Quadratische Ungleichungen

W. Kippels

27. Oktober 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Beim Lösen von Ungleichungen stößt man gelegentlich auch auf eine sogenannte *Quadratische Ungleichung*. Hier ein Beispiel:

$$x^2 - 6x + 5 < 0$$

Quadratische Gleichungen kann man bekanntlich mit Hilfe der p-q-Formel lösen.[1] Bei Quadratischen Ungleichungen geht man im Prinzip genau so vor, jedoch gibt es im Detail entscheidende Unterschiede. Die p-q-Formel für Quadratische **Gleichungen** ist ja bekanntlich dadurch entstanden, dass man die Normalform der Quadratischen Gleichungen $\boxed{x^2 + px + q = 0}$ ein einziges Mal mit der klassischen Methode (mithilfe einer Quadratischen Ergänzung) gelöst hat. Das sah dann so aus:

$$\begin{array}{rcll}
x^2 + px + q & = & 0 & | - q \\
x^2 + px & = & -q & | + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \text{ (Quadr. Ergänz.)} \\
x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 & = & \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q & \\
\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 & = & \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q & |\sqrt{} \\
x + \frac{p}{2} & = & \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} & | - \frac{p}{2} \\
x_{1/2} & = & -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} &
\end{array}$$

2 Lösungsprinzip

Im folgenden möchte ich – ähnlich dem eben dargestellten Prinzip bei der Quadratischen Gleichung – eine **Ungleichung in Normalform** bearbeiten. Dabei ist natürlich auf die Besonderheiten bei Ungleichungen zu achten.

Für Ungleichungen kommen die Zeichen $<$, $>$, $\leq$ und $\geq$ in Betracht. Exemplarisch für alle verwende ich in dem Beispiel für die Herleitung das Zeichen $\geq$. Die Bezugs-Ungleichung sieht damit also so aus:

$$\boxed{x^2 + px + q \geq 0}$$

[1]Einzelheiten sind beispielsweise hier nachzulesen: http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/quad.pdf

Beginnen wir mit der Umformung dieser Ungleichung.

$$\begin{aligned}
x^2 + px + q &\geq 0 && \mid -q \\
x^2 + px &\geq -q && \mid + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \text{ (Quadr. Ergänz.)} \\
x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &\geq \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\
\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &\geq \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q
\end{aligned}$$

Bis hierher wurde bei der Ungleichung nur addiert und subtrahiert. Auch Termumformungen fanden statt. Das ist bekanntlich unproblematisch und erfordert keine Fallunterscheidungen.

Im nächsten Schritt müsste nun auf beiden Seiten die Wurzel gezogen werden. Das bedeutet zum einen, dass die Terme auf beiden Seiten der Ungleichung vorher **nicht negativ** sein dürfen. Ansonsten gäbe es keine (reelle) Lösung für die Wurzel.

Wichtig: Damit sich beim Wurzelziehen das Ungleichheitszeichen *nicht umkehrt*, muss dafür gesorgt werden, dass nach dem Wurzelziehen auf beiden Seiten immer noch *etwas Nicht-Negatives* steht!

Dabei kann der Inhalt der Klammer auf der linken Seite (vor dem Wurzelziehen) durchaus negativ sein. Durch das Quadrieren wird in jedem Fall etwas Positives daraus. Am einfachsten wird diese Bedingung dadurch gewährleistet, dass man nach dem Wurzelziehen auf beiden Seiten der Ungleichung den jeweiligen Gesamt-Term in Betragsstriche setzt. Das sähe dann so aus:

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| \geq \left|\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right|$$

Bei genauerer Betrachtung kann man erkennen, dass diese Betragsstriche auf der rechten Seite entbehrlich sind. Die Schreibweise der Wurzel bedeutet bekanntlich vereinbarungsgemäß stets die **positive** Wurzel. Damit erhalten wir diese Form als Ergebnis:

$$\boxed{\left|x + \frac{p}{2}\right| \geq \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Dieses Ergebnis könnte man „p-q-Formel für Quadratische Ungleichungen“ nennen. Leider liegt in dieser Form keine so einfache Form mit $x_{1/2} = \ldots$ vor, wie bei der Quadratischen Gleichung, aber damit müssen wir leben. Den Rest der Lösung muss man halt „zu Fuß“ durchführen, wie mit anderen Betragsungleichungen auch.[2]

[2]Einzelheiten sind beispielsweise hier nachzulesen: http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/betrag.pdf

Als nächstes wäre die Frage zu klären, was denn passiert, wenn der Radikand (der Inhalt der Wurzel) **negativ** ist. Gibt es dann keine Lösungen?

Dazu gehe ich genau einen Schritt zurück. Vor dem Wurzelziehen haben wir folgende Ungleichung:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Die rechte Seite der Ungleichung stellt in diesem Fall eine **negative** Zahl dar. Links steht jedoch auf keinen Fall etwas Negatives, denn ein Quadrat kann nur Null oder positiv sein, nicht jedoch negativ. In unserer Ungleichung steht dann auf jeden Fall links ein größerer Wert als rechts. Enthält unsere Ungleichung nun das Zeichen $>$ oder $\geq$, dann ist diese Ungleichung **immer** erfüllt. Es ist dann $L = \mathbb{R}$. Bei den Zeichen $<$ oder $\leq$ dagegen ist die Ungleichung **nie** erfüllt, die Lösungsmenge ist in diesen Fällen **leer**.

3 Verdeutlichung an zwei Beispielen

Am besten zeige ich an Beispielen, wie der komplette Lösungsweg mit den hier gewonnen Erkenntnissen aussieht.

