

Ungleichungen 2. und höheren Grades

W. Kippels

12. April 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	4
2	Einleitung	5
3	Quadratische Ungleichungen	6
3.1	Lösungsprinzip	6
3.2	Verdeutlichung an zwei Beispielen	8
3.2.1	Beispiel 1	8
3.2.2	Beispiel 2	9
4	Ungleichungen höheren Grades als 2	10
5	Übungsaufgaben	14
5.1	Aufgabe 1	14
5.2	Aufgabe 2	14
5.3	Aufgabe 3	14
5.4	Aufgabe 4	14
5.5	Aufgabe 5	14
5.6	Aufgabe 6	14
5.7	Aufgabe 7	14
5.8	Aufgabe 8	14
5.9	Aufgabe 9	14
5.10	Aufgabe 10	14
5.11	Aufgabe 11	15
5.12	Aufgabe 12	15
5.13	Aufgabe 13	15
5.14	Aufgabe 14	15
5.15	Aufgabe 15	15
5.16	Aufgabe 16	15
5.17	Aufgabe 17	15

5.18 Aufgabe 18	15
5.19 Aufgabe 19	15
6 Ergebnisse der Übungsaufgaben	16
6.1 Aufgabe 1	16
6.2 Aufgabe 2	16
6.3 Aufgabe 3	16
6.4 Aufgabe 4	16
6.5 Aufgabe 5	16
6.6 Aufgabe 6	16
6.7 Aufgabe 7	16
6.8 Aufgabe 8	16
6.9 Aufgabe 9	16
6.10 Aufgabe 10	16
6.11 Aufgabe 11	16
6.12 Aufgabe 12	17
6.13 Aufgabe 13	17
6.14 Aufgabe 14	17
6.15 Aufgabe 15	17
6.16 Aufgabe 16	17
6.17 Aufgabe 17	17
6.18 Aufgabe 18	17
6.19 Aufgabe 19	17
7 Durchgerechnete Lösungen	18
7.1 Aufgabe 1	18
7.2 Aufgabe 2	19
7.3 Aufgabe 3	20
7.4 Aufgabe 4	20
7.5 Aufgabe 5	21
7.6 Aufgabe 6	21
7.7 Aufgabe 7	21
7.8 Aufgabe 8	22
7.9 Aufgabe 9	22
7.10 Aufgabe 10	23
7.11 Aufgabe 11	25
7.12 Aufgabe 12	27
7.13 Aufgabe 13	29
7.14 Aufgabe 14	31
7.15 Aufgabe 15	32
7.16 Aufgabe 16	33
7.17 Aufgabe 17	33
7.18 Aufgabe 18	34
7.19 Aufgabe 19	36

7.20 Aufgabe 20 38

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Einleitung

Beim Lösen von Ungleichungen¹ stößt man gelegentlich auch auf eine Ungleichung in einer solchen Form:

$$x^2 + 5 < 6x$$

Man spricht hier von einer **Quadratischen** Ungleichung oder auch von einer Ungleichung **zweiten Grades**.

Es gibt auch Ungleichungen, in denen Potenzen mit einem größeren Exponenten als 2 auftaucht. Das könnte beispielsweise so aussehen:

$$2x^3 - 12x^2 + 22x > 12$$

oder auch so:

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x \leq 6$$

Hier haben wir eine Ungleichung 3. bzw. 4. Grades.

Da man bei Ungleichungen mit einem höheren Grad als 2 anders vorgehen muss, möchte ich die in einem eigenen Kapitel behandeln.

¹Grundlagen dazu siehe auch hier: <http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/ungleich.pdf>

3 Quadratische Ungleichungen

Quadratische Gleichungen kann man bekanntlich mit Hilfe der p - q -Formel lösen.² Bei Quadratischen Ungleichungen geht man im Prinzip genau so vor, jedoch gibt es im Detail entscheidende Unterschiede. Die p - q -Formel für Quadratische **Gleichungen** ist ja bekanntlich dadurch entstanden, dass man die Normalform der Quadratischen Gleichungen $x^2 + px + q = 0$ ein einziges Mal mit der klassischen Methode (mithilfe einer Quadratischen Ergänzung) gelöst hat. Das sah dann so aus:

$$\begin{aligned}x^2 + px + q &= 0 && | -q \\x^2 + px &= -q && | + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \text{ (Quadr. Ergänz.)} \\x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q && | \sqrt{} \\x + \frac{p}{2} &= \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} && | -\frac{p}{2} \\x_{1/2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\end{aligned}$$

3.1 Lösungsprinzip

Im folgenden möchte ich – ähnlich dem eben dargestellten Prinzip bei der Quadratischen Gleichung – eine **Ungleichung in Normalform** bearbeiten. Dabei ist natürlich auf die Besonderheiten bei Ungleichungen zu achten.

Für Ungleichungen kommen die Zeichen $<$, $>$, \leq und \geq in Betracht. Exemplarisch für alle verwende ich in dem Beispiel für die Herleitung das Zeichen \geq . Die Bezugs-Ungleichung sieht damit also so aus:

$$x^2 + px + q \geq 0$$

²Einzelheiten sind beispielsweise hier nachzulesen: <http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/quad.pdf>

Beginnen wir mit der Umformung dieser Ungleichung.

$$\begin{aligned}
 x^2 + px + q &\geq 0 && | -q \\
 x^2 + px &\geq -q && | + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \quad (\text{Quadr. Ergänz.}) \\
 x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &\geq \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\
 \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &\geq \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q
 \end{aligned}$$

Bis hierher wurde bei der Ungleichung nur addiert und subtrahiert. Auch Termumformungen fanden statt. Das ist bekanntlich unproblematisch und erfordert keine Fallunterscheidungen.

Im nächsten Schritt müsste nun auf beiden Seiten die Wurzel gezogen werden. Das bedeutet zum einen, dass die Terme auf beiden Seiten der Ungleichung vorher **nicht negativ** sein dürfen. Ansonsten gäbe es keine (reelle) Lösung für die Wurzel.

Wichtig: Damit sich beim Wurzelziehen das Ungleichheitszeichen *nicht umkehrt*, muss dafür gesorgt werden, dass nach dem Wurzelziehen auf beiden Seiten immer noch *etwas Nicht-Negatives* steht!

Dabei kann der Inhalt der Klammer auf der linken Seite (vor dem Wurzelziehen) durchaus negativ sein. Durch das Quadrieren wird in jedem Fall etwas Positives daraus. Am einfachsten wird diese Bedingung dadurch gewährleistet, dass man nach dem Wurzelziehen auf beiden Seiten der Ungleichung den jeweiligen Gesamt-Term in Betragsstriche setzt. Das sähe dann so aus:

$$\left| x + \frac{p}{2} \right| \geq \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Bei genauerer Betrachtung kann man erkennen, dass diese Betragsstriche auf der rechten Seite entbehrlich sind. Die Schreibweise der Wurzel bedeutet bekanntlich vereinbarungsgemäß stets die **positive** Wurzel. Damit erhalten wir diese Form als Ergebnis:

$$\left| x + \frac{p}{2} \right| \geq \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Dieses Ergebnis könnte man „*p-q*-Formel für Quadratische Ungleichungen“ nennen. Leider liegt in dieser Form keine so einfache Form mit $x_{1/2} = \dots$ vor, wie bei der Quadratischen Gleichung, aber damit müssen wir leben. Den Rest der Lösung muss man halt „zu Fuß“ durchführen, wie mit anderen Betragsungleichungen auch.³

³Einzelheiten sind beispielsweise hier nachzulesen: <http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/betrag.pdf>

Als nächstes wäre die Frage zu klären, was denn passiert, wenn der Radikand (der Inhalt der Wurzel) **negativ** ist. Gibt es dann keine Lösungen?

Dazu gehe ich genau einen Schritt zurück. Vor dem Wurzelziehen haben wir folgende Ungleichung:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Die rechte Seite der Ungleichung stellt in diesem Fall eine **negative** Zahl dar. Links steht jedoch auf keinen Fall etwas Negatives, denn ein Quadrat kann nur Null oder positiv sein, nicht jedoch negativ. In unserer Ungleichung steht dann auf jeden Fall links ein größerer Wert als rechts. Enthält unsere Ungleichung nun das Zeichen $>$ oder \geq , dann ist diese Ungleichung **immer** erfüllt. Es ist dann $L = \mathbb{R}$. Bei den Zeichen $<$ oder \leq dagegen ist die Ungleichung **nie** erfüllt, die Lösungsmenge ist in diesen Fällen **leer**.

