Quadratic funktions

Wolfgang Kippels

10. November 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Preface

To create instructions like this it takes a lot of time and trouble. Nevertheless I make this avaliable to the community. If you find this script helpful for you, I request you to fulfill the subsequent generation treaty:

> *When you some time later will have finished your period of education and you have started your career (or some time later), please transmit your knowledge in a fitting way to the following generation.*

When you want to enjoy me, please send a small email to the following adress: mail@dk4ek.de

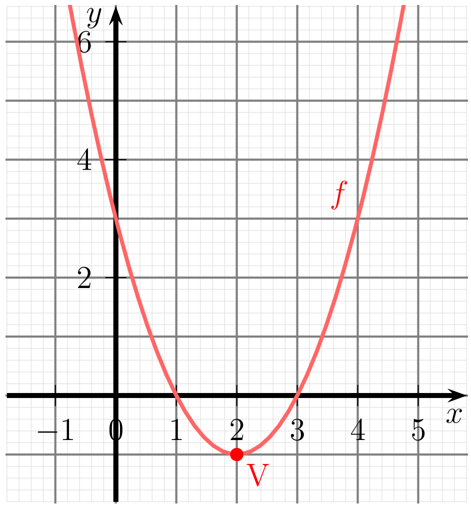
Many thanks!

2 Set of fundamental facts

Opposite you find a diagramm of a typical quadratic funktion. The example shows this function:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

This curve shape is called **parabola**. The lowest point[1] is called **vertex of the parabola**. This point is indicated with the letter **V**.



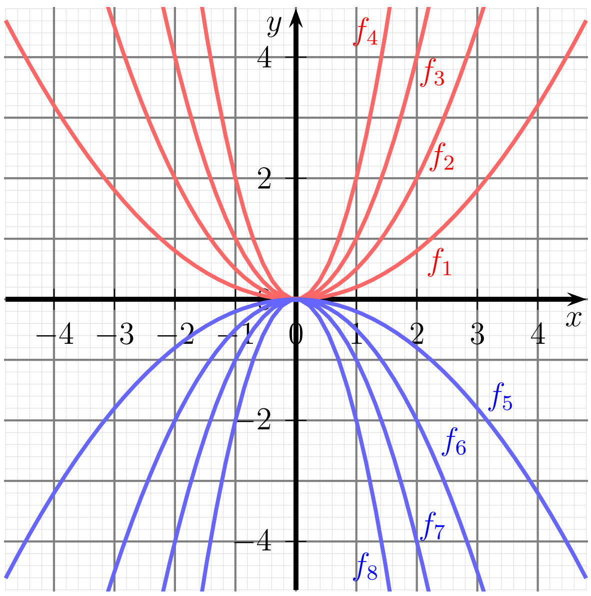
A quadratic function is any function, that fits in the normal form:

normal form:

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

To analyse, what kind of impact the parameter a has to the shape of the parabola, you see opposite 8 different functions with a different value of the parameter a. In all functions is $b = 0$ and $c = 0$. The functional equations are:

$f_1(x) = 0{,}2x^2$
$f_2(x) = 0{,}5x^2$
$f_3(x) = 1x^2$
$f_4(x) = 2x^2$
$f_5(x) = -0{,}2x^2$
$f_6(x) = -0{,}5x^2$
$f_7(x) = -1x^2$
$f_8(x) = -2x^2$

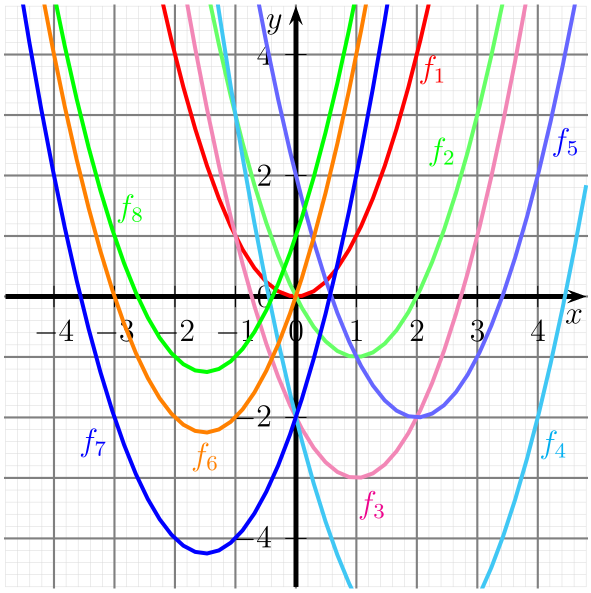


You can see quite good, that all parabolas have a different shape. As the parameter ***a*** is determining the shape of the parabola, it is called **factor of shape**. If ***a*** is absolutely **large** (f_3, f_4, f_7, f_8), the parabola is **narrow**, if ***a*** is **negative** (f_5 to f_8), the parabola is **opened downwards**.

[1] if the parabola is opened to the bottom: the highest point...

To demonstrate, that only parameter $\boldsymbol{a}$ is responsible for the shape of the parabola, you see opposite 8 differert quadratic functions. All have parameter $a = 1$, but different values for parameter b and c. The functional equations are:

$f_1(x) = x^2$
$f_2(x) = x^2 - 2x$
$f_3(x) = x^2 - 2x - 2$
$f_4(x) = x^2 - 4x - 2$
$f_5(x) = x^2 - 4x + 2$
$f_6(x) = x^2 + 3x$
$f_7(x) = x^2 + 3x - 2$
$f_8(x) = x^2 + 3x + 1$



Although you see a lot of confused lines, you can recognize, that all parabolas have the same shape. Only their positions are different.

Next we want to explore the impact of parameter $\boldsymbol{c}$. We can use the same functions f_1 to f_8 shown before for this purpose.

Let us look first to the functions f_1, f_2 and f_6. In all of them is $c = 0$. You should notice, that all parabolas pass through the coordinate origin. Here is $y = 0$.

Also the functions f_3, f_4 and f_7 have the same value for parameter c, namely $c = -2$. All associated parabulas are hitting the y-axis at the same value, namely at $y = -2$.

Obviously the parameter $\boldsymbol{c}$ gives us the value for the $\boldsymbol{y}$**-intercept**.

We can verify this finding with f_5 und f_8. In f_5 is $c = 2$, the y-axis is hitted at $y = 2$. In f_8 is $c = 1$, the y-axis is hitted at $y = 1$. Obviously it is truth:

Parameter $\boldsymbol{c}$ indicates the $\boldsymbol{y}$**-intercept**.

Note: Of course ist is possible to prove this result „correctly“. When you calculate the value of the function $f(x) = ax^2 + bx + c$ with $x = 0$, you get $a \cdot 0^2 = 0$ and $b \cdot 0 = 0$. Then only the value of c is remaining.

Unfortunately the meaning of parameter b is not as evident as parameter a or c. Therefore I want to inspect this later in this script.

2.1 Zero of a function

Zero of a function is called the value x_0, that causes the value 0 of the function (the value $y = 0$). To find possible zeros of a function, we have to set the formula term to 0. I want to show the procedure with the example $f(x) = x^2 - 4x + 3$ from the beginning. We need the p-q-formula[2] as a tool to solve the equation.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ x_0^2 - 4x_0 + 3 &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad | \text{ use } p\text{-}q\text{-formula} \\ x_{01/02} &= -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 3} \\ &= 2 \pm \sqrt{4-3} \\ x_{01/02} &= 2 \pm 1 \\ x_{01} = 1 & \qquad x_{02} = 3 \end{aligned}$$

Result: Zeros of the function are $x_{01} = 1$ and $x_{02} = 3$.
You can express this result also in an other way: The x-axis is hit by the parabula at $x_{01} = 1$ and $x_{02} = 3$.

2.2 Vertexes

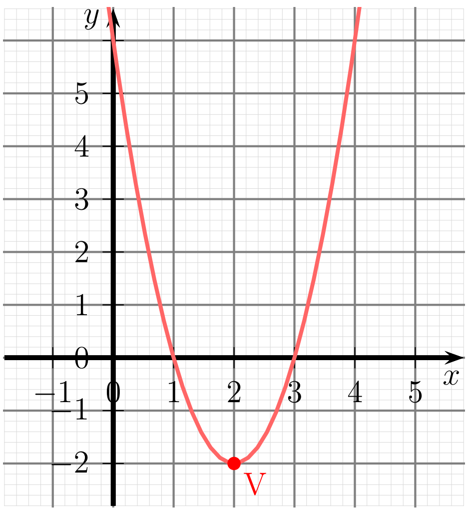
What is a **vertex of a parabula**?

The definition is as told before: *The **vertex** of a parabula is its lowest or its highest point.*

Opposite you find the graph of this function:

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 6$$

The vertex is marked with an V. As the parabula is opened upwards, we only find a **lowest** point. There is no upward limit. Therefore is the vertex the lowest point.



Let us look to the details of the function graph.
You see the vertex by reason of the symmetrie of the parabula exactly in the centre between the zeros. Because of this fact we can deduce a formula for finding the vertex. Let us first calculate the zeros of this example.

[2]For details of the p-q-formula look here: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/quad.pdf

$$
\begin{aligned}
f(x_0) &= 0 \\
2x_0^2 - 8x_0 + 6 &= 0 && \mid :2 \\
x_0^2 - 4x_0 + 3 &= 0 \\
p &= -4 \\
q &= 3 \\
x_{1/2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\
x_{01/02} &= -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 3} \\
x_{01/02} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \\
x_{01/02} &= 2 \pm 1
\end{aligned}
$$

Without calculating the values in detail we can see by this formula, that the zeros are positioned symmetric to $x = 2$, one 1 below and one 1 above. That means, that the number **before** the sign $\pm$ must be the x-value x_V of the vertex. The vertex is positioned as we know in the center between the zeros.

Result: $\boxed{x_V = 2}$

I want to use this realization, to deduce a simple formula, that shows us the x-value of the vertex $V(x_V|y_V)$ of a quadratic function.

I start with the normal form and calculate the zeros.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c && \mid \text{set the formula term to } 0 \\
0 &= ax^2 + bx + c && \mid :a \\
0 &= x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} && \mid \text{use } p\text{-}q\text{-formula} \\
x_{01/02} &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \\
x_{01} &= -\frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \\
x_{02} &= -\frac{b}{2a} - \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}
\end{aligned}
$$

I calculate the mean value, to get the x-value x_V of the vertex.

$$\begin{aligned}
x_V &= \frac{x_{01}+x_{02}}{2} \\
x_V &= \frac{\left(-\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}\right)+\left(-\frac{b}{2a}-\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}\right)}{2} \\
&= \frac{-2\cdot\frac{b}{2a}}{2} \\
x_V &= -\frac{b}{2a}
\end{aligned}$$

Result: If the equation of the function is given in the normal form

$$\boxed{f(x)=ax^2+bx+c}$$

we get the x-value $\mathbf{x_V}$ of the vertex by using this formula:

Vertex formula:

$$\boxed{x_V=-\frac{b}{2a}}$$

Let us go back to our example.

$$f(x)=2x^2-8x+6$$

We calculate x_V by using the formula, we just have deduced:

$$\begin{aligned}
x_V &= -\frac{b}{2a} \\
&= -\frac{-8}{2\cdot 2} \\
x_V &= 2
\end{aligned}$$

The corresponding y-value y_V can be calculated by putting x_V into the function formula. Our example looks like that:

$$\begin{aligned}
y_V &= f(x_V) \\
&= 2x_V^2-8x_V+6 \\
&= 2\cdot 2^2-8\cdot 2+6 \\
y_V &= -2
\end{aligned}$$

We got the vertex of our example like this: $\boxed{V(2|-2)}$

2.3 Vertex form

The functional equation of a quadratic function can not only be written in **normal form**, possible ist also the so called **vertex form**. We remember the normal form:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

When we write the functional equation in **vertex form**, it will look like this:

Vertex form:

$$\boxed{f(x) = a \cdot (x - x_V)^2 + y_V}$$

In this formula are $\mathbf{x_V}$ and $\mathbf{y_V}$ the coordinates of the vertex $V(x_V|y_V)$, parameter $\boldsymbol{a}$ is the same, that we know from the normal form as **factor of shape**.

At this point I do not want to deduce this formula. It would be possible very easy by using the following formula for shifting a function graph. If we want to shift a function graph of a arbitrary function (not only a quadratic function) by the value x_v to the right and y_v upwards, we get the functional equation of the shifted function $f_v(x)$ by using this formula:

Shifted funktion:

$$\boxed{f_v(x) = f(x - x_v) + y_v}$$

I also do not want to prove this formula at this point.[3]

Important: The vertex form provides two benefits compared to the normal form.