3.1 Beispiel 1

Als erstes Beispiel verwende ich das Anfangsbeispiel aus der Einleitung.

$$x^2 - 6x + 5 < 0$$

Hierbei ist $p = -6$ und $q = 5$. Damit kann ich den Lösungsansatz mit der neuen Formel machen. Hierbei ist zu beachten, dass das Ungleichungszeichen $\geq$ nur stellvertretend in der Formel vorkommt. Hier muss es durch das Zeichen $<$ ersetzt werden. Der Lösungsansatz sieht dann so aus:

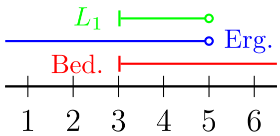
$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 5 &< 0 \\ \left|x+\frac{p}{2}\right| &< \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ |x-3| &< \sqrt{(-3)^2 - 5} \\ |x-3| &< 2 \end{aligned}$$

Als nächstes muss der Betrag aufgelöst werden. Dazu ist eine **Fallunterscheidung** erforderlich. In diesem Beispiel ist der Betragsinhalt positiv oder Null für $x \geq 3$, wie man leicht mit Hilfe des Ansatzes $x - 3 \geq 0$ bestimmen kann. Negativ ist dann der Betragsinhalt für $x < 3$. Das sind demnach die beiden Fälle für unsere Fallunterscheidung.

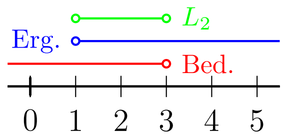
$$|x-3|<2$$

$$\begin{array}{rcll} \multicolumn{3}{c}{\underline{\text{für } x \geq 3:}} & \\ x-3 & < & 2 & |+3 \\ x & < & 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} \multicolumn{3}{c}{\underline{\text{für } x < 3:}} & \\ -(x-3) & < & 2 & \\ -x+3 & < & 2 & |-3 \\ -x & < & -1 & |\cdot(-1) \\ x & > & 1 & \end{array}$$

Wie von Ungleichungen[3] gewohnt, möchte ich auch hier die Lösungsmengenbestimmung mit graphischer Unterstützung am Zahlenstrahl durchführen. Dabei wird die Bedingung, unter der gerechnet wurde, mit dem Ergebnisterm übereinandergelegt. Dort, wo sie übereinstimmen, liegt die zugehörige Teillösungsmenge.

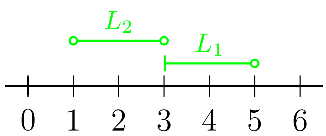


$L_1 = \{x|3 \leq x < 5\}$



$L_2 = \{x|1 < x < 3\}$

Die beiden Teillösungsmengen L_1 und L_2 können aneinander gelegt werden. Bei der Zahl 3 stoßen sie „nahtlos“ aneinander an. Die „3“ gehört zwar nicht mehr zur Menge L_2, aber in L_1 ist sie enthalten. Daher können sie zu einer einzigen Menge zusammengefasst werden, wie nachfolgend dargestellt:



$$\boxed{L = \{x|1 < x < 5\}}$$

3.2 Beispiel 2

Hier ist das zweite Beispiel:

$$2x^2 + 20 \leq 12x$$

Zunächst muss die Ungleichung in die Normalform umgewandelt werden, bevor die spezielle p-q-Formel angewendet werden kann.

$$\begin{array}{rcll} 2x^2+20 & \leq & 12x & |-12x \\ 2x^2-12x+20 & \leq & 0 & |:2 \\ x^2-6x+10 & \leq & 0 & \\ |x-3| & \leq & \sqrt{(-3)^2-10} & \\ |x-3| & \leq & \sqrt{-1} & \end{array}$$

[3]Einzelheiten siehe hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/ungleich.pdf

Der Radikand ist negativ, es existiert keine (reelle) Lösung für die Wurzel. Wie zuvor beschrieben ist dann der Term auf der linken Seite auf jeden Fall größer, als der Term rechts. (Dies bezieht sich eigentlich auf den Schritt **vor** dem Wurzelziehen, der ist hier aber nicht dargestellt. Das Ergebnis können wir dennoch übertragen.) Die Ungleichung verlangt jedoch mit dem Zeichen $\leq$, dass der Term links **kleiner** sein soll. Deswegen ist die Lösungsmenge leer.

$$\boxed{L = \{\ \}}$$

4 Übungsaufgaben

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen!

