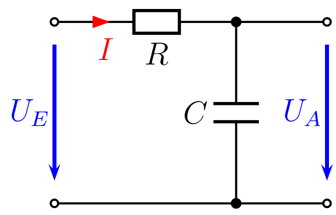
R-C-Tiefpass

Gegeben ist nebenstehende Schaltung mit $R = 10\,\mathrm{k}\Omega$ und $C = 10\,\mathrm{nF}$. Es soll das Übertragungsverhalten der Schaltung ermittelt werden.



Bauen Sie die vorgegebene Schaltung auf. Schließen Sie als Eingangsspannung U_E den Funktionsgenerator an. Zur Messung von U_E und U_A schließen Sie die Kanäle 1 und 2 des Oszilloskopes an. Achten Sie dabei darauf, dass die Masseanschlüsse der Eingänge – die ja im Oszilloskop miteinander verbunden sind – an den gemeinsamen (unteren) Anschluss von Eingang und Ausgang der Schaltung angeschlossen werden.

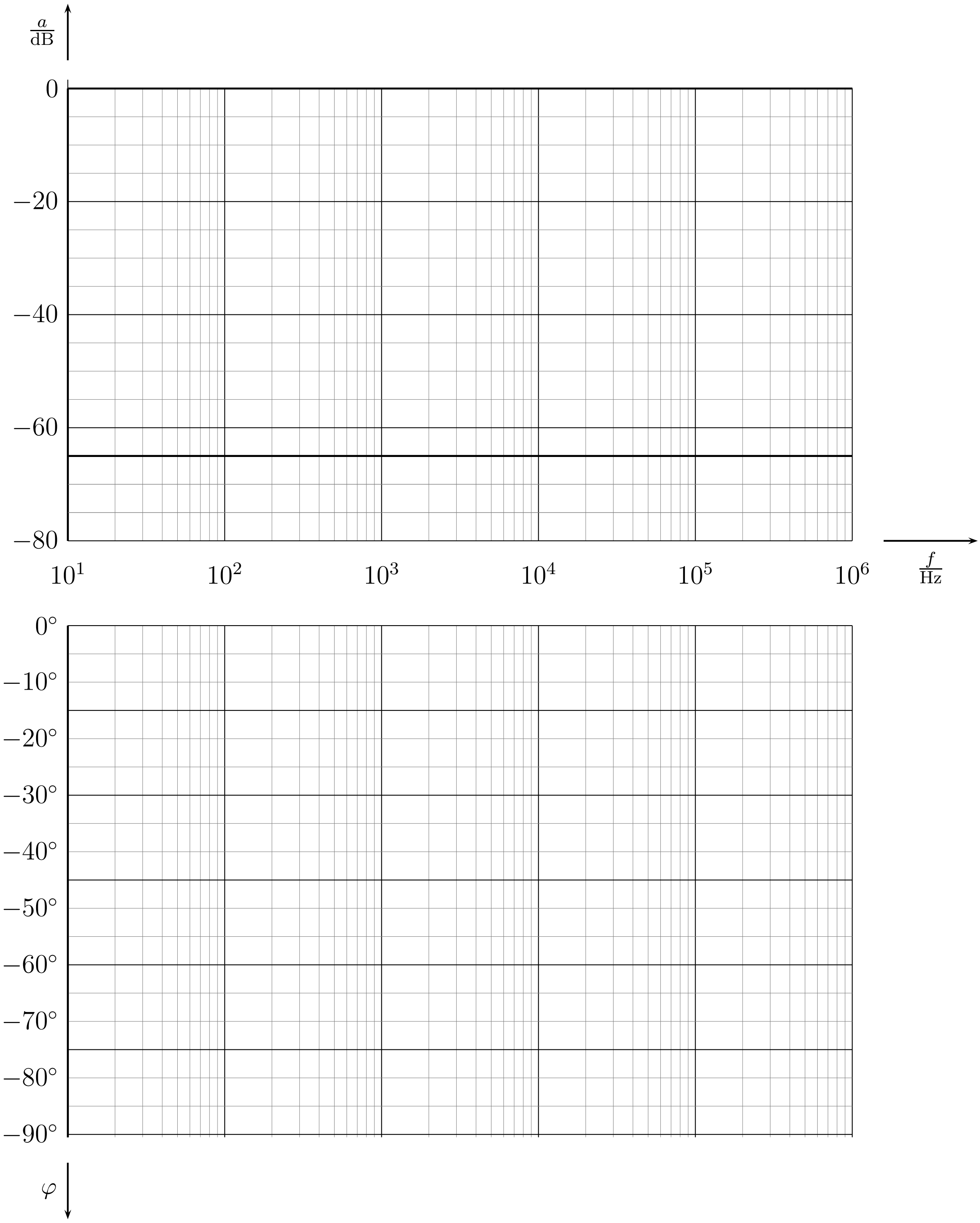
Nehmen Sie nun die Messreihe auf. Stellen Sie dazu jeweils eine geeignete Eingangsspannung U_E ein und messen Sie die Ausgangsspannung U_A sowie deren Phasenverschiebung φ gegenüber der Eingangsspannung. Diese Werte protokollieren Sie in nachfolgender Wertetabelle. Dies führen Sie für jede vorgegebene Frequenz durch.