3.2 Verdeutlichung an zwei Beispielen

Am besten zeige ich an Beispielen, wie der komplette Lösungsweg mit den hier gewonnen Erkenntnissen aussieht.

3.2.1 Beispiel 1

Als erstes Beispiel verwende ich das erste Anfangsbeispiel aus der Einleitung. Die Ungleichung muss aber zuerst in die Normalform gebracht werden.

$$\begin{aligned} x^2 + 5 &< 6x & | -6x \\ x^2 - 6x + 5 &< 0 \end{aligned}$$

Hier ist jetzt $p = -6$ und $q = 5$. Damit kann ich den Lösungsansatz mit der neuen Formel machen. Hierbei ist zu beachten, dass das Ungleichungszeichen \geq nur stellvertretend in der Formel vorkommt. Hier muss es durch das Zeichen $<$ ersetzt werden. Der Lösungsansatz sieht dann so aus:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 5 &< 0 \\ \left|x + \frac{p}{2}\right| &< \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ |x - 3| &< \sqrt{(-3)^2 - 5} \\ |x - 3| &< 2 \end{aligned}$$

Als nächstes muss der Betrag aufgelöst werden. Dazu ist eine **Fallunterscheidung** erforderlich. In diesem Beispiel ist der Betragsinhalt positiv oder Null für $x \geq 3$, wie man leicht mit Hilfe des Ansatzes $x - 3 \geq 0$ bestimmen kann. Negativ ist dann der Betragsinhalt für $x < 3$. Das sind demnach die beiden Fälle für unsere Fallunterscheidung.

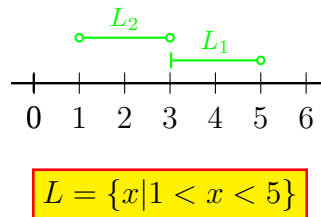
$$|x - 3| < 2$$

$$\begin{array}{l} \text{für } x \geq 3 : \\ x - 3 < 2 \quad | + 3 \\ x < 5 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{für } x < 3 : \\ -(x - 3) < 2 \\ -x + 3 < 2 \quad | - 3 \\ -x < -1 \quad | \cdot (-1) \\ x > 1 \end{array}$$

Wie von Ungleichungen⁴ gewohnt, möchte ich auch hier die Lösungsmengenbestimmung mit graphischer Unterstützung am Zahlenstrahl durchführen. Dabei wird die **Bedingung**, unter der gerechnet wurde, mit dem **Ergebnis**term übereinandergelegt. Dort, wo sie übereinstimmen, liegt die zugehörige **Teillösungsmenge**.



Die beiden Teillösungsmengen L_1 und L_2 können aneinander gelegt werden. Bei der Zahl 3 stoßen sie „nahtlos“ aneinander an. Die „3“ gehört zwar nicht mehr zur Menge L_2 , aber in L_1 ist sie enthalten. Daher können sie zu einer einzigen Menge zusammengefasst werden, wie nachfolgend dargestellt:



3.2.2 Beispiel 2

Hier ist das zweite Beispiel:

$$2x^2 + 20 \leq 12x$$

Zunächst muss auch hier die Ungleichung in die Normalform umgewandelt werden, bevor die spezielle p - q -Formel angewendet werden kann.

$$\begin{array}{rcl} 2x^2 + 20 & \leq & 12x & | - 12x \\ 2x^2 - 12x + 20 & \leq & 0 & | : 2 \\ x^2 - 6x + 10 & \leq & 0 & \\ |x - 3| & \leq & \sqrt{(-3)^2 - 10} & \\ |x - 3| & \leq & \sqrt{-1} & \end{array}$$

⁴Einzelheiten siehe hier: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/ungleich.pdf>

Der Radikand ist negativ, es existiert keine (reelle) Lösung für die Wurzel. Wie zuvor beschrieben ist dann der Term auf der linken Seite auf jeden Fall größer, als der Term rechts. (Dies bezieht sich eigentlich auf den Schritt **vor** dem Wurzelziehen, der ist hier aber nicht dargestellt. Das Ergebnis können wir dennoch übertragen.) Die Ungleichung verlangt jedoch mit dem Zeichen \leq , dass der Term links **kleiner** sein soll. Deswegen ist die Lösungsmenge leer.

$$L = \{ \}$$

4 Ungleichungen höheren Grades als 2

Betrachten wir zunächst das Beispiel einer Ungleichung dritten Grades aus der Einleitung.

$$2x^3 - 12x^2 + 22x > 12$$

Die Lösungsidee ist folgende:

- Zunächst wird die Ungleichung in die Normalform gebracht. Das bedeutet, dass auf einer Seite (meist rechts) nur noch eine Null steht, und dass der Koeffizient (die Vorzahl) vor der höchsten vorkommenden Potenz 1 ist. Man erhält auf einer Seite der Gleichung (links) ein **Polynom**.
- Dann zerlegt man das Polynom so weit es geht in Faktoren.
- Anschließend untersucht man für jeden Faktor einzeln, wo er positiv oder negativ ist.
- Danach kann man eine Vorzeichen-tabelle erstellen, in der für jeden Faktor für jeden Bereich das Vorzeichen eingetragen werden kann.
- Indem man für jeden Bereich prüft, ob eine gerade oder ungerade Anzahl an Minuszeichen vorliegt, kann man das Vorzeichen für das ganze Polynom bestimmen. Daraus ergibt sich die Lösungsmenge.

Bringen wir also unsere Ungleichung in die Normalform.

$$\begin{array}{rcl} 2x^3 - 12x^2 + 22x & > & 12 \quad | - 12 \\ 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12 & > & 0 \quad | : 2 \\ x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & > & 0 \end{array}$$

Damit haben wir wie gewünscht auf der linken Seite ein Polynom erhalten. Es gibt nun Methoden, mit denen man ein solches Polynom faktorisieren, also in mehrere Faktoren zerlegen kann. Dazu benötigt man zunächst alle Nullstellen des Polynoms.⁵

⁵Grundlagen dazu siehe auch hier: <http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/nullst.pdf>

Das möchte ich an diesem Beispiel vorführen. Wir suchen also zunächst alle Nullstellen dieses Polynoms, also die Lösungen der Gleichung:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

Wie in meinen Skript hier <http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/nullst.pdf> beschrieben, muss man zunächst eine Nullstelle durch **planvolles** Raten ermitteln. Dabei hilft dieser Lehrsatz:

Wenn ein Polynom ganzzahlige Nullstellen hat, dann sind sie Teiler des absoluten Gliedes.

Das absolute Glied ist der Summenterm, in dem kein x auftritt, hier also die -6 . Teiler von -6 sind die Zahlen $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ und ± 6 . Wir müssen hier also maximal mit 8 Zahlen testen, bis wir fündig werden. Allerdings gilt leider die Einschränkung: „... falls das Polynom ganzzahlige Nullstellen hat...“ Wenn wir Pech haben, dann gibt es keine ganzzahligen Nullstellen und wir haben ein Problem. Dann helfen nur noch Näherungsverfahren wie eine Iteration weiter, auf die ich hier aber nicht weiter eingehen möchte.

Wer faul ist, beginnt das Testen immer mit den kleinsten Zahlen, weil sich damit am einfachsten rechnen lässt. So stößt man sehr schnell auf die erste Nullstelle bei $x_{01} = 1$. Man kann leicht nachprüfen, dass das stimmt:

$$1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 0$$

Jetzt hilft ein anderer Lehrsatz weiter, der besagt:

Wenn x_0 eine Nullstelle eines Polynomes ist, dann lässt sich das Polynom durch den Faktor $(x - x_0)$ dividieren.

Wenn das so ist, dann kann man den Faktor $(x - x_0)$ aus dem Polynom ausklammern. Wie wir später sehen werden, hilft uns das entscheidend weiter.