4.1 Aufgabe 1

$$x^2 + x < 6$$

4.2 Aufgabe 2

$$x^2 \leq 4x - 3$$

4.3 Aufgabe 3

$$x^2 - 4x - 5 > 0$$

4.4 Aufgabe 4

$$x^2 < 10x - 25$$

4.5 Aufgabe 5

$$12x + x^2 \leq -36$$

4.6 Aufgabe 6

$$4x^2 + 49 \geq 28x$$

4.7 Aufgabe 7

$$168x > -441 - 16x^2$$

4.8 Aufgabe 8

$$3x^2 + 8x + 6 \leq 0$$

4.9 Aufgabe 9

$$2x^2 + 28x > -100$$

4.10 Aufgabe 10

$$x + \frac{15}{x} \geq -8$$

4.11 Aufgabe 11

$$\frac{2x+2}{x+1} \leq x - 2$$

4.12 Aufgabe 12

$$\frac{13x+9}{3-x} \leq x - 2$$

4.13 Aufgabe 13

$$\frac{x-6}{2x-6} \geq \frac{x+4}{x+1}$$

4.14 Aufgabe 14

$$\frac{2x-5}{x-2} \geq \frac{x-5}{x-4}$$

4.15 Aufgabe 15

$$\frac{2x+3}{x+1} < \frac{-2x-1}{x+5}$$

5 Ergebnisse der Übungsaufgaben

5.1 Aufgabe 1

$$D = \mathbb{R} \qquad L = \{x| -3 < x < 2\}$$

5.2 Aufgabe 2

$$D = \mathbb{R} \qquad L = \{x|1 \leq x \leq 3\}$$

5.3 Aufgabe 3

$$D = \mathbb{R} \qquad L = \{x|x < -1 \vee x > 5\}$$

5.4 Aufgabe 4

$$D = \mathbb{R} \qquad L = \{\ \}$$

5.5 Aufgabe 5

$$D = \mathbb{R} \qquad L = \{-6\}$$

5.6 Aufgabe 6

$$D = \mathbb{R} \qquad L = \mathbb{R}$$

5.7 Aufgabe 7

$$D = \mathbb{R} \qquad L = \mathbb{R} \setminus \{-5{,}25\}$$

5.8 Aufgabe 8

$$D = \mathbb{R} \qquad L = \{\ \}$$

5.9 Aufgabe 9

$$D = \mathbb{R} \qquad L = \mathbb{R}$$

5.10 Aufgabe 10

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad L = \{x| -5 \leq x \leq -3 \vee x > 0\}$$

5.11 Aufgabe 11

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \qquad L = \{x | x \geq 4\}$$

5.12 Aufgabe 12

$$D = \mathbb{R} \setminus \{3\} \qquad L = \{x | -5 \leq x \leq -3 \vee x > 3\}$$

5.13 Aufgabe 13

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\} \qquad L = \{x | -9 \leq x < -1 \vee 2 \leq x < 3\}$$

5.14 Aufgabe 14

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2; 4\} \qquad L = \{x | x < 2 \vee x > 4\}$$

5.15 Aufgabe 15

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-5; -1\} \qquad L = \{x | -5 < x < -2 \vee -2 < x < -1\}$$

6 Durchgerechnete Lösungen

Für Aufgabe 1 bis 9 gilt: Es gibt keine Einschränkungen für den Definitionsbereich, daher:

$$\boxed{D = \mathbb{R}}$$

Bei diesen Aufgaben wird der Definitionsbereich nicht jedes mal neu angegeben.

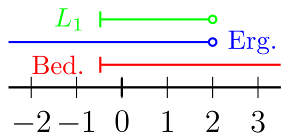
6.1 Aufgabe 1

$$x^2 + x < 6$$

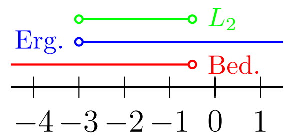
Bevor die spezielle p-q-Formel angewendet werden kann, muss die Ungleichung in die Normalform gebracht werden.

$$\begin{array}{rcll}
x^2 + x & < & 6 & \quad | - 6 \\
x^2 + x - 6 & < & 0 & \\
|x + \frac{1}{2}| & < & \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} & \\
|x + \frac{1}{2}| & < & \frac{5}{2} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\text{für } x \geq -\frac{1}{2}: \\
\hline
\begin{array}{rcll}
x + \frac{1}{2} & < & \frac{5}{2} & | - \frac{1}{2} \\
x & < & 2 &
\end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\text{für } x < -\frac{1}{2}: \\
\hline
\begin{array}{rcll}
-(x + \frac{1}{2}) & < & \frac{5}{2} & \\
-x - \frac{1}{2} & < & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\
-x & < & 3 & | \cdot (-1) \\
x & > & -3 &
\end{array}
\end{array}$$

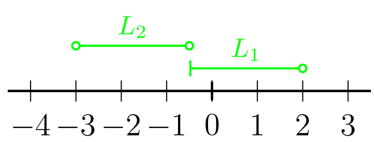


$$L_1 = \{x | -\tfrac{1}{2} \leq x < 2\}$$



$$L_2 = \{x | -3 < x < -\tfrac{1}{2}\}$$

Die beiden Teillösungsmengen L_1 und L_2 können aneinander gelegt werden. Bei der Zahl $-\frac{1}{2}$ stoßen sie „nahtlos" aneinander an. Die „$-\frac{1}{2}$" gehört zwar nicht mehr zur Menge L_2, aber in L_1 ist sie enthalten. Daher können beide Teillösungsmengen zu einer einzigen Menge zusammengefasst werden, wie nachfolgend dargestellt:

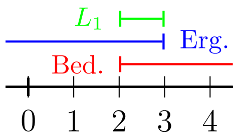


$$\boxed{L = \{x | -3 < x < 2\}}$$

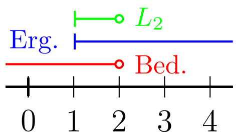
6.2 Aufgabe 2

$$\begin{aligned} x^2 &\leq 4x-3 \quad |-4x+3 \\ x^2-4x+3 &\leq 0 \\ |x-2| &\leq \sqrt{4-3} \\ |x-2| &\leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcll} \multicolumn{3}{c}{\underline{\text{für } x \geq 2:}} & \\ x-2 & \leq & 1 & |+2 \\ x & \leq & 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} \multicolumn{3}{c}{\underline{\text{für } x < 2:}} & \\ -(x-2) & \leq & 1 & \\ -x+2 & \leq & 1 & |-2 \\ -x & \leq & -1 & |\cdot(-1) \\ x & \geq & 1 & \end{array}$$

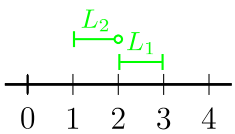


$L_1 = \{x|2 \leq x \leq 3\}$



$L_2 = \{x|1 \leq x < 2\}$

Die beiden Teillösungsmengen L_1 und L_2 können aneinander gelegt werden. Bei der Zahl 2 stoßen sie „nahtlos“ aneinander an. Die 2 gehört zwar nicht mehr zur Menge L_2, aber in L_1 ist sie enthalten. Daher können beide Teillösungsmengen zu einer einzigen Menge zusammengefasst werden, wie nachfolgend dargestellt:

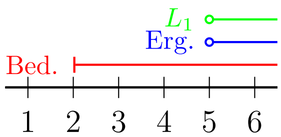


$$\boxed{L = \{x|1 \leq x \leq 3\}}$$

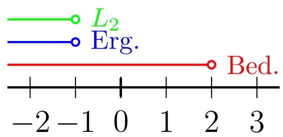
6.3 Aufgabe 3

$$\begin{aligned} x^2 - 4x - 5 &> 0 \\ |x-2| &> \sqrt{4+5} \\ |x-2| &> 3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \underline{\text{für } x \geq 2:} & \underline{\text{für } x < 2:} \\ \begin{aligned} x-2 &> 3 \quad |+2 \\ x &> 5 \end{aligned} & \begin{aligned} -(x-2) &> 3 \\ -x+2 &> 3 \quad |-2 \\ -x &> 1 \quad |\cdot(-1) \\ x &< -1 \end{aligned} \end{array}$$



$L_1 = \{x|x > 5\}$



$L_2 = \{x|x < -1\}$

Die Teillösungsmengen stoßen **nicht** aneinander. Die Gesamtlösungsmenge muss demnach mit zwei Teilstücken angegeben werden.

$$\boxed{L = \{x|x < -1 \vee x > 5\}}$$

6.4 Aufgabe 4

$$\begin{aligned} x^2 &< 10x - 25 \quad |-10x+25 \\ x^2 - 10x + 25 &< 0 \\ |x-5| &< \sqrt{5^2 - 25} \\ |x-5| &< 0 \end{aligned}$$

Hier kann man schon abbrechen. Ein Betrag kann niemals kleiner als Null sein. Die Lösungsmenge ist daher leer.

$$\boxed{L = \{\ \}}$$

6.5 Aufgabe 5

$$\begin{array}{rcll} 12x + x^2 & \leq & -36 & \mid +36 \\ x^2 + 12x + 36 & \leq & 0 & \\ |x+6| & \leq & \sqrt{6^2 - 36} & \\ |x+6| & \leq & 0 & \end{array}$$

Hier kann man schon aufhören. Ein Betrag kann niemals kleiner als Null werden, er kann nur gleich Null werden. Das ist der Fall für $x = -6$.

$$\boxed{L = \{-6\}}$$

6.6 Aufgabe 6

$$\begin{array}{rcll} 4x^2 + 49 & \geq & 28x & \mid -28x \\ 4x^2 - 28x + 49 & \geq & 0 & \mid : 4 \\ x^2 - 7x + \frac{49}{4} & \geq & 0 & \\ |x - \frac{7}{2}| & \geq & \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{49}{4}} & \\ |x - \frac{7}{2}| & \geq & 0 & \end{array}$$

Hier kann man schon aufhören. Ein Betrag ist **immer** größer oder gleich Null. **Alle** Reellen Zahlen erfüllen diese Ungleichung.

$$\boxed{L = \mathbb{R}}$$

6.7 Aufgabe 7

$$\begin{array}{rcll} 168x & > & -441 - 16x^2 & \mid +441 + 16x^2 \\ 16x^2 + 168x + 441 & > & 0 & \mid : 16 \\ x^2 + \frac{21}{2}x + \frac{441}{16} & > & 0 & \\ |x + \frac{21}{4}| & > & \sqrt{\frac{441}{16} - \frac{441}{16}} & \\ |x + \frac{21}{4}| & > & 0 & \end{array}$$

Hier kann man schon aufhören. Ein Betrag ist **immer** größer oder gleich Null. **Alle** Reellen Zahlen erfüllen diese Ungleichung außer genau der einen der Zahl, für die der Betrag Null wird. Die muss in der Lösungsmenge aus der Menge der Reellen Zahlen ausgeschlossen werden.

$$\boxed{L = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{21}{4}\}}$$

6.8 Aufgabe 8

$$\begin{aligned} 3x^2+8x+6 &\leq 0 && \mid :3 \\ x^2+\tfrac{8}{3}x+2 &\leq 0 \\ |x+\tfrac{4}{3}| &\leq \sqrt{\tfrac{16}{9}-\tfrac{18}{9}} \\ |x+\tfrac{4}{3}| &\leq \sqrt{-\tfrac{2}{9}} \end{aligned}$$

Da der Radikand negativ ist, ist die rechte Seite der Ungleichung (im virtuell vorletzten Schritt) auf jeden Fall negativ, die linke größer oder gleich Null. Das vorgegebene Ungleichungszeichen verlangt aber, dass die **linke** Seite **kleiner** als die rechte (oder gleich) ist. Diese Bedingung kann niemals erfüllt sein, die Lösungsmenge ist daher leer.

$$\boxed{L = \{\ \}}$$

6.9 Aufgabe 9

$$\begin{aligned} 2x^2+28x &> -100 && \mid +100 \\ 2x^2+28x+100 &> 0 && \mid :2 \\ x^2+14x+50 &> 0 \\ |x+7| &> \sqrt{49-50} \\ |x+7| &> \sqrt{-1} \end{aligned}$$

Da der Radikand negativ ist, ist die rechte Seite der Ungleichung (im virtuell vorletzten Schritt) auf jeden Fall negativ, die linke größer oder gleich Null. Das vorgegebene Ungleichungszeichen verlangt, dass die linke Seite **größer** als die rechte sein soll, die Ungleichung ist daher **immer** erfüllt.

$$\boxed{L = \mathbb{R}}$$

6.10 Aufgabe 10

$$x + \frac{15}{x} \geq -8$$

Ein Bruch steht in der Ungleichung. Für $x = 0$ ist der Nenner Null, der Bruch also nicht definiert. Die Null ist aus dem Definitionsbereich auszuschließen.