Berechnen Sie nun für jede Messung das logarithmische Übertragungsmaß $\boldsymbol{a}$ und tragen Sie die Werte ins Messprotokoll ein. Zur Erinnerung:

$$a = 20\,\mathrm{dB} \cdot \lg \frac{U_A}{U_E}$$

$\frac{f}{\mathrm{Hz}}$	10^1	10^2	10^3	$3 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^3$	10^4	$3 \cdot 10^4$	10^5	10^6
$\frac{U_E}{\mathrm{V}}$									
$\frac{U_A}{\mathrm{V}}$									
$\frac{a}{\mathrm{dB}}$									
φ									

Tragen Sie die Werte für a und φ in die vorbereiteten Diagramme ein und vervollständigen Sie diese Messpunkte zu Kennlinien. Bestimmen Sie anschließend grafisch die Grenzfrequenz.



$\frac{a}{\mathrm{dB}}$
0
−20
−40
−60
−80
10^1
10^2
10^3
10^4
10^5
10^6
$\frac{f}{\mathrm{Hz}}$
0°
−10°
−20°
−30°
−40°
−50°
−60°
−70°
−80°
−90°
φ

Stellen Sie eine Formel auf, die angibt, wie das komplexe Spannungsverhältnis

$$\underline{V} = \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E}$$

von R, C und ω abhängt. Stellen Sie die Formel so weit um, dass Sie das Ergebnis in Realteil und Imaginärteil aufspalten können, also in der Form $\underline{V} = a + jb$. Leiten Sie aus dieser Komplexen Funktion die Formeln für den Betrag V von $\underline{V}$ und den Phasenverschiebungswinkel φ her.

Ersetzen Sie nun in diesen Formeln ω durch $2\pi f$ und **berechnen** Sie die Werte für das logarithmische Übertragungsmaß $\boldsymbol{a}$ und den Phasenverschiebungswinkel φ, die man in dem Experiment theoretisch erwarten würde. Tragen Sie diese Werte in nachfolgende Tabelle ein und vergleichen Sie die Ergebnisse mit den gemessenen Werten.

$\frac{f}{\mathrm{Hz}}$	10^1	10^2	10^3	$3 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^3$	10^4	$3 \cdot 10^4$	10^5	10^6
$\frac{a}{\mathrm{dB}}$									
φ									

Bestimmen Sie nun rechnerisch und zeichnerisch die Grenzfrequenz f_G.

Lösung der Rechnung

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{R}} &= R \\
\underline{\mathrm{X}}_C &= \frac{1}{j\omega C} \\
\omega &= 2 \cdot \pi \cdot f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{U}}_A &= \frac{\underline{\mathrm{X}}_C \cdot \underline{\mathrm{U}}_E}{\underline{\mathrm{R}} + \underline{\mathrm{X}}_C} \\
\underline{\mathrm{V}} &= \frac{\underline{\mathrm{U}}_A}{\underline{\mathrm{U}}_E} \\
&= \frac{\underline{\mathrm{X}}_C}{\underline{\mathrm{R}} + \underline{\mathrm{X}}_C} \\
&= \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \\
&= \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{j\omega RC}{j\omega C} + \frac{1}{j\omega C}} \\
&= \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{j\omega RC+1}{j\omega C}} \\
&= \frac{1}{j\omega RC + 1} \\
&= \frac{1}{1 + j\omega RC} \cdot \frac{1 - j\omega RC}{1 - j\omega RC} \\
&= \frac{1 - j\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \\
\underline{\mathrm{V}} &= \frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2} - j\frac{\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V &= \sqrt{(\mathrm{Re}\,\underline{\mathrm{V}})^2 + (\mathrm{Im}\,\underline{\mathrm{V}})^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1 + \omega^2 R^2 C^2}{(1 + \omega^2 R^2 C^2)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \\
V &= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \arctan \frac{\text{Im } \underline{\text{V}}}{\text{Re } \underline{\text{V}}} \\
&= \arctan \frac{-\frac{\omega RC}{1+\omega^2 R^2 C^2}}{\frac{1}{1+\omega^2 R^2 C^2}} \\
\varphi &= \arctan\left(-\omega RC\right)
\end{aligned}
$$

Bei der Grenzfrquenz f_G ist die Phasenverschiebung $\varphi = -45°$, bzw. es ist $\tan \varphi = -1$.

$$
\begin{aligned}
-\omega_G \cdot \cdot R \cdot C &= -1 \qquad | : (-R \cdot C) \\
\omega_G &= \frac{1}{R \cdot C} \\
2 \cdot \pi \cdot f_G &= \omega_G \\
2 \cdot \pi \cdot f_G &= \frac{1}{R \cdot C} \qquad | : (2\pi) \\
f_G &= \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C}
\end{aligned}
$$

Die gegebenen Werte werden eingesetzt.

$$
\begin{aligned}
f_G &= \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C} \\
f_G &= \frac{1}{2\pi \cdot 10\,\mathrm{k\Omega} \cdot 10\,\mathrm{nF}} \\
f_G &= 1{,}592\,\mathrm{kHz}
\end{aligned}
$$