1. If the functional equation of a quadratic function is given in vertex form, we immediate can read in it the **coordinates of the vertex**.

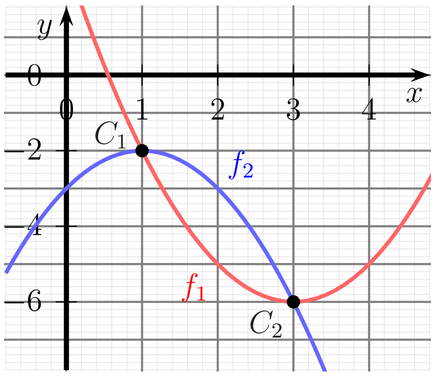
2. When we have to find out the functional equation of a quadratic function, and we know the factor of shape a and the coordinates of the vertex, we immediately can write down the functional equation.

[3] I wrote down details of shifting function graphs here:
http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/transfo.pdf

2.4 Determining crossing points

Also parabulas can have crossing points with each other. Opposite you see the function graphs of these functions:

$$f_1(x) = x^2 - 6x + 3 \quad \text{and} \quad f_2(x) = -x^2 + 2x - 3$$



In this case we have **two crossing points**, C_1 and C_2. It is also possible, that the parabolas have a position, that they do not hit each other. For example we imagin, that the function graph of f_1 would have a position 5 units higher. In this case the function graphs would run past **without any hit**. It is also possible, that the function graphs just touch each other with only **one common point**.

As we did it with linear functions[4] we can find out crossing points by equating the formula terms. I want to show, how it can be done by using this example.

$$\begin{array}{rcll}
f_1(x_C) &=& f_2(x_C) & \\
x_C^2 - 6x_C + 3 &=& -x_C^2 + 2x_C - 3 & \mid + x_C^2 - 2x_C + 3 \\
2x_C^2 - 8x_C + 6 &=& 0 & \mid : 2 \\
x_C^2 - 4x_C + 3 &=& 0 & \mid p\text{-}q\text{-formula} \\
x_{C1/2} &=& -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 3} & \\
&=& 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} & \\
&=& 2 \pm 1 & \\
x_{C1} = 2 - 1 = 1 && x_{C2} = 2 + 1 = 3 &
\end{array}$$

We get the corresponding y-values by putting the x-values into any desired functional equation, f_1 or f_2. My arbitrary choice is f_1.

$$y_{C1} = f_1(x_{C1}) = x_{C1}^2 - 6x_{C1} + 3 = 1^2 - 6 \cdot 1 + 3 = -2$$

$$y_{C2} = f_1(x_{C2}) = x_{C2}^2 - 6x_{C2} + 3 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 3 = -6$$

We have got these both crossing points: $\boxed{C_1(1|-2)}$ and $\boxed{C_2(3|-6)}$

[4]See also here: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/lin.pdf

3 Examples

3.1 Example 1

A quadratic function has the vertex $V(-1|12)$ and a zero at $x_0 = -3$. What is the functional equation?

Solution: As we know the vertex, we should use the vertex form as a method of resolution.

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot (x - x_V)^2 + y_V \\ &= a \cdot \big(x - (-1)\big)^2 + 12 \\ f(x) &= a \cdot (x + 1)^2 + 12 \end{aligned}$$

Now only the parameter $\boldsymbol{a}$ is missing. For the calculation we can use the known zero $x_0 = -3$. If we calculate the value of the function at $x_0 = -3$, we will get the value 0.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ a \cdot (x_0 + 1)^2 + 12 &= 0 \\ a \cdot (-3 + 1)^2 + 12 &= 0 \\ a \cdot (-2)^2 + 12 &= 0 \\ 4a + 12 &= 0 \qquad |-12 \\ 4a &= -12 \quad |:4 \\ a &= -3 \end{aligned}$$

Using this value we can show the funtional equation in vertex form.

$$f(x) = -3 \cdot (x + 1)^2 + 12$$

Now we have to transform the vertex form into the normal form. For that we transform the term in the brackets by using the first binomial formula.[5]

$$\begin{aligned} f(x) &= -3 \cdot (x + 1)^2 + 12 \\ &= -3 \cdot (x^2 + 2x + 1) + 12 \\ &= -3x^2 - 6x - 3 + 12 \\ f(x) &= -3x^2 - 6x + 9 \end{aligned}$$

We get the searched funktion: $\boxed{f(x) = -3x^2 - 6x + 9}$

[5]For details of the first binomial formula look here:
http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/binom.pdf

3.2 Example 2

A parabula passes through the points $P_1(3|9)$ and $P_2(4|19)$. She hits the y-axis at $y_0 = 3$. Where do we find her vertex?

Solution: A parabula is a quadratic function. So we can start with the normal form of a quadratic function:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

As the y-axis intercept is known as $y_0 = 3$, we also know the parameter c.

$$c = y_0 = 3$$

With this information we can concrete our functional equation:

$$f(x) = ax^2 + bx + 3$$

Now we can put the coordinates of the known points into the functional equation:

$$\begin{array}{llcrcl} P_1(3|9): & f(3) = 9 & \Rightarrow & a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 3 & = & 9 \\ P_2(4|19): & f(4) = 19 & \Rightarrow & a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + 3 & = & 19 \end{array}$$

At first we simplify the two equations:

$$\begin{array}{crcll} (1) & a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 3 & = & 9 & \\ (2) & a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + 3 & = & 19 & \\ \hline (1) & 9a + 3b + 3 & = & 9 & | -3 \\ (2) & 16a + 4b + 3 & = & 19 & | -3 \\ \hline (1) & 9a + 3b & = & 6 & \\ (2) & 16a + 4b & = & 16 & \end{array}$$

This system of equations can be solved with any desired method.[6] Arbitrary I choose the method of insertion. I dissolve equation (1) to b and insert the result into equation (2).

$$\begin{array}{rcll} 9a + 3b & = & 6 & | -9a \\ 3b & = & 6 - 9a & | :3 \\ b & = & 2 - 3a & \end{array}$$

Insertion in (2):

$$\begin{array}{rcll} 16a + 4b & = & 16 & \\ 16a + 4 \cdot (2 - 3a) & = & 16 & \\ 16a + 8 - 12a & = & 16 & | -8 \\ 4a & = & 8 & | :4 \\ a & = & 2 & \end{array}$$

[6] See for details of methods to solve a system of equations here: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/lingl.pdf

We insert this result into the converted equation (1) to get b.

$$b = 2 - 3a = 2 - 3 \cdot 2 = 2 - 6 = -4$$

With theese results we can concrete the functional equation:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 3$$

Now we have to calculate the coordinates of the vertex. The vertex formula will help us, to get them.

$$\begin{aligned} x_V &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{-4}{2 \cdot 2} \\ x_V &= 1 \end{aligned}$$

The corresponding y-value y_V we get from the functional equation.

$$\begin{aligned} y_V &= f(x_V) \\ &= 2x_V^2 - 4x_V + 3 \\ &= 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 \\ &= 2 - 4 + 3 \\ y_V &= 1 \end{aligned}$$

The vertex we looked for is: $\boxed{V(1|1)}$

3.3 Example 3

A parabula with the shape factor $a = -1$ runs through the points $P_1(1|4)$ and $P_2(4|1)$. Calculate the vertex!

Solution: The normal form of the functional equation is:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

As the shape factor is nown as $a = -1$, we can concrete the functional equation:

$$f(x) = -x^2 + bx + c$$

The coordinates of both points can be inserted.

$$\begin{array}{lllrcl} P_1(1|4): & f(1) = 4 & \Rightarrow & -1^2 + b\cdot 1 + c & = & 4 \\ P_2(4|1): & f(4) = 1 & \Rightarrow & -4^2 + b\cdot 4 + c & = & 1 \end{array}$$

At first we simplify the two equations:

$$\begin{array}{lrcll} (1) & -1^2 + b\cdot 1 + c & = & 4 & \\ (2) & -4^2 + b\cdot 4 + c & = & 1 & \\ \hline (1) & -1 + b + c & = & 4 & | +1 \\ (2) & -16 + 4b + c & = & 1 & | +16 \\ \hline (1) & b + c & = & 5 & \\ (2) & 4b + c & = & 17 & \end{array}$$

This system of equations can be solved with any desired method.[7] As both equations have the same coefficient of c (it is 1), the method of subtraction should be beneficial, c immediately will disappear.

$$\begin{array}{llrcll} (1) & b & +c & = & 5 & |- \\ (2) & 4b & +c & = & 17 & | \\ \hline & 3b & & = & 12 & | :3 \\ & b & & = & 4 & \end{array}$$

To get the value of c we put this solution into equation (1) or (2). As equation (1) looks a little bit simpler, I take this equation.

$$\begin{array}{rcll} b + c & = & 5 & \\ 4 + c & = & 5 & | -4 \\ c & = & 1 & \end{array}$$

With theese solutions we can present the functional equation:

$$f(x) = -x^2 + 4x + 1$$

[7]See for details of methods to solve a system of equations here: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/lingl.pdf

Now we have to calculate the coordinates of the vertex. The vertex formula will help us, to get them.

$$\begin{aligned} x_V &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{4}{2 \cdot (-1)} \\ x_V &= 2 \end{aligned}$$

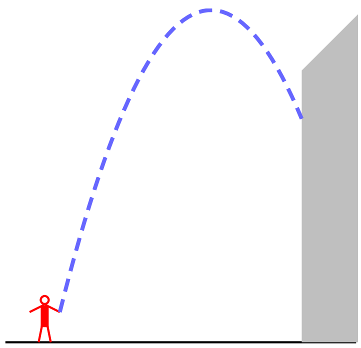
The corresponding y-value y_V we get from the functional equation.

$$\begin{aligned} y_V &= f(x_V) \\ &= -x_V^2 + 4x_V + 1 \\ &= -2^2 + 4 \cdot 2 + 1 \\ &= -4 + 8 + 1 \\ y_V &= 5 \end{aligned}$$

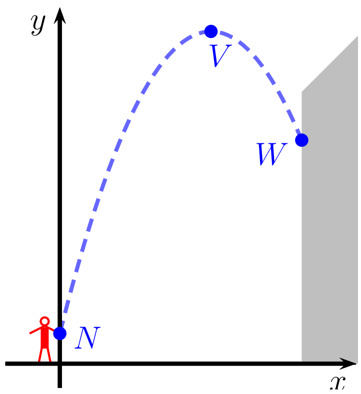
The vertex we looked for is: $\boxed{V(2|5)}$

3.4 Example 4

A firefighter wants to extinguish a fire in a building with the water jet comming out of his hose. The building has a distance of 8 meter to him. The water jet hits a window, 7,40 meter above the ground. The firefighter has the nozzle of the hose one meter above the ground in his hands. In a horizontal ditance of 5 meter the water jet has its maximum height. What is the value of the maximum height? The water jet has the shape of a parabula.



Solution: To solve this problem it is useful to place a coordinate system into the sketch plan. There are of course several positions to place it. But when we have decided a position, the functional equation will depend on this coordinate system.



In my example of solution I place the x-axis to the bottom of the earth. The y-axis I place through the nozzle of the hose in the firefighters hand. The point of the nozzle I mark with the letter N. The point, where the water jet hits the window, I mark with the letter W. V is the vertex.

For all furter calculations I use the unit *meter* for all dimensions. So it is possible to omit all dimensions during the calculations. Using the known data we can write down all points in this way:

$$N(0|1) \qquad W(8|7{,}4) \qquad V(5|y_V)$$

We have to find out the value of parameter y_V.