Bleiben wir bei unserem Beispiel. Wir kennen $x_{01} = 1$, also können wir unser Polynom durch $(x - 1)$ dividieren. Wir führen eine Polynomdivision⁶ durch.

$$\begin{array}{r}
 (x^3 \quad -6x^2 \quad +11x \quad -6) : (x - 1) = x^2 - 5x + 6 \\
 -(x^3 \quad -x^2) \\
 \hline
 \quad -5x^2 \quad +11x \quad -6 \\
 - (-5x^2 \quad +5x) \\
 \hline
 \qquad \qquad \quad 6x \quad -6 \\
 \qquad \qquad - (6x \quad -6) \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 0
 \end{array}$$

Mit diesem Ergebnis lässt sich unser Polynom wie folgt faktorisieren:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x^2 - 5x + 6) \cdot (x - 1)$$

⁶Einzelheiten zur Polynomdivision siehe auch hier: <http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/polynomd.pdf>

Der erste Klammerterm $(x^2 - 5x + 6)$ lässt sich nun weiter faktorisieren. Da es sich um einen Quadratischen Term handelt, hilft der Satz von Vieta⁷ weiter. Wir müssen zunächst die Nullstellen bestimmen, was einfach mit der p - q -Formel zu bewerkstelligen geht.

$$\begin{aligned}
 x^2 - 5x + 6 &= 0 \\
 x_{1/2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6} \\
 &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} \\
 &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\
 &= \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \\
 x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 3 & x_2 &= \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 2
 \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Vieta lässt sich unser Quadratischer Term folgendermaßen faktorisieren:

$$(x^2 - 5x + 6) = (x - 2) \cdot (x - 3)$$

Der ursprüngliche Kubische Term lässt sich damit folgendermaßen faktorisieren:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$$

Mit diesen Ergebnissen können wir unsere ursprüngliche Ungleichung wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}
 x^3 - 6x^2 + 11x - 6 &> 0 \\
 (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) &> 0
 \end{aligned}$$

Unser Term besteht aus drei Faktoren, die alle in Abhängigkeit von der Variablen x positiv oder negativ sein können. Nun kommt die eigentliche Lösungsidee: Wir können für jeden Faktor relativ einfach feststellen, für welche x -Werte er welches Vorzeichen hat. Jeder Faktor kann sein Vorzeichen nur an seiner Nullstelle wechseln. Wenn wir alle Nullstellen kennen (und das tun wir ja), dann können wir eine Tabelle erstellen, in der für jeden Faktor für jeden Bereich das zugehörige Vorzeichen steht. Eine ähnliche Vorzeichentabelle habe ich auch in Kapitel 2.2 in dem bereits erwähnten Skript <http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/ungleich.pdf> verwendet.

⁷Einzelheiten zum Satz von Vieta siehe auch hier: <http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/quad.pdf>

Die Vorzeichentabelle ist folgendermaßen aufgebaut: Auf der linken Seite werden in jeder Zeile die verschiedenen zu untersuchenden Faktoren eingetragen. In der letzten Zeile steht das gesamte Polynom, also das Produkt aller untersuchten Faktoren, mit einem **P** ange deutet. Rechts daneben stehen in mehreren Spalten die jeweiligen zugehörigen Vorzeichen. Oben sind an den senkrechten Strichen die jeweiligen Bereichsgrenzen wie an einem Zahlenstrahl angetragen. Diese Tabelle liest sich folgendermaßen:

	1	2	3
$x - 1$	-	+	+
$x - 2$	-	-	+
$x - 3$	-	-	-
P	-	+	-

Nehmen wir die erste Zeile, wo der Faktor $(x - 1)$ untersucht wird. Rechts oben stehen die Zahlen 1, 2 und 3 als Bereichsgrenzen. Links von der 1 liegen alle Zahlen (x -Werte), die kleiner als 1 sind. In diesem Bereich ist der Term $(x - 1)$ immer **negativ**. Der Bereich zwischen der 1 und der 2 steht für alle x -Werte zwischen 1 und 2. Das Pluszeichen hier drückt aus, dass in diesem Bereich der Term $(x - 1)$ stets positiv ist. Entsprechend sieht es mit den Termen $(x - 2)$ und $(x - 3)$ aus. Im Bereich zwischen 2 und 3 sind die ersten beiden Terme positiv, oberhalb von 3 alle.

Die letzte Zeile steht für das ganze Polynom, ausgedrückt durch das P. Ist eine **ungerade** Anzahl von Faktoren negativ (hier 1 oder 3), dann ist das Polynom **negativ**, bei einer **geraden** Anzahl (hier 0 oder 2), ist es positiv. An den Bereichsgrenzen ist das Polynom stets Null.

In unserer Beispielaufgabe ist gesucht, wo (nach ein paar Umstellungsschritten) diese Ungleichung erfüllt ist:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 > 0$$

Für die Lösungsmenge müssen wir jetzt nur die Bereiche aufschreiben, wo die Vorzeichentabelle ein positives Ergebnis anzeigt. Das ist der Bereich zwischen 1 und 2 sowie der Bereich oberhalb von 3. Als Lösungsmenge geschrieben sieht das dann so aus:

$$L = \{x | 1 < x < 2 \vee x > 3\}$$

Wenn das Zeichen in der Ungleichung kein $>$ ist sondern ein $<$, ein \geq oder ein \leq ist, muss man ggf. die negativen Bereiche in die Lösungsmenge holen oder auch die Bereichsgrenzen mit dazunehmen. Hätten wir beispielsweise diese Ungleichung:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \leq 0$$

dann sähe die Lösungsmenge entsprechend so aus:

$$L = \{x | x \leq 1 \vee 1 \leq x \leq 3\}$$

Anmerkung: Natürlich lässt sich dieses Verfahren auch für einfache **Quadratische Ungleichungen** anwenden. Mir erscheint aber das im vorangegangenen Kapitel beschriebene eigene Verfahren etwas schneller zum Ziel zu führen. Wer jedoch keine Lust hat, sich noch ein weiteres spezielles Verfahren zu merken, der kann auch ausschließlich mit der hier beschriebenen Vorgehensweise arbeiten.

5 Übungsaufgaben

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen!

5.1 Aufgabe 1

$$x^2 + x < 6$$

5.2 Aufgabe 2

$$x^2 \leq 4x - 3$$

5.3 Aufgabe 3

$$x^2 - 4x - 5 > 0$$

5.4 Aufgabe 4

$$x^2 < 10x - 25$$

5.5 Aufgabe 5

$$12x + x^2 \leq -36$$

5.6 Aufgabe 6

$$4x^2 + 49 \geq 28x$$

5.7 Aufgabe 7

$$168x > -441 - 16x^2$$

5.8 Aufgabe 8

$$3x^2 + 8x + 6 \leq 0$$

5.9 Aufgabe 9

$$2x^2 + 28x > -100$$

5.10 Aufgabe 10

$$x + \frac{15}{x} \geq -8$$

5.11 Aufgabe 11

$$\frac{2x+2}{x+1} \leq x-2$$

5.12 Aufgabe 12

$$\frac{13x+9}{3-x} \leq x-2$$

5.13 Aufgabe 13

$$\frac{x-6}{2x-6} \geq \frac{x+4}{x+1}$$

5.14 Aufgabe 14

$$\frac{2x-5}{x-2} \geq \frac{x-5}{x-4}$$

5.15 Aufgabe 15

$$\frac{2x+3}{x+1} < \frac{-2x-1}{x+5}$$

5.16 Aufgabe 16

$$(x-3) \cdot (x+1)^2 \cdot (x-1) < 0$$

5.17 Aufgabe 17

$$(x-3) \cdot (x+1)^2 \cdot (x-1) > 0$$

5.18 Aufgabe 18

$$3x^3 - 3x^2 \leq 6x$$

5.19 Aufgabe 19

$$5x^3 + 5x^2 + 5x \geq 15$$

6 Ergebnisse der Übungsaufgaben

6.1 Aufgabe 1

$$D = \mathbb{R} \quad L = \{x \mid -3 < x < 2\}$$

6.2 Aufgabe 2

$$D = \mathbb{R} \quad L = \{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$$

6.3 Aufgabe 3

$$D = \mathbb{R} \quad L = \{x \mid x < -1 \vee x > 5\}$$

6.4 Aufgabe 4

$$D = \mathbb{R} \quad L = \{ \}$$

6.5 Aufgabe 5

$$D = \mathbb{R} \quad L = \{-6\}$$

6.6 Aufgabe 6

$$D = \mathbb{R} \quad L = \mathbb{R}$$

6.7 Aufgabe 7

$$D = \mathbb{R} \quad L = \mathbb{R} \setminus \{-5, 25\}$$

6.8 Aufgabe 8

$$D = \mathbb{R} \quad L = \{ \}$$

6.9 Aufgabe 9

$$D = \mathbb{R} \quad L = \mathbb{R}$$

6.10 Aufgabe 10

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad L = \{x \mid -5 \leq x \leq -3 \vee x > 0\}$$

6.11 Aufgabe 11

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad L = \{x \mid x \geq 4\}$$

6.12 Aufgabe 12

$$D = \mathbb{R} \setminus \{3\} \quad L = \{x \mid -5 \leq x \leq -3 \vee x > 3\}$$

6.13 Aufgabe 13

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\} \quad L = \{x \mid -9 \leq x < -1 \vee 2 \leq x < 3\}$$

6.14 Aufgabe 14

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2; 4\} \quad L = \{x \mid x < 2 \vee x > 4\}$$

6.15 Aufgabe 15

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-5; -1\} \quad L = \{x \mid -5 < x < -2 \vee -2 < x < -1\}$$

6.16 Aufgabe 16

$$D = \mathbb{R} \quad L = \{x \mid 1 < x < 3\}$$

6.17 Aufgabe 17

$$D = \mathbb{R} \quad L = \{x \mid x < -1 \vee -1 < x < 1 \vee x > 3\}$$

6.18 Aufgabe 18

$$D = \mathbb{R} \quad L = \{x \mid x \leq -1 \vee 0 \leq x \leq 2\}$$

6.19 Aufgabe 19

$$D = \mathbb{R} \quad L = \{x \mid x \geq 1\}$$

6.20 Aufgabe 20

$$D = \mathbb{R} \quad L = \{-3; 1\}$$

7 Durchgerechnete Lösungen

Für Aufgabe 1 bis 9 und ab Aufgabe 16 gilt: Es gibt keine Einschränkungen für den Definitionsbereich, daher:

$$D = \mathbb{R}$$

Bei diesen Aufgaben wird der Definitionsbereich nicht jedes mal neu angegeben.