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

$$x + \frac{15}{x} \quad \geq \quad -8 \quad | \cdot x$$

An dieser Stelle ist bereits eine **Fallunterscheidung** notwendig wie bei allen Ungleichungen mit Brüchen, denn der Term, mit dem multipliziert werden soll, kann positiv oder negativ sein.[4] Aus Platzgründen behandele ich die Fälle nacheinander.

$$\underline{\text{für } x > 0:}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 15 &\geq -8x \qquad\qquad | + 8x \\ x^2 + 8x + 15 &\geq 0 \\ |x+4| &\geq \sqrt{16-15} \\ |x+4| &\geq 1 \end{aligned}$$

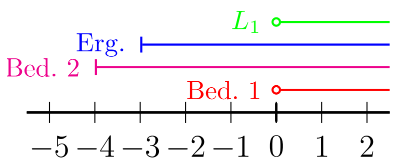
$$\underline{\text{für } x \geq -4:}$$

$$\begin{aligned} x + 4 &\geq 1 \qquad | - 4 \\ x &\geq -3 \end{aligned}$$

$$\underline{\text{für } x < -4:}$$

(entfällt)

Der zweite Fall entfällt, da er komplett außerhalb des Bereiches der vorgeschalteten Bedingung ($x > 0$) liegt. Es folgt die grafische Veranschaulichung der ersten Teillösungsmenge.



$$L_1 = \{x | x > 0\}$$

Der zweite Fall der ersten Fallunterscheidung muss nicht neu gerechnet werden. Bis auf die Richtung des Ungleichungszeichens ist die Rechnung identisch mit dem ersten Fall. Daher übernehme ich das Ergebnis direkt aus der ersten Rechnung.

[4] Einzelheiten siehe hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/ungleich.pdf

$$\underline{\text{für } x < 0:}$$

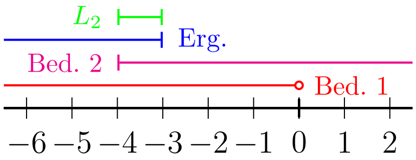
$$|x+4| \leq 1$$

$$\underline{\text{für } x \geq -4:}$$

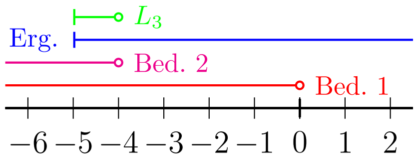
$$\begin{aligned} x+4 &\leq 1 && \mid -4 \\ x &\leq -3 \end{aligned}$$

$$\underline{\text{für } x < -4:}$$

$$\begin{aligned} -(x+4) &\leq 1 \\ -x-4 &\leq 1 && \mid +4 \\ -x &\leq 5 && \mid \cdot(-1) \\ x &\geq -5 \end{aligned}$$

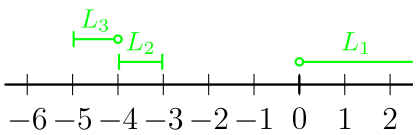


$L_2 = \{x| -4 \leq x \leq -3\}$



$L_3 = \{x| -5 \leq x \leq -4\}$

Schauen wir uns nun die drei Teillösungsmengen in einem gemeinsamen Diagramm an.



Die Teillösungsmengen L_2 und L_3 stoßen direkt aneinander. Sie können also zusammengefasst werden. Zur Teillösungsmenge L_1 klafft dann allerdings eine Lücke, so dass diese separat angegeben werden muss.

$$\boxed{L = \{x| -5 \leq x \leq -3 \lor x > 0\}}$$

6.11 Aufgabe 11

$$\frac{2x+2}{x+1} \leq x-2$$

Ein Bruch steht in der Ungleichung. Für $x = -1$ ist der Nenner Null, der Bruch also nicht definiert. Die -1 ist aus dem Definitionsbereich auszuschließen.

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}}$$

$$\frac{2x+2}{x+1} \quad \leq \quad x-2 \quad | \cdot (x+1)$$

An dieser Stelle ist bereits eine **Fallunterscheidung** notwendig wie bei allen Ungleichungen mit Brüchen, denn der Term, mit dem multipliziert werden soll, kann positiv oder negativ sein. Aus Platzgründen behandele ich die Fälle nacheinander.

$$\underline{\text{für } x > -1:}$$

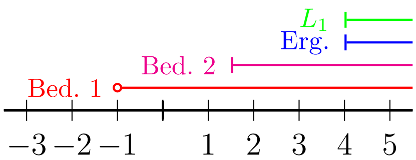
$$\begin{aligned}
2x+2 &\leq (x+1)\cdot(x-2) \\
2x+2 &\leq x^2-2x+x-2 && |-x^2+x+2 \\
-x^2+3x+4 &\leq 0 && |\cdot(-1) \\
x^2-3x-4 &\geq 0 \\
|x-\tfrac{3}{2}| &\geq \sqrt{\tfrac{9}{4}+\tfrac{16}{4}} \\
|x-\tfrac{3}{2}| &\geq \tfrac{5}{2}
\end{aligned}$$

$$\underline{\text{für } x \geq \tfrac{3}{2}:}$$

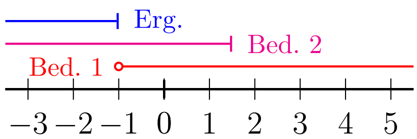
$$\begin{aligned}
x-\tfrac{3}{2} &\geq \tfrac{5}{2} && |+\tfrac{3}{2} \\
x &\geq 4
\end{aligned}$$

$$\underline{\text{für } x < \tfrac{3}{2}:}$$

$$\begin{aligned}
-(x-\tfrac{3}{2}) &\geq \tfrac{5}{2} \\
-x+\tfrac{3}{2} &\geq \tfrac{5}{2} && |-\tfrac{3}{2} \\
-x &\geq 1 && |\cdot(-1) \\
x &\leq -1
\end{aligned}$$



$L_1 = \{x | x \geq 4\}$



$L_2 = \{\ \}$

Im zweite Fall liegt das Ergebnis **außerhalb** des Bereiches von Bedingung 1. Die Teillösungsmenge L_2 ist daher leer.