As the water jet has the shape of a **parabula**, the corrseponding function is a quadratic function. Therefore we get thwo different concepts for the solution:

1. Vertex form
2. Normal form

Variant 1 of solution: Let us start with the **vertex form** of the quadratic function.

$$f(x) = a \cdot (x - x_V)^2 + y_V$$

The already known value $x_V = 5$ will be insertet.

$$f(x) = a \cdot (x - 5)^2 + y_V$$

Now we can insert the parameters of the known points $L(0|1)$ and $F(8|7{,}4)$ into the functional equation.

$$\begin{array}{rlcrcl} L(0|1): & f(0) = 1 & \Rightarrow & a \cdot (0-5)^2 + y_V & = & 1 \\ F(8|7{,}4): & f(8) = 7{,}4 & \Rightarrow & a \cdot (8-5)^2 + y_V & = & 7{,}4 \end{array}$$

Both equations – I name them equation (1) and (2) – will now be simplified.

$$\begin{array}{crcl} (1) & a \cdot (0-5)^2 + y_V & = & 1 \\ (2) & a \cdot (8-5)^2 + y_V & = & 7{,}4 \\ \hline (1) & a \cdot 5^2 + y_V & = & 1 \\ (2) & a \cdot 3^2 + y_V & = & 7{,}4 \\ \hline (1) & 25a + y_V & = & 1 \\ (2) & 9a + y_V & = & 7{,}4 \end{array}$$

This system of equations can be solved with any desired method. As both equations have the same coefficient of c (it is 1), the method of subtraction[8] should be beneficial. y_V immediately will disappear, if equation (2) is subtracted from equation (1), as in both equations its coefficient is equal.

$$\begin{array}{ccccl|l} (1) & 25a & +y_V & = & 1 & \\ (2) & 9a & +y_V & = & 7{,}4 & - \\ \hline & 16a & & = & -6{,}4 & :16 \\ & a & & = & -0{,}4 & \end{array}$$

To get the value of y_V we insert this value $a = -0{,}4$ into equation (1) or (2). I have choosen equation (1).

$$\begin{array}{rcll} 25a + y_V & = & 1 & \\ 25 \cdot (-0{,}4) + y_V & = & 1 & \\ -10 + y_V & = & 1 & |+10 \\ y_V & = & 11 & \end{array}$$

[8] See for details of method of subtraction here:
http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/add.pdf

Variant 2 of solution: Now we use the **normal form** to solve the problem.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

In this variant of solution we have do get not only two parameters (a and y_V), we need **tree** of them (a, b and c) to get the functional equation.

At first we can – similar to variant of solution 1 – insert the coordinates of the points $L(0|1)$ and $F(8|7{,}4)$ into the normal form.

$$\begin{array}{rlrcl} L(0|1): & f(0) = 1 & \Rightarrow \quad a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & = & 1 \\ F(8|7{,}4): & f(8) = 7{,}4 & \Rightarrow \quad a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c & = & 7{,}4 \end{array}$$

Now we simplify both equations.

$$\begin{array}{lrcll} (1) & 0a + 0b + c & = & 1 & \Rightarrow \quad c = 1 \\ (2) & 64a + 8b + c & = & 7{,}4 & \end{array}$$

We got immediately parameter $c = 1$ out of equation (1). This value we can insert into equation (2). Afterwards we simplify the equation.

$$\begin{array}{lrcll} (2) & 64a + 8b + c & = & 7{,}4 & \\ (2) & 64a + 8b + 1 & = & 7{,}4 & |-1 \\ (2) & 64a + 8b & = & 6{,}4 & \end{array}$$

We did not use the fact, that we know the x-value of the vertex with $x_V = 5$. This value can be inserted into the vertex formula.

$$\begin{array}{rcl} x_V & = & -\dfrac{b}{2a} \\ 5 & = & -\dfrac{b}{2a} \end{array}$$

It is simple to rearrange this equation to b. We insert the result into the tranformed equation (2). This work is called **method of insertion**.[9]

$$\begin{array}{rcll} 5 & = & -\dfrac{b}{2a} & |\cdot(-2a) \\ -10a & = & b & \end{array}$$

Insert into equation (2):

$$\begin{array}{rcll} 64a + 8b & = & 6{,}4 & \\ 64a + 8 \cdot (-10a) & = & 6{,}4 & \\ 64a - 80a & = & 6{,}4 & \\ -16a & = & 6{,}4 & |:(-16) \\ a & = & -0{,}4 & \end{array}$$

[9] For details of the method of insertion look here:
http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/einsetz.pdf

We insert this result into the tranformed vertex formula.

$$\begin{aligned} b &= -10a \\ &= -10 \cdot (-0{,}4) \\ b &= 4 \end{aligned}$$

With this result we can write down the functional equation.

$$f(x) = -0{,}4x^2 + 4x + 1$$

We insert the known value $x_V = 5$ as x in the functional equation to get the y-value y_V of the vertex.

$$\begin{aligned} y_V &= f(x_V) \\ &= -0{,}4x_V^2 + 4x_V + 1 \\ &= -0{,}4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 1 \\ &= -10 + 20 + 1 \\ y_V &= 11 \end{aligned}$$

Comparing both methods of solution we probably notice, that the first variant of solution is a little bit shorter. In any case we get the result:

$\boxed{\text{The water jet reaches a maximum height of 11 meter.}}$

3.5 Example 5

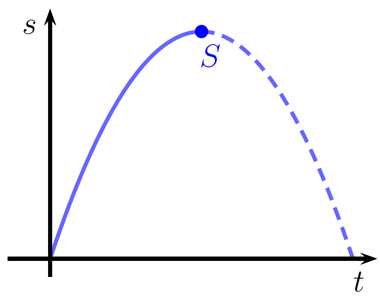
Ein Kind springt auf die Straße. Ein Autofahrer, der mit der innerorts erlaubten Geschwindigkeit von 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt, kann gerade noch unmittelbar vor dem Kind anhalten. Mit welcher Geschwindigkeit würde er das Kind anfahren, wenn er unzulässigerweise „ein bischen“ zu schnell, nämlich mit 70 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ gefahren wäre?

Solution: Hier brauchen wir zunächst ein paar physikalische Grundlagen. Der in der Zeit t zurückgelegte Weg s eines bremsenden Fahrzeuges stellt eine Quadratische Funktion dar. Sie lautet:

$$s(t) = -\frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

Achtung! Der Parameter a in dieser Formel ist nicht identisch mit dem Parameter a aus der Normalform der Quadratischen Funktion. Hier ist a die Bremsverzögerung und v_0 die Anfangsgeschwindigkeit des Fahrzeuges. Dabei verringert sich die Geschwindigkeit nach der Linearen Funktion:

$$v(t) = v_0 - a \cdot t$$



Nebenstehend ist der Verlauf der Weg-Zeit-Funktion des Bremsvorgangs dargestellt. Am Koordinatenursprung beim Zeitpunkt $t = 0$ beginnt der Bremsvorgang. Das Fahrzeug bewegt sich zunächst weiter vorwärts. Der steile Kurvenverlauf ganz links kurz nach dem Beginn des Bremsvorgangs lässt auf eine hohe Geschwindigkeit schließen. Dann wird die Kurve immer flacher, das Fahrzeug wird langsamer. Im Scheitelpunkt S kommt das Fahrzeug zum Stehen. Weil hier der Bremsvorgang endet, endet hier auch der Definitionsbereich der Quadratischen Funktion für den Bremsvorgang. Würde weiterhin eine Kraft wie die Bremskraft am Fahrzeug nach hinten ziehen, dann würde sich das Fahrzeug rückwärts beschleunigen und dem gestrichelten Kurvenverlauf folgen. Da das aber nicht passiert, ist der Kurvenverlauf hier nur gestrichelt eingezeichnet.

Man kann unter normalen Bedingungen von einer Bremsverzögerung von etwa 4 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ausgehen.

Zum bequemen Rechnen möchte ich die Einheiten weglassen. Da alle Zeiten in Sekunden und alle Wege im Metern angegeben werden sollen, müssten die Geschwindigkeiten eigentlich in Meter pro Sekunde umgerechnet werden. Man kann das aber auch in die Formeln hineinnehmen. Da 1 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ = 3,6 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sind, muss nur der Faktor 3,6 in die Formeln eingebaut werden. Damit erhalten wir die nachfolgenden Formen der Formeln. Zunächst die Weg-Zeit-Funktion:

$$s(t) = -\frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + \frac{v_0}{3{,}6} \cdot t$$

Und hier die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion:

$$
\begin{aligned}
\frac{v(t)}{3{,}6} &= \frac{v_0}{3{,}6} - a \cdot t \qquad | \cdot 3{,}6 \\
v(t) &= v_0 - 3{,}6 \cdot a \cdot t
\end{aligned}
$$

Zur Erinnerung: Verwendet man diese Form der Formeln, dann wird s in Metern, t in Sekunden, a in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ und v in $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ eingesetzt.

Hiermit ergibt sich folgender Lösungsweg:

1. Man berechnet für die erlaubte Geschwindigkeit die Zeit bis zum Stillstand des Fahrzeuges, indem man den t_S-Wert (x_S-Wert) des Scheitelpunktes der Quadratischen Weg-Zeit-Funktion mit Hilfe der Scheitelpunktformel berechnet.

2. Mit dieser Zeit kann der Bremsweg als s_S-Wert (y_S-Wert) der Quadratische Weg-Zeit-Funktion ermittelt werden.

3. Mit diesem errechneten Bremsweg wir die Zeit ausgerechnet, nach der das zu schnelle Fahrzeug auf das Kind trifft.

4. Mit dieser Zeit und der schnelleren Anfangsgeschwindigkeit kann über die Lineare Geschwindigkeits-Zeit-Funktion die Geschwindigkeit berechnet werden, mit der das Kind angefahren wird.

Zunächst setzen wir den angenommenen Wert der Bremsverzögerung von $4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ in die Formeln ein und vereinfachen diese.

$$
\begin{aligned}
s(t) &= -\frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + \frac{v_0}{3{,}6} \cdot t \\
s(t) &= -\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot t^2 + \frac{v_0}{3{,}6} \cdot t \\
s(t) &= -2 \cdot t^2 + \frac{v_0}{3{,}6} \cdot t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v(t) &= v_0 - 3{,}6 \cdot a \cdot t \\
v(t) &= v_0 - 3{,}6 \cdot 4 \cdot t \\
v(t) &= v_0 - 14{,}4 \cdot t
\end{aligned}
$$

Dann wird die Zeit für die Bremsung bei erlaubter Geschwindigkeit berechnet. Das ist der t-Wert t_S des Scheitelpunktes.

$$
\begin{aligned}
t_S &= -\frac{b}{2a} \\
&= -\frac{\frac{50}{3{,}6}}{2 \cdot (-2)} \\
t_S &= 3{,}472
\end{aligned}
$$

Nach 3,472 Sekunden kommt das Fahrzeug zu Stehen. Der Bremsweg s_S wird berechnet.

$$\begin{aligned}
s_S &= -2 \cdot t^2 + \frac{v_0}{3{,}6} \cdot t \\
&= -2 \cdot (3{,}472)^2 + \frac{50}{3{,}6} \cdot 3{,}472 \\
s_S &= 24{,}11
\end{aligned}$$

Der Bremsweg bei den erlaubten 50 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ beträgt 24,11 m.

Jetzt wird berechnet, wie lange es bei einer Anfangsgeschwindigkeit von 70 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ dauert, bis 24,11 m zurückgelegt sind. Die dabei entstehende Quadratische Gleichung wird mit der p-q-Formel[10] gelöst.

$$\begin{aligned}
s &= -2 \cdot t^2 + \tfrac{v_0}{3{,}6} \cdot t \\
24{,}11 &= -2 \cdot t^2 + \tfrac{70}{3{,}6} \cdot t && | + 2 \cdot t^2 - \tfrac{70}{3{,}6} \\
2 \cdot t^2 - \tfrac{70}{3{,}6} \cdot t + 24{,}11 &= 0 && | : 2 \\
t^2 - 9{,}72 \cdot t + 12{,}055 &= 0 \\
t_{1/2} &= -\tfrac{-9{,}72}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{-9{,}72}{2}\right)^2 - 12{,}055} \\
t_{1/2} &= 4{,}86 \pm 3{,}40 \\
t_1 = 1{,}46 & \quad t_2 = 8{,}26
\end{aligned}$$

Jetzt stellt sich vermutlich die Frage, wieso wir denn zwei Ergebnisse erhalten haben. Der Grund ist folgender:

Wie bereits weiter vorne erwähnt, bedeutet „Bremsen“ für das Fahrzeug eine Kraft, die es nach hinten zieht. Dadurch wird es langsamer, bis zum Stillstand. Würde jetzt immer noch eine Kraft wirken, die nach hinten zieht, dann würde das Fahrzeug rückwärts beschleunigt und irgendwann wieder an der Wegmarke bei 24,11 m vorbeikommen. Deswegen verliert die Formel zum Zeitpunkt des Stillstandes ihre Gültigkeit, die größere Zeit liegt **außerhalb** des Gültigkeitsbereiches der Formel. Deshalb müssen wir mit der kleineren Zeit von $t_1 = 1{,}46$ s rechnen.

$$\begin{aligned}
v &= v_0 - 14{,}4 \cdot t \\
&= 70 - 14{,}4 \cdot 1{,}46 \\
v &= 48{,}98
\end{aligned}$$

Das Kind wird demnach mit einer Geschwindigkeit von 48,98 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Das ist ungefähr die erlaubte Geschwindigkeit. Ein „bischen“ schneller hat also sehr gravierende Folgen für das Kind.

