Für den besseren Überblick habe ich die sich ergebenden Brüche hier nicht gekürzt.



Die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten möchte ich nur an zwei Beispielen erläutern. Betrachten wir zunächst den Fall, dass ich eine rote Schokolinse entnommen habe. Anschließend möchte ich noch eine rote haben. Jetzt sind von den verbleibenden 24 insgesamt noch 9 rote da, die Wahrscheinlichkeit beträgt für diesen Fall:

$$P_{rot} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

Habe ich dagegen zuerst eine gelbe Schokolinse herausgeholt, sind jetzt noch 10 von insgesamt 24 rot. Die Wahrscheinlichkeit beträgt jetzt:

$$P_{rot} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

Die Wahrscheinlichkeit ist diesmal also etwas größer, als im ersten Fall. Das war auch so zu erwarten.

Jetzt möchte ich wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, **zwei rote** Schokolinsen zu erwischen. Wir kennen ja schon die Formel, in der die Teilwahrscheinlichkeiten für jede Stufe miteinander multipliziert werden müssen. Wie wir eben gesehen haben, sind diese unterschiedlich. Wir können sie aus dem Ereignisbaum ablesen.

$$P(2rot) = P_1(rot) \cdot P_2(rot) = \frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{20}$$

Als nächstes möchte ich wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass ich zwei **verschiedenfarbige** Schokolinsen herausnehme. Im Ereignisbaum kann man erkennen, dass dafür zwei Zweige infrage kommen, nämlich die beiden mittleren. Im einen Fall erhalte ich zuerst eine rote und dann die gelbe, im zweiten habe ich die gelbe vor der roten. Jetzt stellt sich eine wichtige Frage: **Ist die Wahrscheinlichkeit für jeden Pfad davon abhängig, welche ich zuerst heraushole? Oder ist das gleichgültig?**

Klären wir das zunächst an unserem Beispiel. Ich berechne zuerst den Fall, dass ich erst die rote und dann die gelbe erhalte.

$$P(rot/gelb) = P_1(rot) \cdot P_2(gelb) = \frac{10}{25} \cdot \frac{15}{24} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{4}$$

Jetzt soll es erst die gelbe und dann die rote sein.

$$P(\text{gelb/rot}) = P_1(\text{gelb}) \cdot P_2(\text{rot}) = \frac{15}{25} \cdot \frac{10}{24} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{1}{4}$$

Die Ergebnisse stimmen überein. Aber ist das immer so? Und wenn ja, warum?

Schauen wir uns dazu die beiden Produkte an:

$$\frac{10}{25} \cdot \frac{15}{24} \quad \text{und} \quad \frac{15}{25} \cdot \frac{10}{24}$$

Leicht erkennbar sind die Nenner identisch. Dort steht ja immer die Zahl der noch vorhandenen Schokolinsen. Lediglich die Zähler unterscheiden sich. Allerdings sind sie nur gegeneinander vertauscht. Da beim Multiplizieren der Zähler das Vertauschungsgesetz gilt, spielt das keine Rolle, das Ergebnis ist gleich. Auch wenn hier nur ein zweistufiger Baum dargestellt ist, kann man zeigen, dass das gleiche Prinzip auch für mehrstufige Ereignisbäume gilt. Wenn ich also drei oder vier mal oder noch häufiger in die Tüte greife, hängt das Ergebnis ausschließlich davon ab, wieviele Schokolinsen von welcher Sorte ich erwarte. An dieser Stelle möchte ich auf einen Beweis verzichten. Er läuft daraus hinaus, dass bei n Gegenständen von einer bestimmten Sorte im Zähler in jedem Fall die Faktoren $a, (a-1), \dots, (a-n+1)$ mit a als der ursprünglichen Anzahl von dieser Sorte vorkommen.