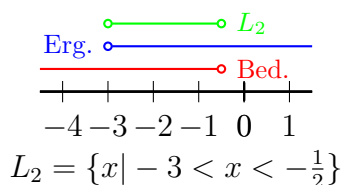
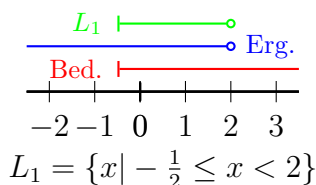
7.1 Aufgabe 1

$$x^2 + x < 6$$

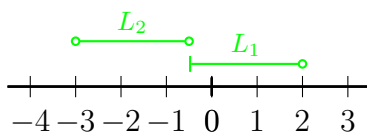
Bevor die spezielle p - q -Formel angewendet werden kann, muss die Ungleichung in die Normalform gebracht werden.

$$\begin{aligned} x^2 + x &< 6 && | -6 \\ x^2 + x - 6 &< 0 \\ |x + \frac{1}{2}| &< \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} \\ |x + \frac{1}{2}| &< \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \text{für } x \geq -\frac{1}{2}: \\ x + \frac{1}{2} < \frac{5}{2} \quad | -\frac{1}{2} \\ x < 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{für } x < -\frac{1}{2}: \\ -(x + \frac{1}{2}) < \frac{5}{2} \\ -x - \frac{1}{2} < \frac{5}{2} \quad | \cdot (-1) \\ -x < 3 \\ x > -3 \end{array}$$



Die beiden Teillösungsmengen L_1 und L_2 können aneinander gelegt werden. Bei der Zahl $-\frac{1}{2}$ stoßen sie „nahtlos“ aneinander an. Die „ $-\frac{1}{2}$ “ gehört zwar nicht mehr zur Menge L_2 , aber in L_1 ist sie enthalten. Daher können beide Teillösungsmengen zu einer einzigen Menge zusammengefasst werden, wie nachfolgend dargestellt:

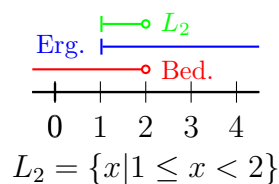
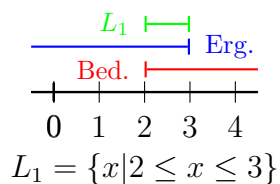


$$L = \{x \mid -3 < x < 2\}$$

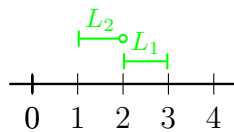
7.2 Aufgabe 2

$$\begin{aligned}
 x^2 &\leq 4x - 3 \quad | -4x + 3 \\
 x^2 - 4x + 3 &\leq 0 \\
 |x - 2| &\leq \sqrt{4 - 3} \\
 |x - 2| &\leq 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{für } x \geq 2 : & \text{für } x < 2 : \\
 x - 2 \leq 1 \quad | +2 & -(x - 2) \leq 1 \\
 x \leq 3 & -x + 2 \leq 1 \quad | -2 \\
 & -x \leq -1 \quad | \cdot (-1) \\
 & x \geq 1
 \end{array}$$



Die beiden Teillösungsmengen L_1 und L_2 können aneinander gelegt werden. Bei der Zahl 2 stoßen sie „nahtlos“ aneinander an. Die 2 gehört zwar nicht mehr zur Menge L_2 , aber in L_1 ist sie enthalten. Daher können beide Teillösungsmengen zu einer einzigen Menge zusammengefasst werden, wie nachfolgend dargestellt:

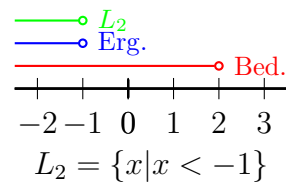
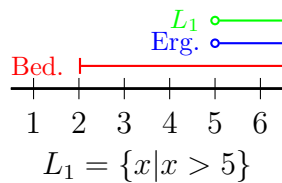


$$L = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$$

7.3 Aufgabe 3

$$\begin{aligned}x^2 - 4x - 5 &> 0 \\|x - 2| &> \sqrt{4 + 5} \\|x - 2| &> 3\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \text{für } x \geq 2 : \\ x - 2 > 3 \quad | + 2 \\ x > 5 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{für } x < 2 : \\ -(x - 2) > 3 \\ -x + 2 > 3 \quad | - 2 \\ -x > 1 \quad | \cdot (-1) \\ x < -1 \end{array}$$



Die Teillösungsmengen stoßen **nicht** aneinander. Die Gesamtlösungsmenge muss demnach mit zwei Teilstücken angegeben werden.

$$L = \{x | x < -1 \vee x > 5\}$$

7.4 Aufgabe 4

$$\begin{aligned}x^2 &< 10x - 25 \quad | - 10x + 25 \\x^2 - 10x + 25 &< 0 \\|x - 5| &< \sqrt{5^2 - 25} \\|x - 5| &< 0\end{aligned}$$

Hier kann man schon abbrechen. Ein Betrag kann niemals kleiner als Null sein. Die Lösungsmenge ist daher leer.

$$L = \{ \}$$

7.5 Aufgabe 5

$$\begin{aligned} 12x + x^2 &\leq -36 && | + 36 \\ x^2 + 12x + 36 &\leq 0 \\ |x + 6| &\leq \sqrt{6^2 - 36} \\ |x + 6| &\leq 0 \end{aligned}$$

Hier kann man schon aufhören. Ein Betrag kann niemals kleiner als Null werden, er kann nur gleich Null werden. Das ist der Fall für $x = -6$.

$$L = \{-6\}$$

7.6 Aufgabe 6

$$\begin{aligned} 4x^2 + 49 &\geq 28x && | - 28x \\ 4x^2 - 28x + 49 &\geq 0 && | : 4 \\ x^2 - 7x + \frac{49}{4} &\geq 0 \\ |x - \frac{7}{2}| &\geq \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{49}{4}} \\ |x - \frac{7}{2}| &\geq 0 \end{aligned}$$

Hier kann man schon aufhören. Ein Betrag ist **immer** größer oder gleich Null. **Alle** Reellen Zahlen erfüllen diese Ungleichung.

$$L = \mathbb{R}$$

7.7 Aufgabe 7

$$\begin{aligned} 168x &> -441 - 16x^2 && | + 441 + 16x^2 \\ 16x^2 + 168x + 441 &> 0 && | : 16 \\ x^2 + \frac{21}{2}x + \frac{441}{16} &> 0 \\ |x + \frac{21}{4}| &> \sqrt{\frac{441}{16} - \frac{441}{16}} \\ |x + \frac{21}{4}| &> 0 \end{aligned}$$

Hier kann man schon aufhören. Ein Betrag ist **immer** größer oder gleich Null. **Alle** Reellen Zahlen erfüllen diese Ungleichung außer genau der einen der Zahl, für die der Betrag Null wird. Die muss in der Lösungsmenge aus der Menge der Reellen Zahlen ausgeschlossen werden.

$$L = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{21}{4}\}$$

7.8 Aufgabe 8

$$\begin{aligned} 3x^2 + 8x + 6 &\leq 0 && | : 3 \\ x^2 + \frac{8}{3}x + 2 &\leq 0 \\ |x + \frac{4}{3}| &\leq \sqrt{\frac{16}{9} - \frac{18}{9}} \\ |x + \frac{4}{3}| &\leq \sqrt{-\frac{2}{9}} \end{aligned}$$