[10]Einzelheiten zur p-q-Formel siehe hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/quad.pdf

Nachtrag: Was wäre gewesen, wenn wir mit der größeren Zeit von $t_1 = 8{,}26\,\mathrm{s}$ gerechnet hätten? Probieren wir es aus.

$$\begin{aligned} v &= v_0 - 14{,}4 \cdot t \\ &= 70 - 14{,}4 \cdot 8{,}26 \\ v &= -48{,}94 \end{aligned}$$

Das ist (von Rundungsfehlern abgesehen) der gleiche Betrag, wie bei der kleineren Zeit, nur mit negativem Vorzeichen. Mit dieser Geschwindigkeit käme das Fahrzeug also **rückwärts** wieder an der Wegmarke bei $24{,}11\,\mathrm{m}$ vorbei, wenn die rückwärtsgerichtete bremsende Kraft auch nach dem Stillstand weiter wirken würde. Aber das tut sie bekanntlich ja nicht.

4 Aufgaben

4.1 Aufgabe 1:

Geben Sie Quadratische Funktion $f(x)$ mit dem Formfaktor 1 an, deren Scheitelpunkt $S(4|-7)$ lautet!

4.2 Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion $f_1(x) = 2x^2 - 4x + 3$. Geben Sie die Funktion $f_2(x)$ an, die gegenüber der Funktion $f_1(x)$ um 3 Einheiten nach rechts und 2 Einheiten nach unten verschoben ist!

4.3 Aufgabe 3:

Die Quadratische Funktion hat den Scheitelpunkt $S(4|1)$. Der Graph schneidet die y-Achse bei $y_0 = -7$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

4.4 Aufgabe 4:

Bestimmen Sie den Scheitelpunkt, die Nullstellen und den Wertebereich der Quadratischen Funktion $f(x) = 3x^2 - 12x + 15$!

4.5 Aufgabe 5:

Bestimmen Sie den Scheitelpunkt, die Nullstellen und den Wertebereich der Quadratischen Funktion $f(x) = -16x^2 - 16x + 5$!

4.6 Aufgabe 6:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Parabel mit $f_1(x) = 4x^2 - 9x + 1$ und der Geraden mit $f_2(x) = 3x + 17$!

4.7 Aufgabe 7:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Parabel mit $f_1(x) = 9x^2 + 12x - 4$ und der Geraden mit $f_2(x) = -12x + 5$!

4.8 Aufgabe 8:

Gegeben ist die Quadratische Funktion $f(x) = -2x^2 + 5x - 3$. Geben Sie den Scheitelpunkt an und bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$. Welchen Definitionsbereich hat die Umkehrfunktion?

4.9 Aufgabe 9:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der beiden Parabeln mit den Funktionsgleichungen $f_1(x) = 4x^2 + 3x - 8$ und $f_2(x) = 7x^2 + 9x + 7$.

4.10 Aufgabe 10:

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Quadratischen Funktion, deren Graph durch die Punkte $P_1(-1|8)$, $P_2(2|-1)$ und $P_3(4|3)$ verläuft.

4.11 Aufgabe 11:

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Linearen Funktion $f_2(x)$, deren Graph die Parabel der Quadratischen Funktion $f_1(x) = x^2 - 4x + 4$ bei $x_b = 4$ als Tangente berührt.

4.12 Aufgabe 12:

Der Graph der Quadratischen Funktion $f(x)$ hat den Scheitelpunkt $S(3|2)$ und verläuft durch den Punkt $P(5|10)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von $f(x)$!

4.13 Aufgabe 13:

Bestimmen Sie die Nullstellen und den Scheitelpunkt der Quadratischen Funktion (soweit vorhanden):

$$f(x) = -16x^2 + 24x - 25$$

4.14 Aufgabe 14:

Die Quadratische Funktion $f(x)$ hat den Scheitelpunkt $S(4|3)$ und verläuft durch den Punkt $P(6|11)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von $f(x)$!

4.15 Aufgabe 15:

Die Quadratische Funktion $f(x)$ verläuft durch die drei Punkte $P_1(-3|32)$, $P_2(-1|10)$ und $P_3(2|7)$. Geben Sie die Funktionsgleichung an!

4.16 Aufgabe 16:

Eine verschobene Normalparabel (Formfaktor $a = 1$) verläuft durch die Punkte $P_1(-1|-2)$ und $P_2(0|1)$. Geben Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ an!

4.17 Aufgabe 17:

Eine Parabel (Quadratische Funktion) verläuft durch die drei Punkte $P_1(0|8)$, $P_2(1|3)$ und $P_3(2|0)$. Geben Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ an!

4.18 Aufgabe 18:

Eine Parabel (Quadratische Funktion) hat den Scheitelpunkt $S(-2|0)$ und verläuft durch den Punkt $P(-1|-2)$. Geben Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ an!

4.19 Aufgabe 19:

Verschieben Sie die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 1$ so nach **oben**, dass die neue Parabel durch den Punkt $P(2|3)$ verläuft. Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung $f_2(x)$ an!

4.20 Aufgabe 20:

Verschieben Sie die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 7$ so nach **links**, dass die neue Parabel durch den Punkt $P(0|\frac{7}{2})$ verläuft. Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung $f_2(x)$ an! (Geben Sie **alle** Lösungen an!)

4.21 Aufgabe 21:

Wie ist die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 7$ zu verändern, damit bei **gleichem Scheitelpunkt** der Punkt $P(3|-6)$ zur neuen Parabel gehört. Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung $f_2(x)$ an!

4.22 Aufgabe 22:

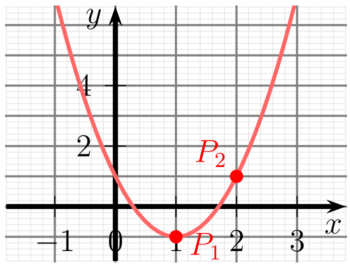
Die Parabel der Quadratischen Funktion $f_1(x)$ schneidet die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = x - 2$ bei $x_1 = -4$ und $x_2 = 1$. Die Parabel schneidet die y-Achse bei $y_0 = 2$. Geben Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ an!

4.23 Aufgabe 23:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte – falls vorhanden – der beiden Parabeln mit den Funktionsgleichungen $f_1(x) = x^2 - 2x + 3$ und $f_2(x) = 2x^2 - 8x + 12$.

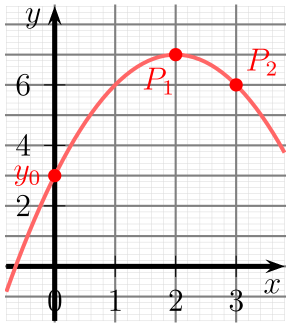
4.24 Aufgabe 24:

Eine Parabel mit dem Formfaktor $a = 2$ verläuft durch die Punkte $P_1(1|-1)$ und $P_2(2|1)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$!



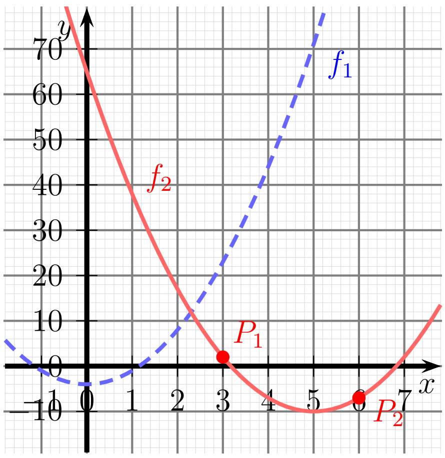
4.25 Aufgabe 25:

Eine Parabel verläuft durch die Punkte $P_1(2|7)$ und $P_2(3|6)$ und schneidet die y-Achse bei $y_0 = 3$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$!



4.26 Aufgabe 26:

Verschieben Sie die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = 3x^2 - 4$ so, dass sie durch die Punkte $P_1(3|2)$ und $P_2(6|-7)$ verläuft. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_2(x)$ der so entstandenen Funktion.



4.27 Aufgabe 27:

Eine Quadratische Funktion hat den Formfaktor $a = -1$ und den Scheitelpunkt $S(2|3)$. Geben Sie die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform und in Normalform an!

4.28 Aufgabe 28:

Der Funktionsgraph einer Quadratische Funktion mit dem Scheitelpunkt $S(3|-1)$ verläuft durch den Punkt $P(1|7)$. Geben Sie die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform und in Normalform an!

4.29 Aufgabe 29:

Gegeben ist eine Quadratische Funktion mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = -2x^2 - 4x + 6$$

Berechnen Sie den Scheitelpunkt und die Nullstellen.

4.30 Aufgabe 30:

Eine Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(4|7)$ schneidet die y-Achse bei $y_0 = 3$. Bestimmen Sie die zugehörige Funktionsgleichung!

4.31 Aufgabe 31:

Gegeben ist die Quadratische Funktion mit der Funktionsgleichung:

$$f_1(x) = 3x^2 + 24x + 53$$

Gesucht ist die Funktion f_2, deren Funktionsgraph den selben Scheitelpunkt hat wie f_1. Der Funktionsgraph von f_2 verläuft außerdem durch den Punkt $P(-2|-3)$.

4.32 Aufgabe 32:

Eine Parabel verläuft durch die Punkte $P_1(0|14)$ und $P_2(2|-2)$. Der Scheitelpunkt liegt an der Stelle $x_S = 3$. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung?

4.33 Aufgabe 33:

Welche dieser fünf Funktionen haben den selben Scheitelpunkt?

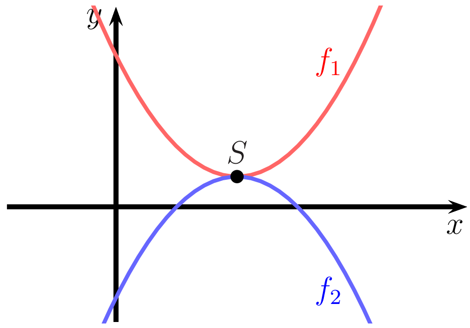
$$\begin{aligned}
f_1(x) &= x^2 - 10x + 21 \\
f_2(x) &= 3x^2 - 30x + 71 \\
f_3(x) &= -2x^2 + 20x - 48 \\
f_4(x) &= 0{,}5x^2 + 5x + 8{,}5 \\
f_5(x) &= 4 \cdot (x-5)^2 - 4
\end{aligned}$$

4.34 Aufgabe 34:

Gegeben ist die Funktion f_1 mit der Funktionsgleichung

$$f_1(x) = 4x^2 - 24x + 37$$

Gesucht ist die Funktion f_2, die aus f_1 dadurch entstanden ist, dass man die Parabel von f_1 um 180° um deren Scheitelpunkt S gedreht hat, wie nebenstehend dargestellt.



4.35 Aufgabe 35:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Parabel mit $f_1(x) = 10x^2 + 12x - 4$ und der Geraden mit $f_2(x) = 9x - 3$.

5 Solutions

5.1 Aufgabe 1:

Geben Sie Quadratische Funktion $f(x)$ mit dem Formfaktor 1 an, deren Scheitelpunkt $S(4|-7)$ lautet!