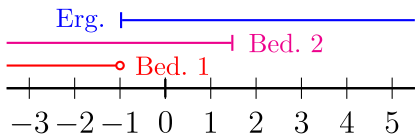
Der zweite Fall der ersten Fallunterscheidung muss nicht neu berechnet werden. Bis auf die Richtung des Ungleichungszeichens ist die Rechnung identisch mit dem ersten Fall. Daher übernehme ich das Ergebnis direkt aus der ersten Rechnung.

$$\underline{\text{für } x < -1:}$$

$$|x - \tfrac{3}{2}| \leq \tfrac{5}{2}$$

$$\begin{array}{cc}
\underline{\text{für } x \geq \tfrac{3}{2}:} & \underline{\text{für } x < \tfrac{3}{2}:} \\
 & \begin{array}{rcll} -(x - \frac{3}{2}) & \leq & \frac{5}{2} & \\ -x + \frac{3}{2} & \leq & \frac{5}{2} & \mid -\frac{3}{2} \\ -x & \leq & 1 & \mid \cdot (-1) \\ x & \geq & -1 & \end{array} \\
\text{(entfällt)} &
\end{array}$$

Der linke Fall entfällt, da er komplett außerhalb des Bereiches der vorgeschalteten Bedingung ($x < -1$) liegt. Es folgt die grafische Veranschaulichung der dritten Teillösungsmenge.



$$L_3 = \{\ \}$$

Da das Ergebnis komplett außerhalb von Bedingung 1 liegt, ist die Teillösunhsmenge L_3 leer. Damit ist die Gesamtlösungsmenge identisch mit der Teillösungsmenge L_1.

$$\boxed{L = \{x | x \geq 4\}}$$

6.12 Aufgabe 12

$$\frac{13x+9}{3-x} \le x-2$$

Ein Bruch steht in der Ungleichung. Für $x = 3$ ist der Nenner Null, der Bruch also nicht definiert. Die 3 ist aus dem Definitionsbereich auszuschließen.

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{3\}}$$

$$\frac{13x+9}{3-x} \le x-2 \quad | \cdot (3-x)$$

An dieser Stelle ist bereits eine **Fallunterscheidung** notwendig wie bei allen Ungleichungen mit Brüchen, denn der Term, mit dem multipliziert werden soll, kann positiv oder negativ sein. Aus Platzgründen behandele ich die Fälle nacheinander. Ich beginne mit dem **positiven** Fall.

Aufgepasst: Im Fall $x < 3$ ist der Faktor $(3-x)$, mit dem multipilizert wird, nicht negativ, sondern **positiv**! Das wird erfahrungsgemäß leicht übersehen.

$$\underline{\text{für } x < 3:}$$

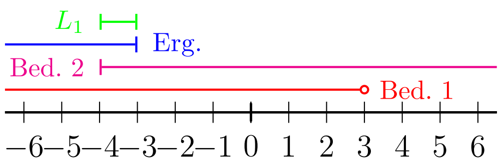
$$\begin{aligned}
13x+9 &\le (x-2)\cdot(3-x) \\
13x+9 &\le 3x - x^2 - 6 + 2x \\
13x+9 &\le -x^2 + 5x - 6 \qquad | + x^2 - 5x + 6 \\
x^2 + 8x + 15 &\le 0 \\
|x+4| &\le \sqrt{16-15} \\
|x+4| &\le 1
\end{aligned}$$

$$\underline{\text{für } x \ge -4:}$$

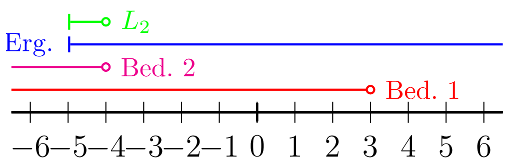
$$\begin{aligned}
x+4 &\le 1 \qquad | - 4 \\
x &\le -3
\end{aligned}$$

$$\underline{\text{für } x < -4:}$$

$$\begin{aligned}
-(x+4) &\le 1 \\
-x-4 &\le 1 \qquad | + 4 \\
-x &\le 5 \qquad | \cdot (-1) \\
x &\ge -5
\end{aligned}$$



$$L_1 = \{x | -4 \le x \le -3\}$$



$$L_2 = \{x | -5 \le x < -4\}$$

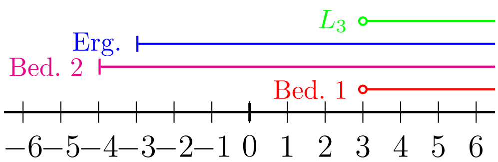
Der zweite Fall der ersten Fallunterscheidung muss nicht neu gerechnet werden. Bis auf die Richtung des Ungleichungszeichens ist die Rechnung identisch mit dem ersten Fall. Daher übernehme ich das Ergebnis direkt aus der ersten Rechnung.