Mit diesem Kenntnisstand können wir unser Beispiel (zwei unterschiedlichfarbene Schokolinsen) zuende rechnen. Ich muss also nur die Wahrscheinlichkeit für einen einzigen Pfad bestimmen und kann ihn dann mit der Anzahl der Pfade (hier 2) multiplizieren.

$$P(\text{verschiedenfarbig}) = 2 \cdot P(\text{rot/gelb}) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Als nächstes möchte ich wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit für zwei **gleichfarbige** Schokolinsen ist. Natürlich kann man hier mit der Gegenwahrscheinlichkeit zu den verschiedenfarbigen rechnen, denn die kennen wir ja schon. Das wäre dann:

$$P(\text{gleichfarbig}) = 1 - P(\text{verschiedenfarbig}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Weil das Aufstellen der Pfadwahrscheinlichkeiten geübt werden soll, rechnen wir jetzt mit dem klassischen Weg. Es führen zwei Pfade zu dem gewünschten Ergebnis, der ganz linke und der ganz rechte. Den ganz linken für zwei mal Rot haben wir schon gerechnet.

$$P(2\text{rot}) = P_1(\text{rot}) \cdot P_2(\text{rot}) = \frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{20}$$

Den rechten mit zwei mal Gelb nehmen wir uns jetzt vor:

$$P(2\text{gelb}) = P_1(\text{gelb}) \cdot P_2(\text{gelb}) = \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{20}$$

Achtung! Diese Werte beiden sind unterschiedlich! Zwei mal Gelb ist ja auch etwas anderes als zwei mal Rot. Dieser Fall ist also anders als der Fall vorhin mit Gelb/Rot bzw. Rot/Gelb. Wenn auch eine einfache Multiplikation mit 2 (wie bei Bernulli-Experimenten) nicht möglich ist, können wir jetzt die Summe bilden:

$$P(\text{gleichfarbig}) = P(2\text{rot}) + P(2\text{gelb}) = \frac{3}{20} + \frac{7}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

Erkennbar hat auch dieser Lösungsweg zum gleichen Ergebnis geführt, das man mit der Gegenwahrscheinlichkeit erhalten hätte.

6 Erwartungswert

Wenn es um Zahlen geht, kann man auch einen **Erwartungswert E** angeben. Darunter versteht man, welches Ergebnis als Zahl man bei vielen Experimenten im Durchschnitt erwarten kann.

Der Erwartungswert E ist die Summe aller Produkte aus einem Ergebnis e_i mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit P_i .

Man kann das auch als Formel für n mögliche Ergebnisse schreiben:

$$E = P_1 \cdot e_1 + P_2 \cdot e_2 + \dots + P_n \cdot e_n$$

In Kurzform schreibt man das gern auch so:

$$E = \sum_{i=1}^n P_i \cdot e_i$$

6.1 Erwartungswert im Bernulli-Experiment

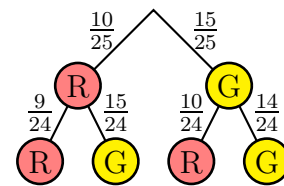
Nehmen wir als Beispiel den Würfel. Als Ergebnis liefert er eine Natürliche Zahl im Intervall $[1; 6]$. Berechnen wir den Erwartungswert:

$$\begin{aligned} E &= P_1 \cdot e_1 + P_2 \cdot e_2 + P_3 \cdot e_3 + P_4 \cdot e_4 + P_5 \cdot e_5 + P_6 \cdot e_6 \\ &= \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 \\ &= \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \\ E &= 3,5 \end{aligned}$$

Natürlich kann man nicht erwarten, dass der Würfel eine 3,5 anzeigt. Das kann er nicht, er kann ja nur **Ganze Zahlen** als Ergebnis anzeigen. Der Erwartungswert $E = 3,5$ besagt nur, dass man diese Zahl als **Mittelwert** bei vielen Würfeln erwarten kann.

6.2 Erwartungswert bei abhängiger Wahrscheinlichkeit

Nehmen wir wieder das Beispiel mit den Schokolinsen. Nebenstehend ist noch einmal der zugehörige Ereignisbaum dargestellt. Da hier eigentlich keine Zahlen eine Rolle spielen bringe ich sie künstlich mit ein, indem ich den Wert einer roten Schokolinse auf 15 ct und einer gelben auf 10 ct festlege. Ich suche jetzt den Erwartungswert für den Gegenwert von zwei beliebig herausgenommenen Schokolinsen.