Solution: Es bietet sich an, die Scheitelpunktform der Funktionsgleichung zu verwenden.

$$f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$$

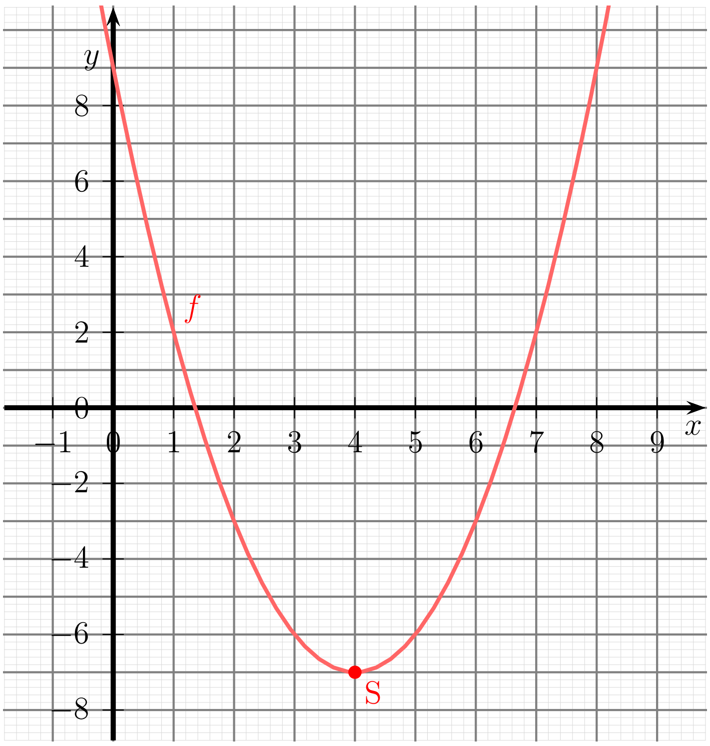
Setzt man die bekannten Koordinaten und den ebenfalls bekannten Formfaktor ein, ist man schon fertig.

$$f(x) = 1 \cdot (x - 4)^2 - 7$$

Wenn man möchte, kann man die Klammer noch auflösen, um die Gleichung in die Normalform zu bringen.

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \cdot (x-4)^2 - 7 \\ &= x^2 - 8x + 16 - 7 \\ f(x) &= x^2 - 8x + 9 \end{aligned}$$

Nachfolgend ist der Verlauf des Funktionsgraphen dargestellt.



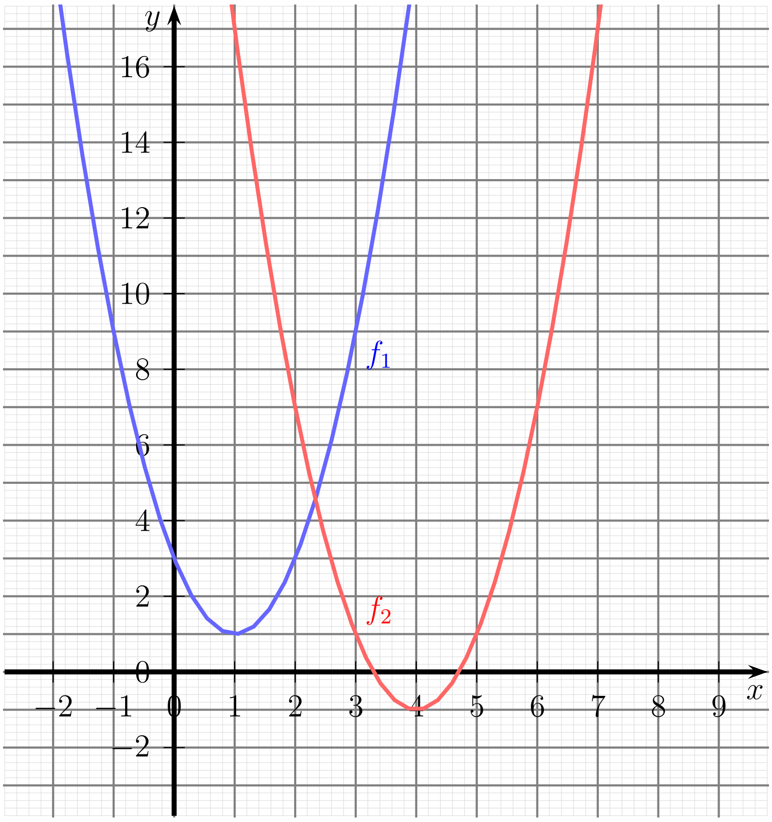
5.2 Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion $f_1(x) = 2x^2 - 4x + 3$. Geben Sie die Funktion $f_2(x)$ an, die gegenüber der Funktion $f_1(x)$ um 3 Einheiten nach rechts und 2 Einheiten nach unten verschoben ist!

Solution: Für dieses Problem bietet sich die Verschiebeformel an. 2 Einheiten nach unten entsprechen dabei -2 Einheiten nach oben.

$$\begin{aligned} f_2(x) &= f_1(x-3) + (-2) \\ &= 2 \cdot (x-3)^2 - 4 \cdot (x-3) + 3 - 2 \\ &= 2 \cdot (x^2 - 6x + 9) - 4x + 12 + 1 \\ &= 2x^2 - 12x + 18 - 4x + 13 \\ f_2(x) &= 2x^2 - 16x + 31 \end{aligned}$$

Nachfolgend ist der Verlauf der Funktionsgraphen dargestellt.



5.3 Aufgabe 3:

Die Quadratische Funktion hat den Scheitelpunkt $S(4|1)$. Der Graph schneidet die y-Achse bei $y_0 = -7$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Solution: Da der Scheitelpunkt bekannt ist, bietet sich die Scheitelpunktform an. Es muss dann nur noch a berechnet werden.

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot (x - x_S)^2 + y_S \\ f(x) &= a \cdot (x - 4)^2 + 1 \end{aligned}$$

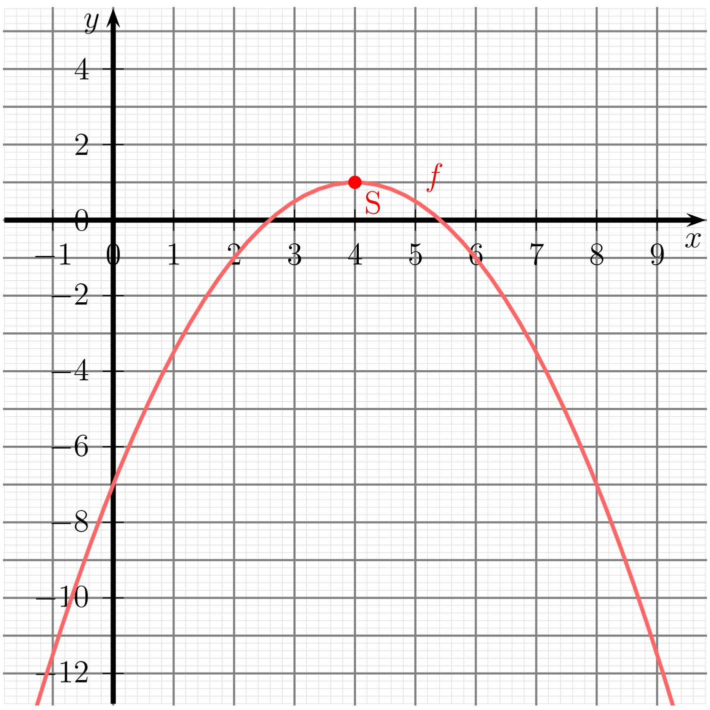
Der Schnittpunkt mit der y-Achse bedeutet: $f(0) = y_S$. Das setzen wir ein.

$$\begin{aligned} -7 &= a \cdot (0 - 4)^2 + 1 \\ -7 &= a \cdot 16 + 1 && | - 1 \\ -8 &= 16a && | : 16 \\ a &= -\frac{8}{16} \\ a &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Mit diesem Wert für a erhalten wir die gesuchte Funktion:

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x-4)^2 + 1 = -\frac{1}{2} \cdot (x^2 - 8x + 16) + 1 = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 7$$

Nachfolgend ist der Verlauf des Funktionsgraphen dargestellt.



5.4 Aufgabe 4:

Bestimmen Sie den Scheitelpunkt, die Nullstellen und den Wertebereich der Quadratischen Funktion $f(x) = 3x^2 - 12x + 15$!

Solution: An einer Nullstelle ist der Funktionswert = 0. Daher lautet der Ansatz zur Nullstellenbestimmung: $f(x_0) = 0$.

$$\begin{aligned}
3x_0^2 - 12x_0 + 15 &= 0 \qquad\qquad | :3 \\
x_0^2 - 4x_0 + 5 &= 0 \\
x_{01/2} &= 2 \pm \sqrt{4-5} \\
x_{01/2} &= 2 \pm \sqrt{-1}
\end{aligned}$$

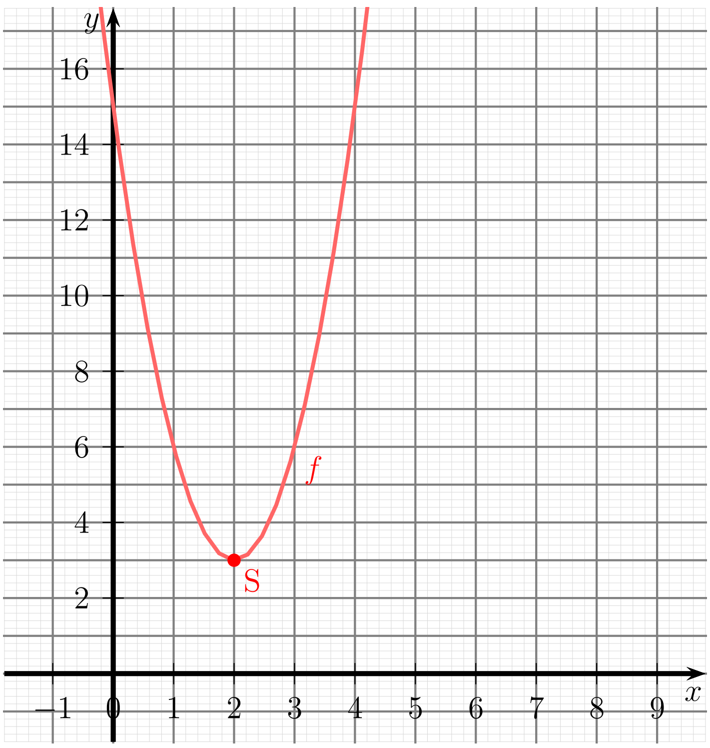
Da es für die Wurzel keine reelle Lösung gibt, gibt es keine Nullstellen. Andererseits kann man an dieser Gleichung schon den x-Wert des Scheitelpunktes ablesen. Es ist immer die Zahl, die vor der Wurzel steht, also $x_S = 2$. Den zugehörigen y-Wert y_S bekommt man durch Einsetzen von x_S in die Funktionsgleichung.

$$\begin{aligned}
y_S &= f(x_S) \\
&= 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 15 \\
y_S &= 3
\end{aligned}$$

Der Formfaktor ist mit $a = 3$ positiv, darum ist die Parabel nach oben geöffnet. Das wiederum bedeutet, dass der Scheitelpunkt der tiefste Punkt der Kurve ist. Also lautet der Wertebereich:

$$W = \{y | y \geq 3\}$$

Nachfolgend ist der Verlauf des Funktionsgraphen dargestellt.


y
16
14
12
10
8
6
4
2
f
S
x
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

5.5 Aufgabe 5:

Bestimmen Sie den Scheitelpunkt, die Nullstellen und den Wertebereich der Quadratischen Funktion $f(x) = -16x^2 - 16x + 5$!

Solution: An einer Nullstelle ist der Funktionswert = 0. Daher lautet der Ansatz zur Nullstellenbestimmung: $f(x_0) = 0$.

$$\begin{aligned}
-16x_0^2 - 16x_0 + 5 &= 0 & | : (-16)\\
x_0^2 + x_0 - \frac{5}{16} &= 0\\
x_{01/2} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{5}{16}}\\
x_{01/2} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4}{16} + \frac{5}{16}}\\
x_{01/2} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{16}}\\
x_{01/2} &= -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{4}\\
x_{01/2} &= -\frac{2}{4} \pm \frac{3}{4}\\
x_{01} &= \frac{1}{4}\\
x_{02} &= -\frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Wie schon bei Aufgabe 4 können wir daraus auch den x-Wert des Scheitelpunktes als die Zahl vor der Wurzel ablesen, also:

$$x_S = -\frac{1}{2}$$

Den zugehörigen y-Wert y_S finden wir wieder durch Einsetzen in die Funktionsgleichung:

$$y_S = f(x_S) = -16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 5 = 9$$

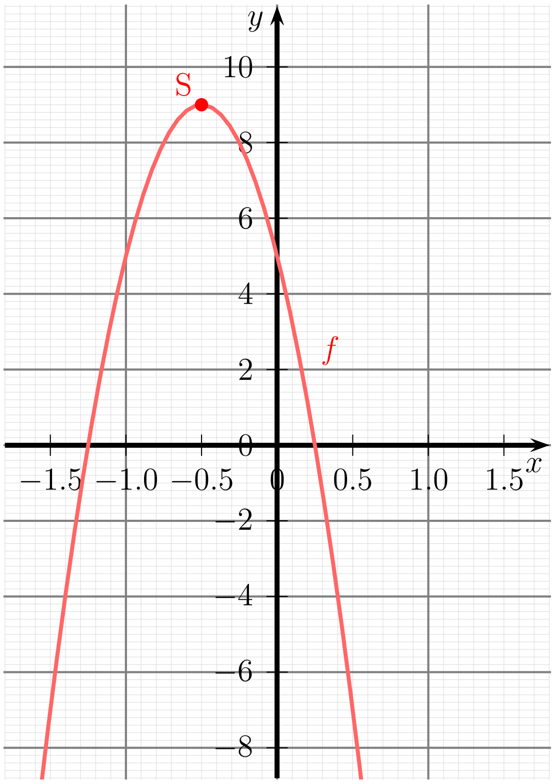
Der Scheitelpunkt lautet demnach:

$$S\left(-\tfrac{1}{2}|9\right)$$

Da der Formfaktor mit -16 negativ ist, ist die Parabel nach unten geöffnet. Der Wertebereich liegt also **unterhalb** des Scheitelpunktes:

$$W = \{x|x \leq 9\}$$

Nachfolgend ist der Verlauf des Funktionsgraphen dargestellt.