Da der Radikand negativ ist, ist die rechte Seite der Ungleichung (im virtuell vorletzten Schritt) auf jeden Fall negativ, die linke größer oder gleich Null. Das vorgegebene Ungleichungszeichen verlangt aber, dass die **linke** Seite **kleiner** als die rechte (oder gleich) ist. Diese Bedingung kann niemals erfüllt sein, die Lösungsmenge ist daher leer.

$$L = \{ \}$$

7.9 Aufgabe 9

$$\begin{aligned} 2x^2 + 28x &> -100 && | + 100 \\ 2x^2 + 28x + 100 &> 0 && | : 2 \\ x^2 + 14x + 50 &> 0 \\ |x + 7| &> \sqrt{49 - 50} \\ |x + 7| &> \sqrt{-1} \end{aligned}$$

Da der Radikand negativ ist, ist die rechte Seite der Ungleichung (im virtuell vorletzten Schritt) auf jeden Fall negativ, die linke größer oder gleich Null. Das vorgegebene Ungleichungszeichen verlangt, dass die linke Seite **größer** als die rechte sein soll, die Ungleichung ist daher **immer** erfüllt.

$$L = \mathbb{R}$$

7.10 Aufgabe 10

$$x + \frac{15}{x} \geq -8$$

Ein Bruch steht in der Ungleichung. Für $x = 0$ ist der Nenner Null, der Bruch also nicht definiert. Die Null ist aus dem Definitionsbereich auszuschließen.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$x + \frac{15}{x} \geq -8 \quad | \cdot x$$

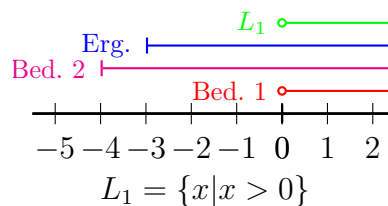
An dieser Stelle ist bereits eine **Fallunterscheidung** notwendig wie bei allen Ungleichungen mit Brüchen, denn der Term, mit dem multipliziert werden soll, kann positiv oder negativ sein.⁸ Aus Platzgründen behandle ich die Fälle nacheinander.

für $x > 0$:

$$\begin{aligned} x^2 + 15 &\geq -8x && | + 8x \\ x^2 + 8x + 15 &\geq 0 \\ |x + 4| &\geq \sqrt{16 - 15} \\ |x + 4| &\geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \text{für } x \geq -4 : & \text{für } x < -4 : \\ x + 4 \geq 1 & | - 4 \\ x \geq -3 & \text{(entfällt)} \end{array}$$

Der zweite Fall entfällt, da er komplett außerhalb des Bereiches der vorgeschalteten Bedingung ($x > 0$) liegt. Es folgt die grafische Veranschaulichung der ersten Teillösungsmenge.



Der zweite Fall der ersten Fallunterscheidung muss nicht neu gerechnet werden. Bis auf die Richtung des Ungleichungszeichens ist die Rechnung identisch mit dem ersten Fall. Daher übernehme ich das Ergebnis direkt aus der ersten Rechnung.

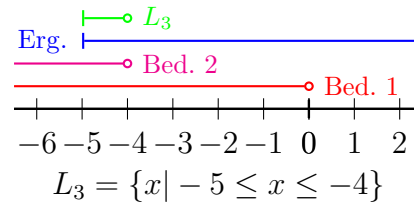
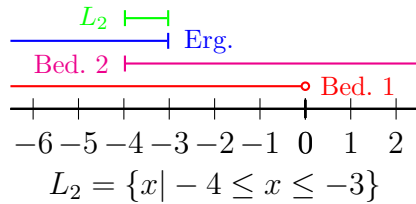
⁸Einzelheiten siehe hier: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/ungleich.pdf>

für $x < 0$:

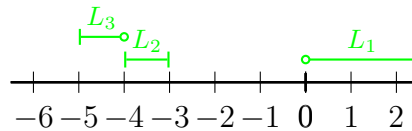
$$|x + 4| \leq 1$$

$$\begin{array}{l} \text{für } x \geq -4 : \\ x + 4 \leq 1 \quad | -4 \\ x \leq -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{für } x < -4 : \\ -(x + 4) \leq 1 \\ -x - 4 \leq 1 \quad | +4 \\ -x \leq 5 \quad | \cdot (-1) \\ x \geq -5 \end{array}$$



Schauen wir uns nun die drei Teillösungsmengen in einem gemeinsamen Diagramm an.



Die Teillösungsmengen L_2 und L_3 stoßen direkt aneinander. Sie können also zusammengefasst werden. Zur Teillösungsmenge L_1 klappt dann allerdings eine Lücke, so dass diese separat angegeben werden muss.

$$L = \{x \mid -5 \leq x \leq -3 \vee x > 0\}$$

7.11 Aufgabe 11

$$\frac{2x+2}{x+1} \leq x-2$$

Ein Bruch steht in der Ungleichung. Für $x = -1$ ist der Nenner Null, der Bruch also nicht definiert. Die -1 ist aus dem Definitionsbereich auszuschließen.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\frac{2x+2}{x+1} \leq x-2 \quad | \cdot (x+1)$$

An dieser Stelle ist bereits eine **Fallunterscheidung** notwendig wie bei allen Ungleichungen mit Brüchen, denn der Term, mit dem multipliziert werden soll, kann positiv oder negativ sein. Aus Platzgründen behandle ich die Fälle nacheinander.

für $x > -1$:

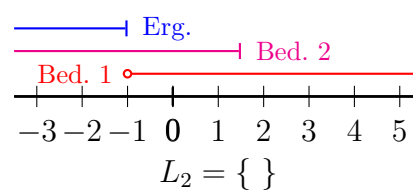
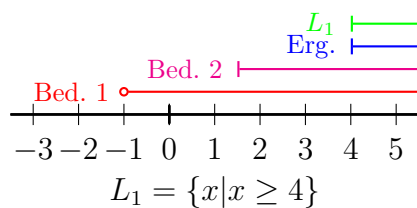
$$\begin{aligned} 2x+2 &\leq (x+1) \cdot (x-2) \\ 2x+2 &\leq x^2 - 2x + x - 2 & | -x^2 + x + 2 \\ -x^2 + 3x + 4 &\leq 0 & | \cdot (-1) \\ x^2 - 3x - 4 &\geq 0 \\ |x - \frac{3}{2}| &\geq \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} \\ |x - \frac{3}{2}| &\geq \frac{5}{2} \end{aligned}$$

für $x \geq \frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned} x - \frac{3}{2} &\geq \frac{5}{2} & | + \frac{3}{2} \\ x &\geq 4 \end{aligned}$$

für $x < \frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned} -(x - \frac{3}{2}) &\geq \frac{5}{2} \\ -x + \frac{3}{2} &\geq \frac{5}{2} & | - \frac{3}{2} \\ -x &\geq 1 & | \cdot (-1) \\ x &\leq -1 \end{aligned}$$

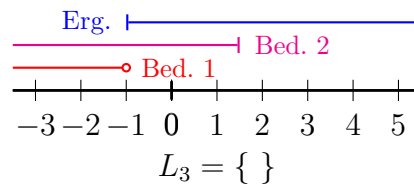


Im zweite Fall liegt das Ergebnis **außerhalb** des Bereiches von Bedingung 1. Die Teillösungsmenge L_2 ist daher leer.

Der zweite Fall der ersten Fallunterscheidung muss nicht neu berechnet werden. Bis auf die Richtung des Ungleichungszeichens ist die Rechnung identisch mit dem ersten Fall. Daher übernehme ich das Ergebnis direkt aus der ersten Rechnung.

$$\begin{array}{l}
\text{für } x < -1 : \\
|x - \frac{3}{2}| \leq \frac{5}{2} \\
\text{für } x \geq \frac{3}{2} : \qquad \text{für } x < \frac{3}{2} : \\
\text{(entfällt)} \qquad \begin{array}{l}
-(x - \frac{3}{2}) \leq \frac{5}{2} \\
-x + \frac{3}{2} \leq \frac{5}{2} \quad | -\frac{3}{2} \\
-x \leq 1 \quad | \cdot (-1) \\
x \geq -1
\end{array}
\end{array}$$

Der linke Fall entfällt, da er komplett außerhalb des Bereiches der vorgeschalteten Bedingung ($x < -1$) liegt. Es folgt die grafische Veranschaulichung der dritten Teillösungsmenge.