Zur Bestimmung des Erwartungswertes müssen jetzt eigentlich für 4 Zweige die Produkte aus Wahrscheinlichkeit und Wert (Gesamtwert der beiden Schokolinsen) gebildet werden. Tatsächlich sind es aber nur 3 Fälle, die unterschieden werden müssen. Wie wir bereits im Kapitel [Abhängige Wahrscheinlichkeiten](#) gelernt haben, ist es für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für zwei verschiedenfarbige Schokolinsen gleichgültig, ob zuerst die rote oder zuerst die gelbe Schokolinse entnommen wird. Daher können wir diese beiden Fälle zusammenfassen und dazu die Wahrscheinlichkeit für einen beliebigen der beiden Fälle verdoppeln. Damit erhalten wir den Erwartungswert:

$$\begin{aligned}
 E &= P(\text{rot/rot}) \cdot 30 \text{ ct} + 2 \cdot P(\text{rot/gelb}) \cdot 25 \text{ ct} + P(\text{gelb/gelb}) \cdot 20 \text{ ct} \\
 &= \frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} \cdot 30 \text{ ct} + 2 \cdot \frac{10}{25} \cdot \frac{15}{24} \cdot 25 \text{ ct} + \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} \cdot 20 \text{ ct} \\
 &= 4,5 \text{ ct} + 12,5 \text{ ct} + 7 \text{ ct} \\
 E &= 24 \text{ ct}
 \end{aligned}$$

Ich kann also erwarten beim Herausnehmen von zwei Schokolinsen durchschnittlich einen Gesamtwert von 24 ct zu entnehmen.

An dieser Stelle könnte die Frage auftreten: **Kann ich nicht einfach den Gesamtwert aller Schokolinsen durch die Anzahl aller Schokolinsen dividieren und dann mit der Anzahl der entnommenen Linsen multiplizieren?**

Rechnen wir nach:

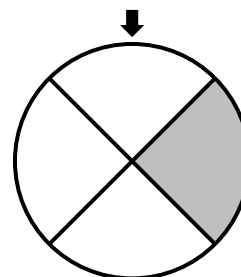
$$EF = \frac{10 \cdot 15 \text{ ct} + 15 \cdot 10 \text{ ct}}{25} \cdot 2 = 24 \text{ ct}$$

Offensichtlich ist das richtig. Dass das tatsächlich immer so ist, ist zwar richtig, möchte ich an dieser Stelle aber nicht beweisen.

7 Beispiele

7.1 Beispiel 1

Nebenstehend ist ein Glücksrad abgebildet. Das Glücksrad wird gedreht und irgendwann bleibt unter dem Pfeil ein helles oder ein dunkles Feld stehen. Zeigt der Pfeil auf das dunkle Feld, dann bedeutet das einen Gewinn von 3 €, zeigt der Pfeil auf ein helles Feld, wird nichts gewonnen. Das Glücksrad darf drei mal nacheinander gedreht werden.



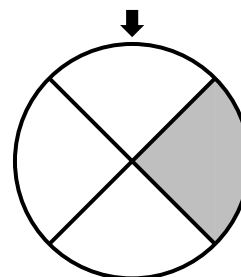
Folgende Fragen sollen beantwortet werden.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass man bei dreimaligem Drehen **genau** zweimal gewinnt?
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass man bei dreimaligem Drehen **mindestens** einmal gewinnt?
3. Wie groß ist der Erwartungswert für den Gewinn insgesamt beim dreimaligen Drehen?