5.6 Aufgabe 6:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Parabel mit $f_1(x) = 4x^2 - 9x + 1$ und der Geraden mit $f_2(x) = 3x + 17$!

Solution: Die Schnittpunkte sind ja genau die Punkte beider Kurven, bei denen x- und y-Wert übereinstimmen. Ich kann also zur Schnittpunktbestimmung die Funktionsgleichungen gleichsetzen.

$$\begin{array}{rcll}
f_1(x_S) & = & f_2(x_S) & \\
4x_S^2 - 9x_S + 1 & = & 3x_S + 17 & \quad | - 3x_S - 17 \\
4x_S^2 - 12x_S - 16 & = & 0 & \quad | : 4 \\
x_S^2 - 3x_S - 4 & = & 0 & \\
x_{S1/2} & = & \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} & \\
 & = & \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} & \\
 & = & \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} & \\
x_{S1} & = & \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4 & \\
x_{S2} & = & \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -1 &
\end{array}$$

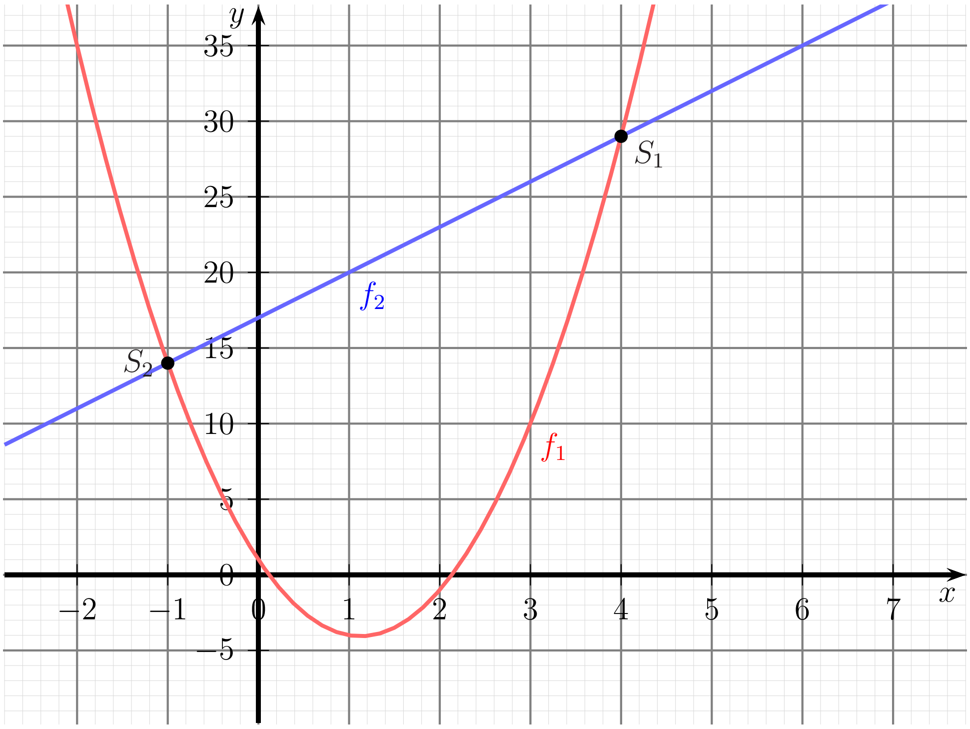
Die zugehörigen y-Werte bekommt man durch Einsetzen in eine der beiden Funktionsgleichungen. Ich wähle dafür f_2 aus, da sie etwas einfacher ist.

$$\begin{array}{rcl}
y_S & = & f_2(x_S) \\
y_{S1} & = & 3x_{S1} + 17 = 3 \cdot 4 + 17 = 29 \\
y_{S2} & = & 3x_{S2} + 17 = 3 \cdot (-1) + 17 = 14
\end{array}$$

Damit lauten die Schnittpunkte:

$$S_1(4|29) \text{ und } S_2(-1|14)$$

Nachfolgend ist der Verlauf der Funktionsgraphen dargestellt.



5.7 Aufgabe 7:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Parabel mit $f_1(x) = 9x^2 + 12x - 4$ und der Geraden mit $f_2(x) = -12x + 5$!

Solution: Die Schnittpunkte sind ja genau die Punkte beider Kurven, bei denen x- und y-Wert übereinstimmen. Ich kann also zur Schnittpunktbestimmung die Funktionsgleichungen gleichsetzen.

$$\begin{array}{rcll}
f_1(x_S) & = & f_2(x_S) & \\
9x_S^2 + 12x_S - 4 & = & -12x_S + 5 & \mid + 12x_S - 5 \\
9x_S^2 + 24x_S - 9 & = & 0 & \mid : 9 \\
x_S^2 + \frac{8}{3}x_S - 1 & = & 0 & \\
x_{S1/2} & = & -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{9}{9}} & \\
 & = & -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9}} & \\
 & = & -\frac{4}{3} \pm \frac{5}{3} & \\
x_{S1} & = & -\frac{4}{3} - \frac{5}{3} = -3 & \\
x_{S2} & = & -\frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{1}{3} &
\end{array}$$

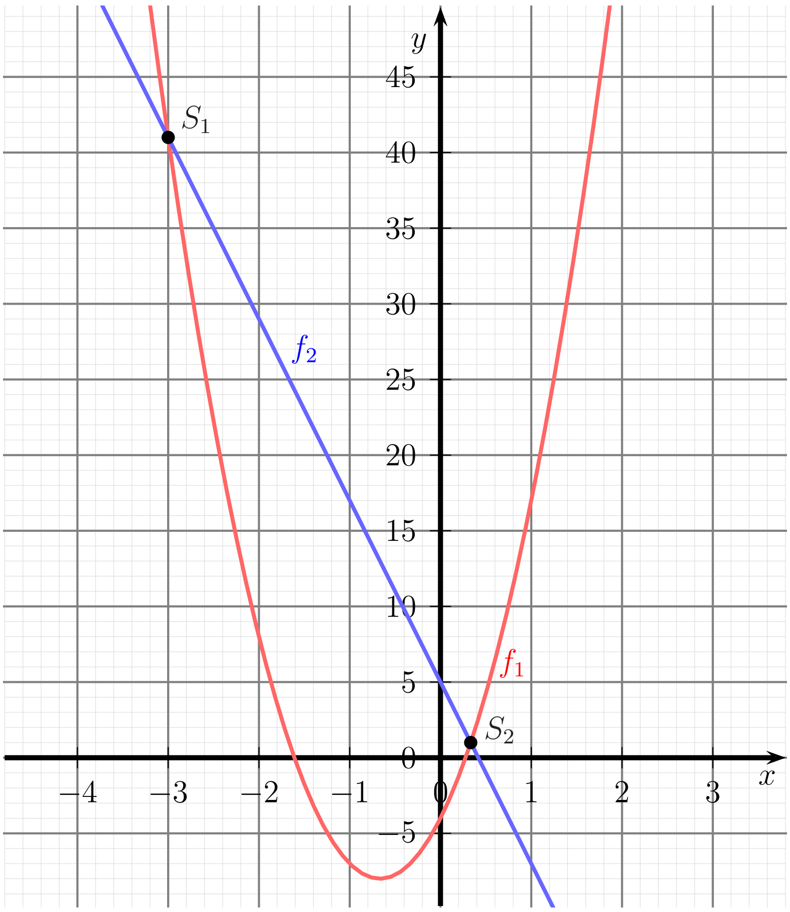
Die zugehörigen y-Werte bekommt man durch Einsetzen in eine der beiden Funktionsgleichungen. Ich wähle dafür f_2 aus, da sie etwas einfacher ist.

$$\begin{array}{rcl}
y_S & = & f_2(x_S) \\
y_{S1} & = & -12x_{S1} + 5 = -12 \cdot (-3) + 5 = 41 \\
y_{S2} & = & -12x_{S2} + 5 = -12 \cdot \frac{1}{3} + 5 = 1
\end{array}$$

Damit lauten die Schnittpunkte:

$$S_1(-3|41) \text{ und } S_2\left(\tfrac{1}{3}|1\right)$$

Nachfolgend ist der Verlauf der Funktionsgraphen dargestellt.



5.8 Aufgabe 8:

Gegeben ist die Quadratische Funktion $f(x) = -2x^2 + 5x - 3$. Geben Sie den Scheitelpunkt an und bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$. Welchen Definitionsbereich hat die Umkehrfunktion?

Solution: Den Scheitelpunkt bekommt man zweckmäßigerweise mit der Scheitelpunktformel.

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2 \cdot (-2)} = \frac{5}{4}$$

$$y_S = f(x_S) = -2x_S^2 + 5x_S - 3 = -2\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 5 \cdot \frac{5}{4} - 3 = \frac{1}{8}$$

$$S\left(\tfrac{5}{4}\middle|\tfrac{1}{8}\right)$$

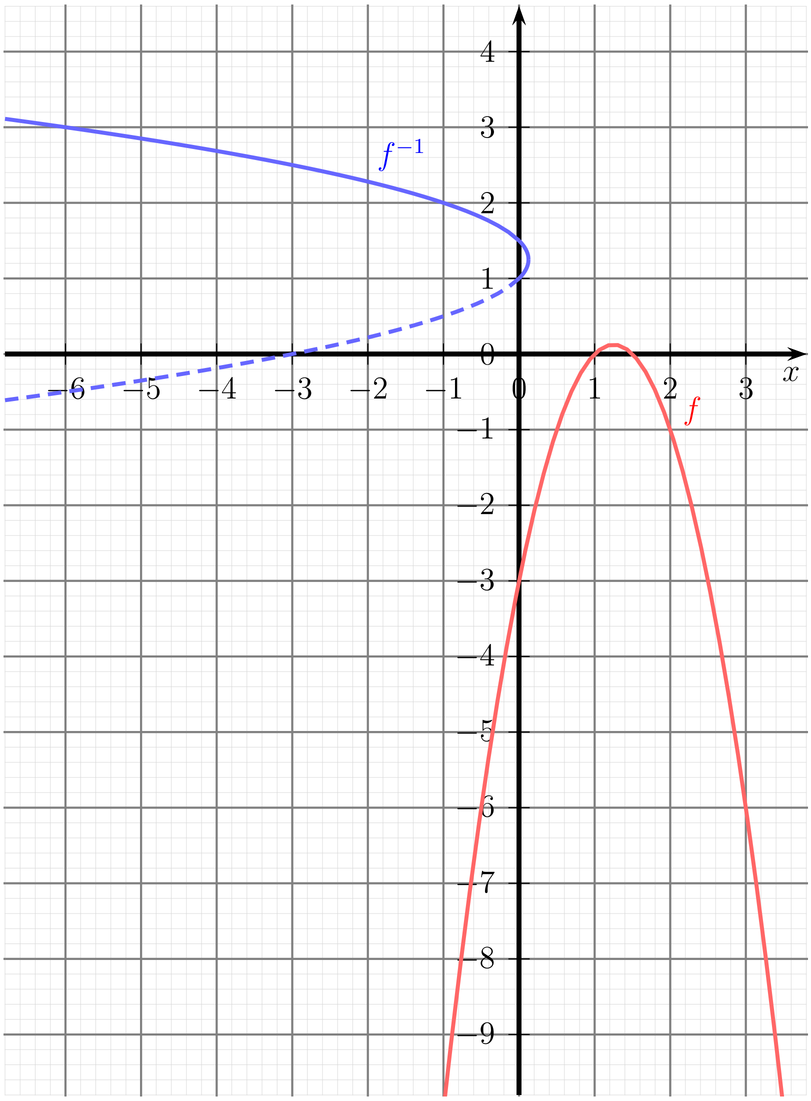
Die Umkehrfunktion wird bestimmt, indem man die Rollen von x und y tauscht und die dadurch entstandene Gleichung wieder nach y auflöst.

$$\begin{aligned}
y &= -2x^2 + 5x - 3 && \mid x \text{ und } y \text{ tauschen} \\
x &= -2y^2 + 5y - 3 && \mid +2y^2 - 5y + 3 \\
2y^2 - 5y + 3 + x &= 0 && \mid : 2 \\
y^2 - \frac{5}{2}y + \frac{3}{2} + \frac{x}{2} &= 0 && \mid \text{p-q-Formel} \\
y_{1/2} &= \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{24}{16} - \frac{8x}{16}} \\
&= \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{1-8x}{16}} \\
&= \frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{1-8x}}{4} \\
f^{-1}(x) &= \frac{5}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{1-8x}
\end{aligned}$$

Der Definitionsbereich wird dadurch eingeschränkt, dass der Wurzelinhalt (Radikand) nicht kleiner als Null weden darf.

$$\begin{aligned}
1 - 8x &\geq 0 && \mid -1 \\
-8x &\geq -1 && \mid : (-8) \\
x &\leq \frac{1}{8} \\
D &= \left\{ x \middle| x \leq \frac{1}{8} \right\}
\end{aligned}$$

Nachfolgend ist der Verlauf der Funktionsgraphen dargestellt.