$$\underline{\text{für } x > 3:}$$

$$|x+4| \quad \geq \quad 1$$

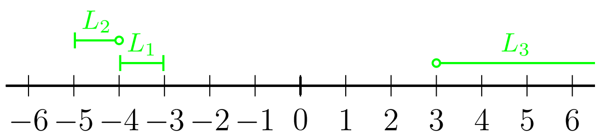
$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{für } x \geq -4:} & & \underline{\text{für } x < -4:} \\ \begin{array}{rcll} x+4 & \geq & 1 & \mid -4 \\ x & \geq & -3 & \end{array} & & \text{(entfällt)} \end{array}$$

Der rechte Fall entfällt, da er komplett außerhalb des Bereiches der vorgeschalteten Bedingung ($x > 3$) liegt. Es folgt die grafische Veranschaulichung der dritten Teillösungsmenge.



$$L_3 = \{x | x > 3\}$$

Schauen wir uns nun die drei Teillösungsmengen in einem gemeinsamen Diagramm an.



Die Teillösungsmengen L_2 und L_1 stoßen direkt aneinander. Sie können also zusammengefasst werden. Zur Teillösungsmenge L_3 klafft dann allerdings eine Lücke, so dass diese separat angegeben werden muss.

$$\boxed{L = \{x | -5 \leq x \leq -3 \vee x > 3\}}$$

6.13 Aufgabe 13

$$\frac{x-6}{2x-6} \geq \frac{x+4}{x+1}$$

Zwei Brüche stehen in der Ungleichung. Für $x = 3$ und $x = -1$ sind die Nenner Null, die Brüche also nicht definiert. Die 3 und die -1 sind daher aus dem Definitionsbereich auszuschließen.

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}}$$

$$\frac{x-6}{2x-6} \quad \geq \quad \frac{x+4}{x+1} \quad | \cdot (2x-6) \cdot (x+1)$$

An dieser Stelle ist bereits eine **Fallunterscheidung** notwendig wie bei allen Ungleichungen mit Brüchen, denn der Term, mit dem multipliziert werden soll, kann positiv oder negativ sein. Aus Platzgründen behandele ich die Fälle nacheinander. Ich beginne mit dem **positiven** Fall.

$$\underline{\text{für } x < -1 \vee x > 3:}$$

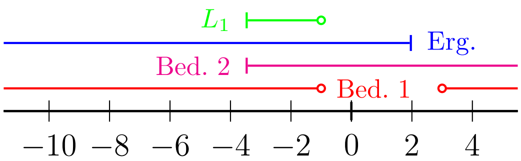
$$\begin{aligned}
(x-6)\cdot(x+1) &\geq (x+4)\cdot(2x-6) \\
x^2 + x - 6x - 6 &\geq 2x^2 - 6x + 8x - 24 \quad | - 2x^2 - 2x + 24 \\
-x^2 - 7x + 18 &\geq 0 \quad | \cdot (-1) \\
x^2 + 7x - 18 &\leq 0 \\
|x + \tfrac{7}{2}| &\leq \sqrt{\tfrac{49}{4} + \tfrac{72}{4}} \\
|x + \tfrac{7}{2}| &\leq \sqrt{\tfrac{121}{4}} \\
|x + \tfrac{7}{2}| &\leq \tfrac{11}{2}
\end{aligned}$$

$$\underline{\text{für } x \geq -3{,}5:}$$

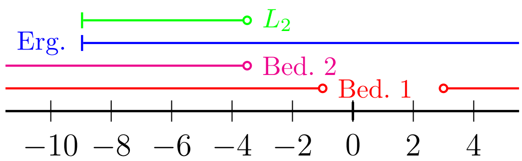
$$\begin{aligned}
x + 3{,}5 &\leq 5{,}5 \quad | - 3{,}5 \\
x &\leq 2
\end{aligned}$$

$$\underline{\text{für } x < -3{,}5:}$$

$$\begin{aligned}
-(x + 3{,}5) &\leq 5{,}5 \\
-x - 3{,}5 &\leq 5{,}5 \quad | + 3{,}5 \\
-x &\leq 9 \quad | \cdot (-1) \\
x &\geq -9
\end{aligned}$$



$L_1 = \{x | -3{,}5 \leq x < -1\}$



$L_2 = \{x | -9 \leq x < -3\}$

Der zweite Fall der ersten Fallunterscheidung muss nicht neu gerechnet werden. Bis auf die Richtung des Ungleichungszeichens ist die Rechnung identisch mit dem ersten Fall. Daher übernehme ich das Ergebnis direkt aus der ersten Rechnung.

$$\underline{\text{für } -1 < x < 3:}$$

$$|x + 3{,}5| \quad \geq \quad 5{,}5$$

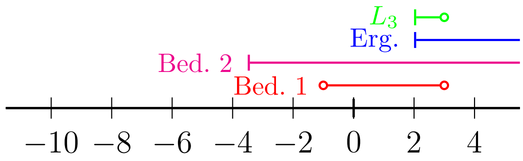
$$\underline{\text{für } x \geq -3{,}5:}$$

$$\begin{aligned} x + 3{,}5 &\geq 5{,}5 \quad | -3{,}5 \\ x &\geq 2 \end{aligned}$$

$$\underline{\text{für } x < -3{,}5:}$$

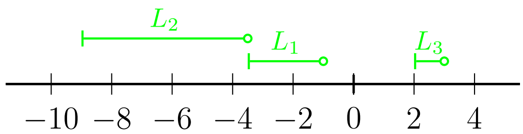
$$\text{(entfällt)}$$

Der rechte Fall entfällt, da er komplett außerhalb des Bereiches der vorgeschalteten Bedingung ($-1 < x < 3$) liegt. Es folgt die grafische Veranschaulichung der dritten Teillösungsmenge.



$$L_3 = \{x | 2 \leq x < 3\}$$

Schauen wir uns nun die drei Teillösungsmengen in einem gemeinsamen Diagramm an.