Da das Ergebnis komplett außerhalb von Bedingung 1 liegt, ist die Teillösungsmenge L_3 leer. Damit ist die Gesamtlösungsmenge identisch mit der Teillösungsmenge L_1 .

$$L = \{x | x \geq 4\}$$

7.12 Aufgabe 12

$$\frac{13x + 9}{3 - x} \leq x - 2$$

Ein Bruch steht in der Ungleichung. Für $x = 3$ ist der Nenner Null, der Bruch also nicht definiert. Die 3 ist aus dem Definitionsbereich auszuschließen.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$\frac{13x + 9}{3 - x} \leq x - 2 \quad | \cdot (3 - x)$$

An dieser Stelle ist bereits eine **Fallunterscheidung** notwendig wie bei allen Ungleichungen mit Brüchen, denn der Term, mit dem multipliziert werden soll, kann positiv oder negativ sein. Aus Platzgründen behandle ich die Fälle nacheinander. Ich beginne mit dem **positiven** Fall.

Aufgepasst: Im Fall $x < 3$ ist der Faktor $(3 - x)$, mit dem multipliziert wird, nicht negativ, sondern **positiv**! Das wird erfahrungsgemäß leicht übersehen.

für $x < 3$:

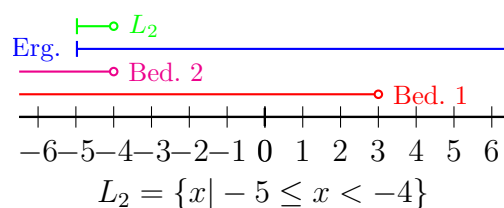
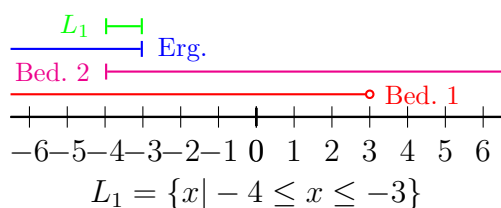
$$\begin{aligned} 13x + 9 &\leq (x - 2) \cdot (3 - x) \\ 13x + 9 &\leq 3x - x^2 - 6 + 2x \\ 13x + 9 &\leq -x^2 + 5x - 6 \quad | + x^2 - 5x + 6 \\ x^2 + 8x + 15 &\leq 0 \\ |x + 4| &\leq \sqrt{16 - 15} \\ |x + 4| &\leq 1 \end{aligned}$$

für $x \geq -4$:

$$\begin{aligned} x + 4 &\leq 1 \quad | -4 \\ x &\leq -3 \end{aligned}$$

für $x < -4$:

$$\begin{aligned} -(x + 4) &\leq 1 \\ -x - 4 &\leq 1 \quad | +4 \\ -x &\leq 5 \quad | \cdot (-1) \\ x &\geq -5 \end{aligned}$$



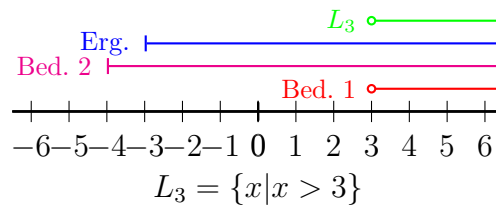
Der zweite Fall der ersten Fallunterscheidung muss nicht neu gerechnet werden. Bis auf die Richtung des Ungleichungszeichens ist die Rechnung identisch mit dem ersten Fall. Daher übernehme ich das Ergebnis direkt aus der ersten Rechnung.

für $x > 3$:

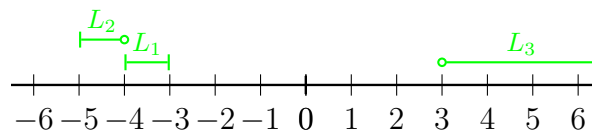
$$|x + 4| \geq 1$$

$$\begin{array}{ll} \text{für } x \geq -4 : & \text{für } x < -4 : \\ x + 4 \geq 1 & | - 4 \\ x \geq -3 & \text{(entfällt)} \end{array}$$

Der rechte Fall entfällt, da er komplett außerhalb des Bereiches der vorgeschalteten Bedingung ($x > 3$) liegt. Es folgt die grafische Veranschaulichung der dritten Teillösungsmenge.



Schauen wir uns nun die drei Teillösungsmengen in einem gemeinsamen Diagramm an.



Die Teillösungsmengen L_2 und L_1 stoßen direkt aneinander. Sie können also zusammengefasst werden. Zur Teillösungsmenge L_3 klafft dann allerdings eine Lücke, so dass diese separat angegeben werden muss.

$$L = \{x | -5 \leq x \leq -3 \vee x > 3\}$$

7.13 Aufgabe 13

$$\frac{x-6}{2x-6} \geq \frac{x+4}{x+1}$$

Zwei Brüche stehen in der Ungleichung. Für $x = 3$ und $x = -1$ sind die Nenner Null, die Brüche also nicht definiert. Die 3 und die -1 sind daher aus dem Definitionsbereich auszuschließen.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$$

$$\frac{x-6}{2x-6} \geq \frac{x+4}{x+1} \quad | \cdot (2x-6) \cdot (x+1)$$

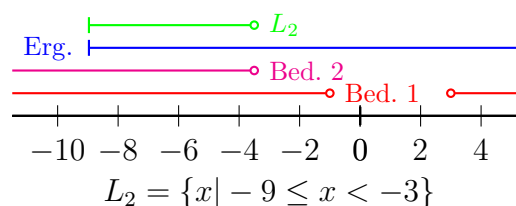
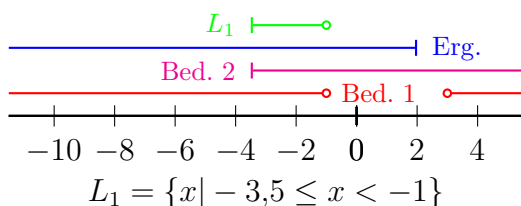
An dieser Stelle ist bereits eine **Fallunterscheidung** notwendig wie bei allen Ungleichungen mit Brüchen, denn der Term, mit dem multipliziert werden soll, kann positiv oder negativ sein. Aus Platzgründen behandle ich die Fälle nacheinander. Ich beginne mit dem **positiven** Fall.

für $x < -1 \vee x > 3$:

$$\begin{aligned} (x-6) \cdot (x+1) &\geq (x+4) \cdot (2x-6) \\ x^2 + x - 6x - 6 &\geq 2x^2 - 6x + 8x - 24 & | -2x^2 - 2x + 24 \\ -x^2 - 7x + 18 &\geq 0 & | \cdot (-1) \\ x^2 + 7x - 18 &\leq 0 \\ \left|x + \frac{7}{2}\right| &\leq \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{72}{4}} \\ \left|x + \frac{7}{2}\right| &\leq \sqrt{\frac{121}{4}} \\ \left|x + \frac{7}{2}\right| &\leq \frac{11}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{für } x \geq -3,5 : \\ x + 3,5 &\leq 5,5 & | -3,5 \\ x &\leq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{für } x < -3,5 : \\ -(x + 3,5) &\leq 5,5 \\ -x - 3,5 &\leq 5,5 & | +3,5 \\ -x &\leq 9 & | \cdot (-1) \\ x &\geq -9 \end{aligned}$$



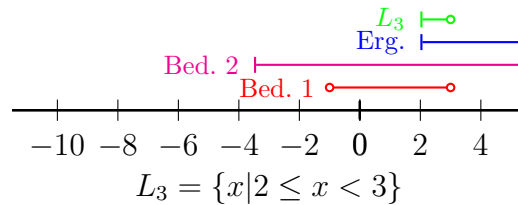
Der zweite Fall der ersten Fallunterscheidung muss nicht neu gerechnet werden. Bis auf die Richtung des Ungleichungszeichens ist die Rechnung identisch mit dem ersten Fall. Daher übernehme ich das Ergebnis direkt aus der ersten Rechnung.

für $-1 < x < 3$:

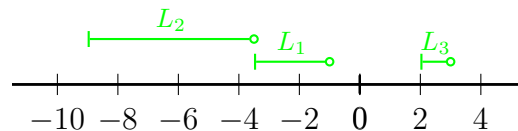
$$|x + 3,5| \geq 5,5$$

$$\begin{array}{ll} \text{für } x \geq -3,5 : & \text{für } x < -3,5 : \\ x + 3,5 \geq 5,5 \quad | - 3,5 & \\ x \geq 2 & \text{(entfällt)} \end{array}$$

Der rechte Fall entfällt, da er komplett außerhalb des Bereiches der vorgeschalteten Bedingung ($-1 < x < 3$) liegt. Es folgt die grafische Veranschaulichung der dritten Teillösungsmenge.



Schauen wir uns nun die drei Teillösungsmengen in einem gemeinsamen Diagramm an.