5.9 Aufgabe 9:

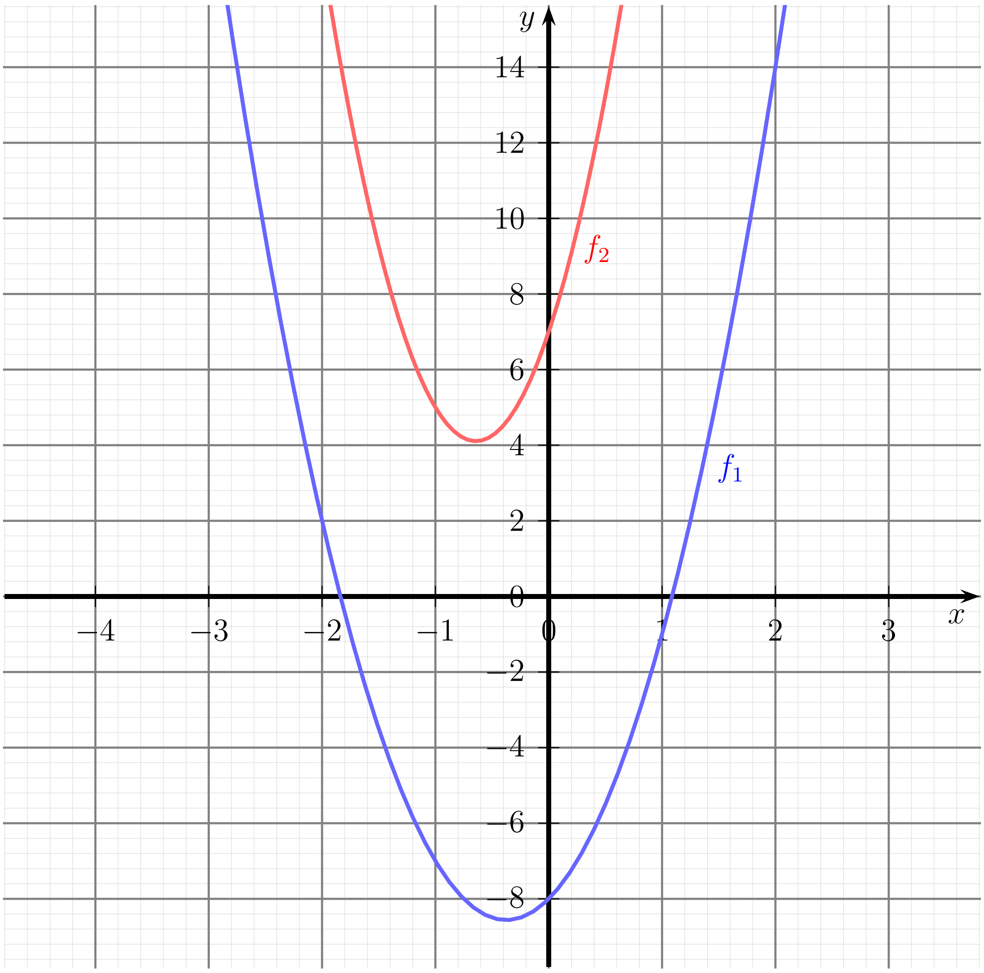
Bestimmen Sie die Schnittpunkte der beiden Parabeln mit den Funktionsgleichungen $f_1(x) = 4x^2 + 3x - 8$ und $f_2(x) = 7x^2 + 9x + 7$.

Solution: Die Schnittpunkte sind ja genau die Punkte beider Kurven, bei denen x- und y-Wert übereinstimmen. Ich kann also zur Schnittpunktbestimmung die Funktionsgleichungen gleichsetzen.

$$\begin{aligned}
4x_S^2 + 3x_S - 8 &= 7x_S^2 + 9x_S + 7 \quad | - 7x_S^2 - 9x_S - 7 \\
-3x_S^2 - 6x_S - 15 &= 0 \quad | : (-3) \\
x_S^2 + 2x_S + 5 &= 0 \\
x_{S1/2} &= -1 \pm \sqrt{1 - 5} \\
x_{S1/2} &= -1 \pm \sqrt{-4}
\end{aligned}$$

Da diese Wurzel nicht reell zu lösen ist, gibt es **keine Schnittpunkte**.

Nachfolgend ist der Verlauf der Funktionsgraphen dargestellt.



5.10 Aufgabe 10:

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Quadratischen Funktion, deren Graph durch die Punkte $P_1(-1|8)$, $P_2(2|-1)$ und $P_3(4|3)$ verläuft.

Solution: Zur Lösung gehen wir von der Normalform der Quadratischen Funktion aus. Wenn wir jeweils die Koordinaten eines Punktes einsetzen, dann erhalten wir drei Gleichungen als Lineargleichungssystem, aus denen wir die Parameter a, b und c berechnen können. Die Normalform lautet:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Wir setzen die Koordinaten der drei Punkte ein.

$$\begin{array}{rclcrcl} f(-1) & = & 8 & \Rightarrow & a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c & = & 8 \\ f(2) & = & -1 & \Rightarrow & a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c & = & -1 \\ f(4) & = & 3 & \Rightarrow & a\cdot 4^2 + b\cdot 4 + c & = & 3 \end{array}$$

Wenn wir das rechts stehende Lineargleichungssystem zusammenfassen, erhalten wir:

$$\begin{array}{rrrcr} a & -b & +c & = & 8 \\ 4a & +2b & +c & = & -1 \\ 16a & +4b & +c & = & 3 \end{array}$$

Dieses Lineargleichungssystem kann nun mit einem beliebigen Verfahren gelöst werden, also beispielsweise mit dem Einsetzungsverfahren, dem Additions-/Subtraktionsverfahren, der Cramerschen Regel oder dem Gauß-Jordan-Verfahren. Ich verwende hier als Beispiel die Cramersche Regel. Ich bestimme zunächst a:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{16 - 3 - 4 - 6 - 32 - 1}{2 - 16 + 16 - 32 - 4 + 4} = \frac{-30}{-30} = 1$$

Mit der nun bekannten Nennerdeterminante ist auch b schnell bestimmt:

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 16 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-30} = \frac{-1 + 128 + 12 + 16 - 3 - 32}{-30} = \frac{120}{-30} = -4$$

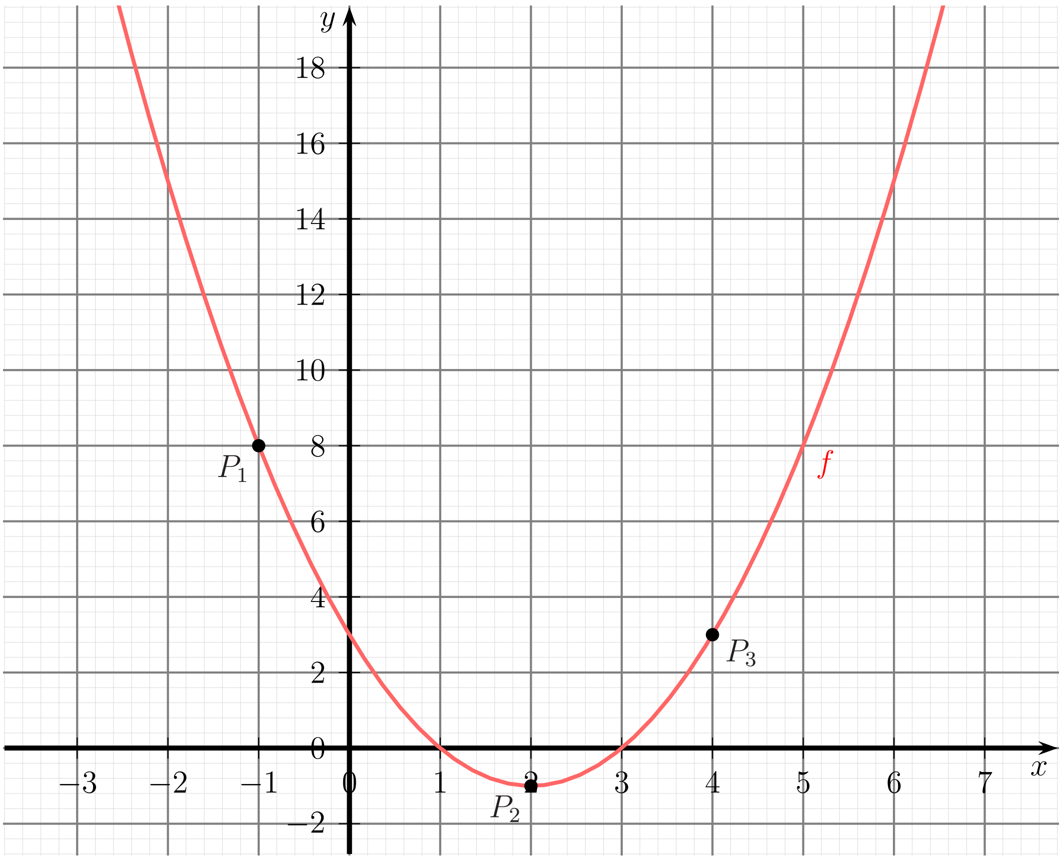
Den Parameter c bestimmt man nun am einfachsten durch Einsetzen der bereits bekannten Parameter in eine der drei Gleichungen. Ich nehme dazu die erste.

$$\begin{array}{rcll} a - b + c & = & 8 & \\ 1 - (-4) + c & = & 8 & \\ 5 + c & = & 8 & |-5 \\ c & = & 3 & \end{array}$$

Setzen wir die Werte in die Ausgangsform ein, erhalten wir die gesuchte Funktionsgleichung.

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

Nachfolgend ist der Verlauf des Funktionsgraphen dargestellt.



5.11 Aufgabe 11:

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Linearen Funktion $f_2(x)$, deren Graph die Parabel der Quadratischen Funktion $f_1(x) = x^2 - 4x + 4$ bei $x_b = 4$ als Tangente berührt.

Solution: Zunächst einmal können wir von der Normalform der Linearen Funktion ausgehen. Die gesuchte Funktion hat also diese Form:

$$f_2(x) = mx + b$$

Die Lösungsidee ist folgende: Eine Gerade **berührt** die Parabel genau dann, wenn es nur **einen einzigen** gemeinsamen Punkt gibt, nämlich den Berührpunkt und nicht **zwei Schnittpunkte**.