8 Lösungen der Beispiele

8.1 Beispiel 1

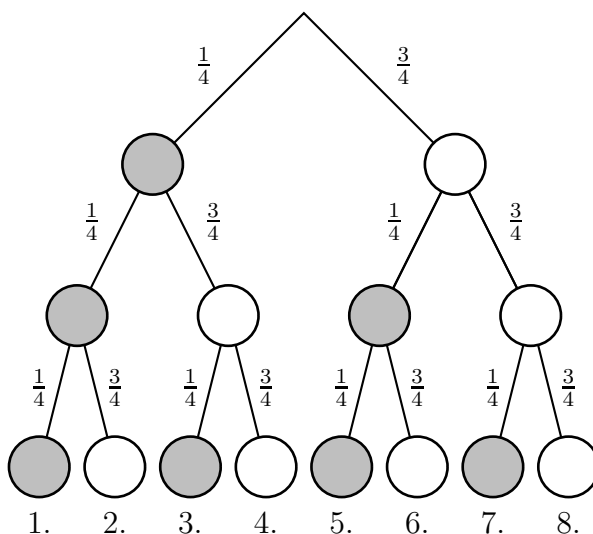
Nebenstehend ist ein Glücksrad abgebildet. Das Glücksrad wird gedreht und irgendwann bleibt unter dem Pfeil ein helles oder ein dunkles Feld stehen. Zeigt der Pfeil auf das dunkle Feld, dann bedeutet das einen Gewinn von 3 €, zeigt der Pfeil auf ein helles Feld, wird nichts gewonnen. Das Glücksrad darf drei mal nacheinander gedreht werden.



Folgende Fragen sollen beantwortet werden.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass man bei dreimaligem Drehen **genau** zweimal gewinnt?
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass man bei dreimaligem Drehen **mindestens** einmal gewinnt?
3. Wie groß ist der Erwartungswert für den Gewinn insgesamt beim dreimaligen Drehen?

Lösung: Offensichtlich ist die Chance, auf einem hellen Feld zu landen, drei mal so groß, wie für ein dunkles Feld, denn das dunkle Feld nimmt nur ein Viertel des Kreisumfangs ein. Beginnen wir mit dem Ereignisbaum, der nachfolgend dargestellt ist. Der dunkle Kreis bedeutet jeweils einen Gewinn, der helle Kreis die Niete. Die sich jeweils ergebenden Wahrscheinlichkeiten sind bereits eingetragen. Um besser im Text auf die Zweige des Baumes Bezug nehmen zu können, habe ich die Zweige am unteren Ende mit einer Nummer versehen.



Teil 1: Genau zwei Gewinne finden wir in Zweig 2, 3 und 5. In allen anderen Zweigen sind entweder mehr oder weniger Gewinne. Ich kann also beispielhaft für den Zweig 2 die Wahrscheinlichkeit bestimmen und diese verdreifachen:

$$P(2) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{64} = 14,0625\%$$

Teil 2: Zu „mindestens ein Gewinn“ gehören alle Zweige von 1 bis 7. Um die Summe zu bestimmen benötigen wir zunächst die Wahrscheinlichkeiten

- $P(1)$ von genau einem
- $P(2)$ von genau zwei und
- $P(3)$ von genau drei

Gewinnen.

$P(2)$ ist aus Teil 1 schon bekannt, wir benötigen nur noch $P(1)$ und $P(3)$. Zu $P(1)$ gehören die Zweige 4, 6 und 7, also drei Zweige. Damit können wir $P(1)$ berechnen.

$$P(1) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$$

Zu $P(3)$ gehört nur Zweig 1. Daraus erhalten wir:

$$P(3) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

Damit können wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit als Summe der Teilwahrscheinlichkeiten berechnen.

$$P(\geq 1) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{27}{64} + \frac{9}{64} + \frac{1}{64} = \frac{37}{64} = 57,8125\%$$

Alternative Lösung: Wir haben gesehen, dass die Rechnung etwas aufwändig war, weil dabei Zweige mit einem, mit zwei und mit drei Gewinnen mit unterschiedlichen Teilwahrscheinlichkeiten zusammengerechnet werden mussten. Es liegt daher nahe, hier mit der **Gegenwahrscheinlichkeit** zu arbeiten. Das Gegenteil von *mindestens ein* ist *kein*. **Keinen** Gewinn liefert nur Zweig 8. Die zugehörige Wahrscheinlichkeit muss nur noch von 1 subtrahiert werden. Wir erhalten damit:

$$P(\geq 1) = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64} = 57,8125\%$$

Das ist erkennbar wesentlich einfacher.

Teil 3: Hier geht es um den Erwartungswert für drei Ziehungen. Da keine Abhängigkeiten vorliegen, ist das Ergebnis das Dreifache des Erwartungswertes von einer Ziehung. Wir können daher so rechnen:

$$E(3) = 3 \cdot E(1) = 3 \cdot P_1(1) \cdot 3\text{€} = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot 3\text{€} = 2,25\text{€}$$