Die Teillösungsmengen L_2 und L_1 stoßen direkt aneinander. Sie können also zusammengefasst werden. Zur Teillösungsmenge L_3 klafft dann allerdings eine Lücke, so dass diese separat angegeben werden muss.

$$L = \{x \mid -9 \leq x < -1 \vee 2 \leq x < 3\}$$

7.14 Aufgabe 14

$$\frac{2x-5}{x-2} \geq \frac{x-5}{x-4}$$

Zwei Brüche stehen in der Ungleichung. Für $x = 2$ und $x = 4$ sind die Nenner Null, die Brüche also nicht definiert. Die 2 und die 4 sind daher aus dem Definitionsbereich auszuschließen.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2; 4\}$$

$$\frac{2x-5}{x-2} \geq \frac{x-5}{x-4} \quad | \cdot (x-2) \cdot (x-4)$$

An dieser Stelle ist bereits eine **Fallunterscheidung** notwendig wie bei allen Ungleichungen mit Brüchen, denn der Term, mit dem multipliziert werden soll, kann positiv oder negativ sein. Aus Platzgründen behandle ich die Fälle nacheinander. Ich beginne mit dem **positiven** Fall.

für $x < 2 \vee x > 4$:

$$\begin{aligned} (2x-5) \cdot (x-4) &\geq (x-5) \cdot (x-2) \\ 2x^2 - 8x - 5x + 20 &\geq x^2 - 2x - 5x + 10 \quad | -x^2 + 7x - 10 \\ x^2 - 6x + 10 &\geq 0 \\ |x-3| &\geq \sqrt{9-10} \\ |x-3| &\geq \sqrt{-1} \end{aligned}$$

Der Radikand ist **negativ**. Das bedeutet, die linke Seite der Ungleichung ist **stets größer**, als die rechte. Da genau das durch das Zeichen \geq gefordert wird, ist die Ungleichung **immer erfüllt**. Alle x aus dem untersuchten Bereich gehören zur Lösungsmenge.

$$L_1 = \{x | x < 2 \vee x > 4\}$$

Der zweite Fall der ersten Fallunterscheidung muss nicht neu gerechnet werden. Bis auf die Richtung des Ungleichungszeichens ist die Rechnung identisch mit dem ersten Fall. Daher übernehme ich das Ergebnis direkt aus der ersten Rechnung.

für $2 < x < 4$:

$$|x-3| \leq \sqrt{-1}$$

Wie oben beschrieben ist die linke Seite der Ungleichung stets **größer**, als die rechte Seite. Das geforderte Zeichen \leq steht dazu im Widerspruch. Die zweite Teillösungsmenge ist daher leer.

$$L_2 = \{ \}$$

Die Teillösungsmenge L_1 ist deshalb gleichzeitig die Gesamtlösungsmenge.

$$L = \{x | x < 2 \vee x > 4\}$$

7.15 Aufgabe 15

$$\frac{2x+3}{x+1} < \frac{-2x-1}{x+5}$$

Zwei Brüche stehen in der Ungleichung. Für $x = -1$ und $x = -5$ sind die Nenner Null, die Brüche also nicht definiert. Die -1 und die -5 sind daher aus dem Definitionsbereich auszuschließen.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-5; -1\}$$

$$\frac{2x+3}{x+1} < \frac{-2x-1}{x+5} \quad | \cdot (x+1) \cdot (x+5)$$

An dieser Stelle ist die erste **Fallunterscheidung** notwendig wie bei allen Ungleichungen mit Brüchen, denn der Term, mit dem multipliziert werden soll, kann positiv oder negativ sein. Aus Platzgründen behandle ich die Fälle nacheinander. Ich beginne mit dem **positiven** Fall.

für $x < -5 \vee x > -1$:

$$\begin{aligned} (2x+3) \cdot (x+5) &< (-2x-1) \cdot (x+1) \\ 2x^2 + 10x + 3x + 15 &< -2x^2 - 2x - x - 1 & | + 2x^2 + 3x + 1 \\ 4x^2 + 16x + 16 &< 0 & | : 4 \\ x^2 + 4x + 4 &< 0 \\ |x+2| &< \sqrt{4-4} \\ |x+2| &< 0 \end{aligned}$$

Da ein Betrag **auf keinen Fall negativ** sein kann, kann diese Ungleichung niemals erfüllt sein. Die erste Teillösungsmenge ist leer.

$$L_1 = \{ \}$$

Der zweite Fall der ersten Fallunterscheidung muss nicht neu gerechnet werden. Bis auf die Richtung des Ungleichungszeichens ist die Rechnung identisch mit dem ersten Fall. Daher übernehme ich das Ergebnis direkt aus der ersten Rechnung.

für $-5 < x < -1$:

$$|x+2| > 0$$

Da ein Betrag stets größer oder gleich Null ist, ist diese Ungleichung fast immer erfüllt. Lediglich der x -Wert, für den der Betrag Null wird (also $x = -2$) muss aus der zweiten Teillösungsmenge ausgeschlossen werden. Ansonsten ist diese Lösungsmenge identisch mit der Bedingung für den untersuchten Bereich. Da L_1 leer ist, ist dies auch die Gesamtlösungsmenge.

$$L = \{x \mid -5 < x < -2 \vee -2 < x < -1\} \text{ oder } L = \{x \mid -5 < x < -1\} \setminus \{-2\}$$

7.16 Aufgabe 16

$$(x - 3) \cdot (x + 1)^2 \cdot (x - 1) < 0$$

Hier haben wir bereits eine Polynomform vorliegen, wobei das Polynom auch schon faktorisiert ist. Das erspart viel Arbeit. Ohne weitere Rechnung kann man sofort die Nullstellen ablesen. Die Nullstelle des ersten Faktors liegt bei $x_{01} = 3$, des zweiten bei $x_{02} = -1$ und des dritten bei $x_{03} = 1$. Die Werte werden in eine aufsteigende Reihenfolge gebracht und die Vorzeichen-tabelle kann erstellt werden.

	-1	1	3	
$x - 3$	-	-	-	+
$(x + 1)^2$	+	+	+	+
$x - 1$	-	-	+	+
P	+	+	-	+

Unterhalb von 3 ist der erste Term $(x - 3)$ stets negativ. Für den dritten Term $(x - 1)$ gilt das überall unterhalb von 1. Der zweite Term $(x + 1)^2$ ist niemals negativ, weil es ein quadratischer Term ist, er nimmt jedoch bei $x = -1$ den Wert 0 an.

Wir können ablesen, dass unser Gesamt-Polynom nur im Bereich zwischen 1 und 3 negativ ist. Das ergibt diese Lösungsmenge:

$$L = \{x \mid 1 < x < 3\}$$

7.17 Aufgabe 17

$$(x - 3) \cdot (x + 1)^2 \cdot (x - 1) > 0$$

Diese Aufgabe ist fast identisch mit Aufgabe 16, nur das Ungleichheitszeichen steht in der anderen Richtung. Die Untersuchungen auf Nullstellen und die Vorzeichen-tabelle sind aber identisch. Trotzdem muss man bei der Erstellung der Lösungsmenge aufpassen.

Betrachten wir die Vorzeichen-tabelle. Auf den ersten Blick ist das Gesamt-Polynom unterhalb von 1 und oberhalb von 3 positiv. Aber bei $x = -1$ ist er Null. Daher muss die -1 aus der Lösungsmenge entfernt werden. Die Lösungsmenge sieht damit so aus:

$$L = \{x \mid x < -1 \vee -1 < x < 1 \vee x > 3\} \text{ oder } L = \{x \mid x < 1 \vee x > 3\} \setminus \{-1\}$$

7.18 Aufgabe 18

$$3x^3 - 3x^2 \leq 6x$$

Zunächst wird die Ungleichung in die Normalform gebracht.

$$\begin{array}{rcl} 3x^3 - 3x^2 & \leq & 6x \quad | - 6x \\ 3x^3 - 3x^2 - 6x & \leq & 0 \quad | : 3 \\ x^3 - x^2 - 2x & \leq & 0 \end{array}$$

Zur Faktorisierung kann x ausgeklammert werden, weil das absolute Glied fehlt.

$$\begin{array}{rcl} x^3 - x^2 - 2x & \leq & 0 \\ x \cdot (x^2 - x - 2) & \leq & 0 \end{array}$$

Es gilt der Lehrsatz:

Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist.

Der erste Faktor ist x . Damit ist sofort die erste Nullstelle bei $x_{01} = 0$ bekannt.

Der Klammerterm ist ein Quadratischer Term. Dessen Nullstellen können wir mit der p - q -Formel bestimmen.