Die Teillösungsmengen L_2 und L_1 stoßen direkt aneinander. Sie können also zusammengefasst werden. Zur Teillösungsmenge L_3 klafft dann allerdings eine Lücke, so dass diese separat angegeben werden muss.

$$\boxed{L = \{x | -9 \leq x < -1 \vee 2 \leq x < 3\}}$$

6.14 Aufgabe 14

$$\frac{2x-5}{x-2} \geq \frac{x-5}{x-4}$$

Zwei Brüche stehen in der Ungleichung. Für $x = 2$ und $x = 4$ sind die Nenner Null, die Brüche also nicht definiert. Die 2 und die 4 sind daher aus dem Definitionsbereich auszuschließen.

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{2; 4\}}$$

$$\frac{2x-5}{x-2} \;\geq\; \frac{x-5}{x-4} \quad | \cdot (x-2) \cdot (x-4)$$

An dieser Stelle ist bereits eine **Fallunterscheidung** notwendig wie bei allen Ungleichungen mit Brüchen, denn der Term, mit dem multipliziert werden soll, kann positiv oder negativ sein. Aus Platzgründen behandele ich die Fälle nacheinander. Ich beginne mit dem **positiven** Fall.

$$\underline{\text{für } x < 2 \vee x > 4:}$$

$$\begin{aligned}
(2x-5) \cdot (x-4) &\geq (x-5) \cdot (x-2) \\
2x^2 - 8x - 5x + 20 &\geq x^2 - 2x - 5x + 10 \quad | - x^2 + 7x - 10 \\
x^2 - 6x + 10 &\geq 0 \\
|x-3| &\geq \sqrt{9-10} \\
|x-3| &\geq \sqrt{-1}
\end{aligned}$$

Der Radikand ist **negativ**. Das bedeutet, die linke Seite der Ungleichung ist **stets größer**, als die rechte. Da genau das durch das Zeichen $\geq$ gefordert wird, ist die Ungleichung **immer erfüllt**. Alle x aus dem untersuchten Bereich gehören zur Lösungsmenge.

$$L_1 = \{x | x < 2 \vee x > 4\}$$

Der zweite Fall der ersten Fallunterscheidung muss nicht neu gerechnet werden. Bis auf die Richtung des Ungleichungszeichens ist die Rechnung identisch mit dem ersten Fall. Daher übernehme ich das Ergebnis direkt aus der ersten Rechnung.

$$\underline{\text{für } 2 < x < 4:}$$

$$|x-3| \;\leq\; \sqrt{-1}$$

Wie oben beschrieben ist die linke Seite der Ungleichung stets **größer**, als die rechte Seite. Das geforderte Zeichen $\leq$ steht dazu im Widerspruch. Die zweite Teillösungsmenge ist daher leer.

$$L_2 = \{\ \}$$

Die Teillösungsmenge L_1 ist deshalb gleichzeitig die Gesamtlösungsmenge.

$$\boxed{L = \{x | x < 2 \vee x > 4\}}$$

6.15 Aufgabe 15

$$\frac{2x+3}{x+1} < \frac{-2x-1}{x+5}$$

Zwei Brüche stehen in der Ungleichung. Für $x = -1$ und $x = -5$ sind die Nenner Null, die Brüche also nicht definiert. Die -1 und die -5 sind daher aus dem Definitionsbereich auszuschließen.

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-5; -1\}}$$

$$\frac{2x+3}{x+1} \quad < \quad \frac{-2x-1}{x+5} \qquad | \cdot (x+1) \cdot (x+5)$$

An dieser Stelle ist die erste **Fallunterscheidung** notwendig wie bei allen Ungleichungen mit Brüchen, denn der Term, mit dem multipliziert werden soll, kann positiv oder negativ sein. Aus Platzgründen behandele ich die Fälle nacheinander. Ich beginne mit dem **positiven** Fall.

$$\underline{\text{für } x < -5 \vee x > -1:}$$

$$\begin{array}{rcll}
(2x+3)\cdot(x+5) & < & (-2x-1)\cdot(x+1) & \\
2x^2+10x+3x+15 & < & -2x^2-2x-x-1 & |+2x^2+3x+1 \\
4x^2+16x+16 & < & 0 & |:4 \\
x^2+4x+4 & < & 0 & \\
|x+2| & < & \sqrt{4-4} & \\
|x+2| & < & 0 &
\end{array}$$

Da ein Betrag **auf keinen Fall negativ** sein kann, kann diese Ungleichung niemals erfüllt sein. Die erste Teillösungsmenge ist leer.

$$L_1 = \{\ \}$$

Der zweite Fall der ersten Fallunterscheidung muss nicht neu gerechnet werden. Bis auf die Richtung des Ungleichungszeichens ist die Rechnung identisch mit dem ersten Fall. Daher übernehme ich das Ergebnis direkt aus der ersten Rechnung.

$$\underline{\text{für } -5 < x < -1:}$$

$$|x+2| \quad > \quad 0$$

Da ein Betrag stets größer oder gleich Null ist, ist diese Ungleichung fast immer erfüllt. Lediglich der x-Wert, für den der Betrag Null wird (also $x = -2$) muss aus der zweiten Teillösungsmenge ausgeschlossen werden. Ansonsten ist diese Lösungsmenge identisch mit der Bedingung für den untersuchten Bereich. Da L_1 leer ist, ist dies auch die Gesamtlösungsmenge.

$$\boxed{L = \{x| -5 < x < -2 \vee -2 < x < -1\}}$$