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 \\ x_{1/2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2} \\ &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \\ x_{02/3} &= \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \\ x_{02} &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \quad x_{03} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Satzes von Vieta kann damit die vollständige Faktorisierung des Polynomes vorgenommen werden.

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 2x &= x \cdot (x^2 - x - 2) \\ x^3 - x^2 - 2x &= x \cdot (x - 2) \cdot (x + 1) \end{aligned}$$

Damit ist die Lösungsmenge von dieser Ungleichung zu bestimmen:

$$x \cdot (x - 2) \cdot (x + 1) \leq 0$$

Jetzt kann die zugehörige Vorzeichen­ta­bel­le erstellt werden. Die einzutragenden Grenzen sind die drei Nullstellen bei 0, 2 und -1 . Sie müssen in aufsteigender Reihenfolge an die Bereichsgrenzen geschrieben werden. Die drei Faktoren auf der linken Seite können in beliebiger Reihenfolge eingetragen werden. Negativ ist das Vorzeichen des Polynoms unterhalb von -1 sowie zwischen 0 und 2. Diese Bereiche müssen in die Lösungsmenge übernommen werden. Weil das Zeichen \leq auch das Gleichheitszeichen beinhaltet, zählen die Bereichsgrenzen mit zur Lösungsmenge. Die sieht somit so aus:

	-1	0	2	
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$	$+$
P	$-$	$+$	$-$	$+$

$$L = \{x \mid x \leq -1 \vee 0 \leq x \leq 2\}$$

7.19 Aufgabe 19

$$5x^3 + 5x^2 + 5x \geq 15$$

Auch diese Ungleichung bringen wir zuerst in die Normalform.

$$\begin{array}{rcl} 5x^3 + 5x^2 + 5x & \geq & 15 \quad | -15 \\ 5x^3 + 5x^2 + 5x - 15 & \geq & 0 \quad | :5 \\ x^3 + x^2 + x - 3 & \geq & 0 \end{array}$$

Wir suchen die Nullstellen des Terms auf der linken Seite.

$$x^3 + x^2 + x - 3 = 0$$

Da keine Besonderheiten vorliegen, muss eine Nullstelle durch **planvolles** Raten ermittelt werden. Teiler des absoluten Gliedes sind ± 1 und ± 3 . Recht schnell findet man die erste Nullstelle bei $x_{01} = 1$ heraus, wie die Probe zeigt:

$$1^3 + 1^2 + 1 - 3 = 0$$

Also kann man den Term $(x - 1)$ ausklammern. Den Restterm erhalten wir durch eine Polynomdivision.

$$\begin{array}{r} (x^3 \quad +x^2 \quad +x \quad -3) : (x - 1) = x^2 + 2x + 3 \\ -(x^3 \quad -x^2) \\ \hline \quad 2x^2 \quad +x \quad -3 \\ - \quad (2x^2 \quad -2x) \\ \hline \qquad \quad 3x \quad -3 \\ - \quad (3x \quad -3) \\ \hline \qquad \qquad \qquad 0 \end{array}$$

Mit diesem Ergebnis lässt sich unser Polynom wie folgt faktorisieren:

$$x^3 + x^2 + x - 3 = (x - 1) \cdot (x^2 + 2x + 3)$$

Der zweite Faktor ist ein Quadratischer Term. Dessen Nullstellen können wir mit der p - q -Formel ermitteln.

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 3 &= 0 \\ x_{1/2} &= 1 \pm \sqrt{1^2 - 3} \\ &= 1 \pm \sqrt{-2} \end{aligned}$$

Offensichtlich existieren keine (reellen) Nullstellen, weil die Wurzel aus einer negativen Zahl keine (reellen) Lösungen hat. Das bedeutet einerseits, dass wir den Term nicht weiter faktorisieren können. Andererseits bedeutet das aber auch, dass der Term sein Vorzeichen nicht wechseln kann. Da eine Polynomfunktion stetig ist, müsste beim Vorzeichenwechsel die Null auftreten. Es genügt daher, wenn man für einen beliebigen x -Wert das Vorzeichen bestimmt. Dieses Vorzeichen gilt dann im gesamten Bereich der Reellen Zahlen, egal, mit welchem x -Wert man gerechnet hat. Ich bestimme das Vorzeichen exemplarisch für $x = 0$:

$$0^2 + 2 \cdot 0 + 3 = 3 > 0$$

Der Klammerterm $(x^2 + 2x + 3)$ ist demnach stets positiv. Daher bestimmt der andere Term $(x - 1)$ ganz allein das Vorzeichen des gesamten Polynoms. Auch ohne Rechnung ist sofort klar, dass das Vorzeichen oberhalb von 1 positiv ist. Die Rechnung ist trivial:

$$\begin{array}{r} x - 1 \geq 0 \quad | + 1 \\ x \geq 1 \end{array}$$

Damit kann die Lösungsmenge angegeben werden:

$$L = \{x | x \geq 1\}$$

7.20 Aufgabe 20

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 9 \leq 12x$$

Zuerst wird die Ungleichung in die Normalform gebracht.

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 9 &\leq 12x & | -12x \\ x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 &\leq 0 \end{aligned}$$

Wir suchen die Nullstellen des Terms auf der linken Seite.

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = 0$$

Da keine Besonderheiten vorliegen, muss eine Nullstelle durch **planvolles** Raten ermittelt werden. Teiler des absoluten Gliedes sind ± 1 , ± 3 und ± 9 . Recht schnell findet man die erste Nullstelle bei $x_{01} = 1$ heraus, wie die Probe zeigt:

$$1^4 + 4 \cdot 1^3 - 1^2 - 12 \cdot 1 + 9 = 0$$

Also kann man den Term $(x - 1)$ ausklammern. Den Restterm erhalten wir durch eine Polynomdivision.

$$\begin{array}{r} (x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9) : (x - 1) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9 \\ -(x^4 - x^3) \\ \hline 5x^3 - 2x^2 - 12x + 9 \\ - (5x^3 - 5x^2) \\ \hline 3x^2 - 12x + 9 \\ - (3x^2 - 3x) \\ \hline -9x + 9 \\ - (-9x + 9) \\ \hline 0 \end{array}$$

Mit diesem Ergebnis lässt sich unser Polynom wie folgt faktorisieren:

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = (x - 1) \cdot (x^3 + 5x^2 + 3x - 9)$$

Es bleibt noch ein Polynom 3. Grades, das wir faktorisieren müssen. Wiederum müssen wir eine Nullstelle durch **planvolles** Raten ermitteln. Teiler des absoluten Gliedes sind ± 1 , ± 3 und ± 9 . Recht schnell findet man wiederum eine Nullstelle bei $x_{01} = 1$ heraus, wie die Probe zeigt:

$$1^3 + 5 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 9 = 0$$

Also kann man den Term $(x - 1)$ ausklammern. Den Restterm erhalten wir erneut durch eine Polynomdivision.

$$\begin{array}{r} (x^3 + 5x^2 + 3x - 9) : (x - 1) = x^2 + 6x + 9 \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline 6x^2 + 3x - 9 \\ - (6x^2 - 6x) \\ \hline 9x - 9 \\ - (9x - 9) \\ \hline 0 \end{array}$$

Mit diesem Ergebnis können wir das Ursprungs-Polynom weiter faktorisieren:

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = (x - 1)^2 \cdot (x^2 + 6x + 9)$$

Den Quadratischen Restterm kann man nun mit der p - q -Formel und dem Satz von Vieta weiter zerlegen. Eventuell erkennt man in ihm aber auch ein Binom:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

Gleichgültig, mit welcher Methode die Faktorisierung erfolgte, können wir das Ursprungs-Polynom endgültig faktorisieren:

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = (x - 1)^2 \cdot (x + 3)^2$$

Die beiden Nullstellen liegen bei 1 und -3 . Damit kann die Vorzeichen-tabelle angelegt werden.

Nun sind aber beide Terme, deren Vorzeichen hier eingetragen werden, quadratische Terme, die deshalb niemals negativ werden können. Deswegen enthält die Vorzeichen-tabelle ausschließlich Pluszeichen. Lediglich an den Bereichsgrenzen ist mal der eine mal der andere Term Null und somit auch das gesamte Polynom.

	-3	1	
$(x - 1)^2$	+	+	+
$(x + 3)^2$	+	+	+
T	+	+	+

Die (umgeformte) Ungleichung, deren Lösungsmenge wir suchen, lautet:

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 \leq 0$$

Das Polynom wird zwar niemals negativ, erreicht aber die Null bei $x = -3$ und bei $x = 1$. Daher lautet die Lösungsmenge:

$$L = \{-3; 1\}$$