Wir können den Ansatz wie zur Schnittpunktberechnung machen. Der x-Wert des Schnittpunktes heißt dann x_B.

$$\begin{aligned}
f_1(x_B) &= f_2(x_B) \\
x_B^2 - 4x_B + 4 &= m \cdot x_B + b & &| - m \cdot x_B - b \\
x_B^2 - 4x_B - m \cdot x_B + 4 - b &= 0 \\
x_B^2 - (4+m) \cdot x_B + 4 - b &= 0 & &|\ p\text{-}q\text{-Formel} \\
x_{B1/2} &= \frac{4+m}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4+m}{2}\right)^2 - 4 + b}
\end{aligned}$$

Wie bereits erwähnt, gibt es nur **nur einen** gemeinsamen Punkt, wenn die Gerade die Parabel nicht **schneidet**, sondern nur **berührt**. Das ist nur erfüllt, wenn die Wurzel Null ergibt. Übrig bleibt dann:

$$x_B = \frac{4+m}{2}$$

Da wir schon $x_B = 4$ kennen, können wir daraus m berechnen.

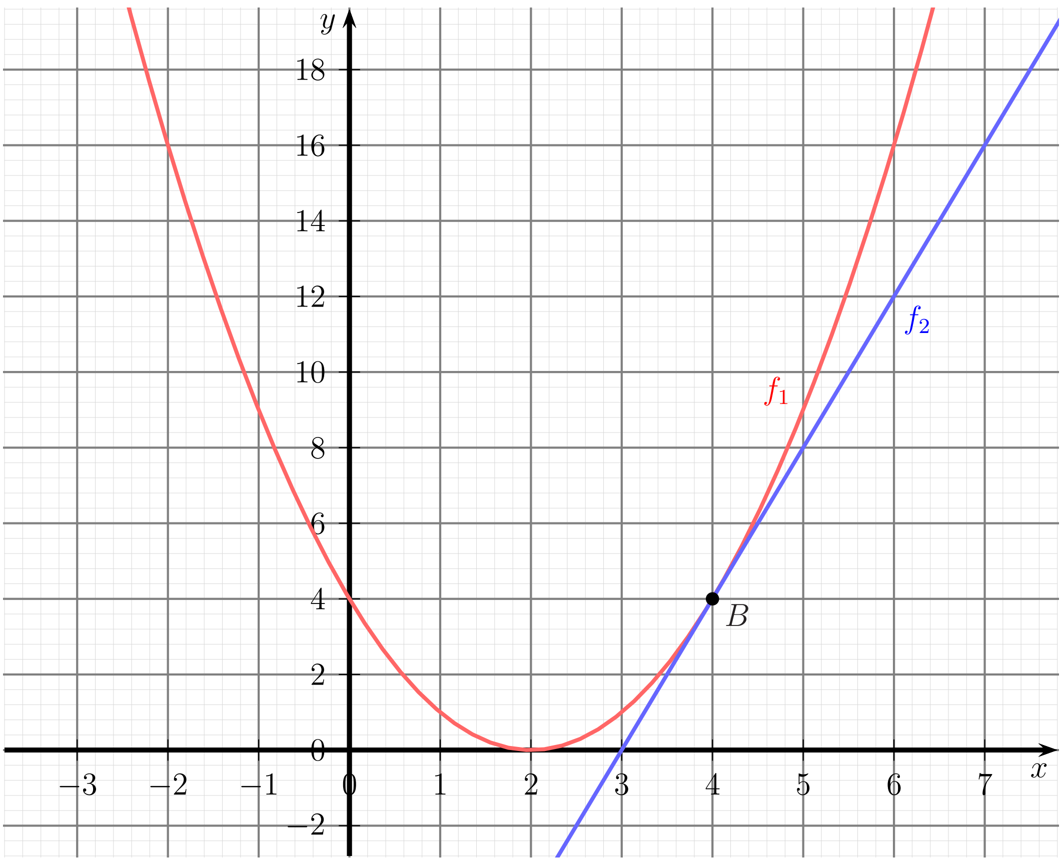
$$\begin{aligned}
x_B &= \frac{4+m}{2} \\
4 &= \frac{4+m}{2} & &| \cdot 2 \\
8 &= 4 + m & &| - 4 \\
4 &= m
\end{aligned}$$

Wir wissen, dass der Radikand Null sein muss. Daraus ergibt sich eine Gleichung, mit deren Hilfe wir b berechnen können.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{4+m}{2}\right)^2 - 4 + b &= 0 \\
\left(\frac{4+4}{2}\right)^2 - 4 + b &= 0 \\
16 - 4 + b &= 0 \\
12 + b &= 0 \qquad | -12 \\
b &= -12
\end{aligned}$$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet damit: $\boxed{f_2(x) = 4x - 12}$

Nachfolgend ist der Verlauf der Funktionsgraphen dargestellt.



5.12 Aufgabe 12:

Der Graph der Quadratischen Funktion $f(x)$ hat den Scheitelpunkt $S(3|2)$ und verläuft durch den Punkt $P(5|10)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von $f(x)$!

Solution: Da der Scheitelpunkt bekannt ist, bietet sich die Scheitelpunktform an. Es muss dann nur noch a berechnet werden.

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot (x - x_S)^2 + y_S \\ f(x) &= a \cdot (x-3)^2 + 2 \end{aligned}$$

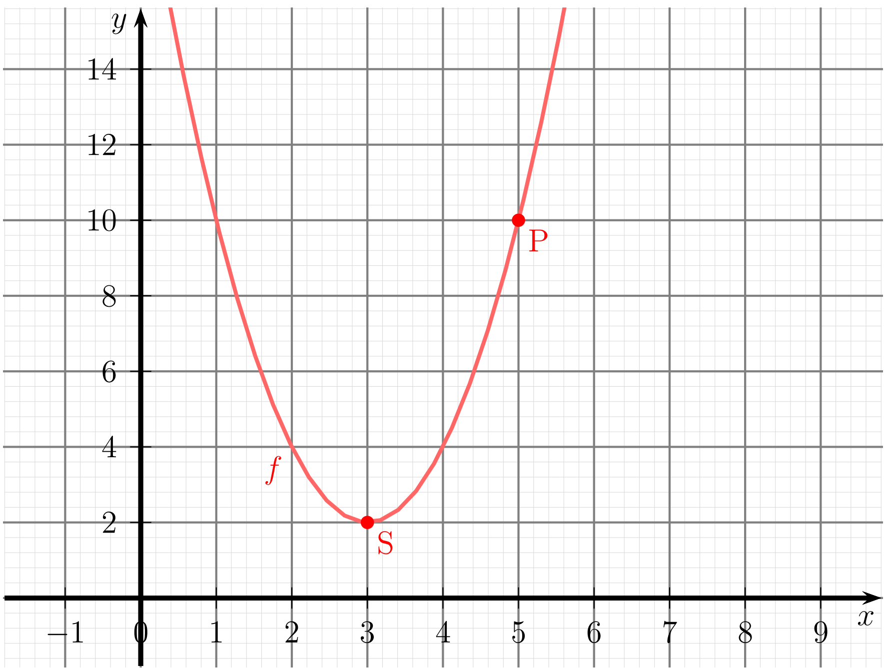
Neben S ist auch noch der Punkt P auf dem Graphen bekannt. Seine Koordinaten müssen auch die Funktionsgleichung erfüllen.

$$\begin{aligned} f(x_p) &= y_p \\ a \cdot (x_p - 3)^2 + 2 &= y_p \\ a \cdot (5-3)^2 + 2 &= 10 \\ a \cdot 2^2 + 2 &= 10 \quad | -2 \\ a \cdot 4 &= 8 \quad\ \ | : 4 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Diesen Wert für a setze ich ein und erhalte die gesuchte Funktionsgleichung.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \cdot (x-3)^2 + 2 \\ &= 2 \cdot (x^2 - 6x + 9) + 2 \\ &= 2x^2 - 12x + 18 + 2 \\ f(x) &= 2x^2 - 12x + 20 \end{aligned}$$

Nachfolgend ist der Verlauf des Funktionsgraphen dargestellt.



5.13 Aufgabe 13:

Bestimmen Sie die Nullstellen und den Scheitelpunkt der Quadratischen Funktion (soweit vorhanden):

$$f(x) = -16x^2 + 24x - 25$$

Solution: An einer Nullstelle ist der Funktionswert = 0. Daher lautet der Ansatz zur Nullstellenbestimmung: $f(x_0) = 0$.

$$\begin{aligned}
-16x_0^2 + 24x_0 - 25 &= 0 && | : (-16) \\
x_0^2 - \frac{3}{2}x_0 + \frac{25}{16} &= 0 \\
x_{01/02} &= \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{25}{16}} \\
x_{01/02} &= \frac{3}{4} \pm \sqrt{-1}
\end{aligned}$$

Da es für die Wurzel keine reelle Lösung gibt, gibt es **keine** Nullstellen. Andererseits kann man an dieser Gleichung schon den x-Wert des Scheitelpunktes ablesen. Es ist immer die Zahl, die vor der Wurzel steht, also $x_S = \frac{3}{4}$. Den zugehörigen y-Wert y_S bekommt man durch Einsetzen von x_S in die Funktionsgleichung.

$$\begin{aligned}
y_S &= f(x_S) \\
&= -16x_S^2 + 24x_S - 25 \\
&= -16 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 24 \cdot \frac{3}{4} - 25 \\
&= -9 + 18 - 25 \\
y_S &= 16
\end{aligned}$$

Ergebnis: $\boxed{\text{Scheitelpunkt } S\left(\frac{3}{4}|16\right)}$

5.14 Aufgabe 14:

Die Quadratische Funktion $f(x)$ hat den Scheitelpunkt $S(4|3)$ und verläuft durch den Punkt $P(6|11)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von $f(x)$!

Solution: Zur Lösung bietet sich die **Scheitelpunktform** der Quadratischen Funktion an.

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot (x - x_S)^2 + y_S \\ f(x) &= a \cdot (x - 4)^2 + 3 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Parameters a werden die Koordinaten des Punktes P in die Funktion eingesetzt.

$$\begin{aligned} f(x_P) &= y_P \\ f(6) &= 11 \\ a \cdot (6-4)^2 + 3 &= 11 \\ a \cdot 4 + 3 &= 11 \quad | -3 \\ 4a &= 8 \quad | : 4 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Wer mag, kann die Funktion noch aus der Scheitelpunktform in die Normalform umwandeln.

$f(x) = 2 \cdot (x-4)^2 + 3 = 2 \cdot (x^2 - 8x + 16) + 3 = 2x^2 - 16x + 32 + 3 = 2x^2 - 16x + 35$

Die gesuchte Funktion lautet damit: $\boxed{f(x) = 2 \cdot (x-4)^2 + 3 = 2x^2 - 16x + 35}$

5.15 Aufgabe 15:

Die Quadratische Funktion $f(x)$ verläuft durch die drei Punkte $P_1(-3|32)$, $P_2(-1|10)$ und $P_3(2|7)$. Geben Sie die Funktionsgleichung an!

Solution:

$$\begin{array}{lrcll} (1) & f(-3) & = & 32 & \Rightarrow & a\cdot(-3)^2+b\cdot(-3)+c & = & 32\\ (2) & f(-1) & = & 10 & \Rightarrow & a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c & = & 10\\ (3) & f(2) & = & 7 & \Rightarrow & a\cdot 2^2+b\cdot 2+c & = & 7 \end{array}$$

Wenn wir das rechts stehende Lineargleichungssystem zusammenfassen, erhalten wir:

$$\begin{array}{lrrrcl} (1) & 9a & -3b & +c & = & 32\\ (2) & a & -b & +c & = & 10\\ (3) & 4a & +2b & +c & = & 7 \end{array}$$

Dieses Lineargleichungssystem kann nun mit einem beliebigen Verfahren gelöst werden, also beispielsweise mit dem Einsetzungsverfahren, dem Additions-/Subtraktionsverfahren, der Cramerschen Regel oder dem Gauß-Jordan-Verfahren. Ich verwende hier als Beispiel die Cramersche Regel. Ich bestimme zunächst a:

$$a=\frac{\begin{vmatrix} 32 & -3 & 1\\ 10 & -1 & 1\\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-32-21+20+7-64+30}{-9-12+2+4-18+3}=\frac{-60}{-30}=2$$

Mit der mittlerweile bereits bekannten Nennerdeterminante ist auch b schnell bestimmt:

$$b=\frac{\begin{vmatrix} 9 & 32 & 1\\ 1 & 10 & 1\\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}}{-30}=\frac{90+128+7-40-63-32}{-30}=\frac{90}{-30}=-3$$

Den Parameter c bestimmt man nun am einfachsten durch Einsetzen der bereits bekannten Parameter in eine der drei Gleichungen. Ich nehme dazu Gleichung (2).

$$\begin{array}{rcll} a-b+c & = & 10 & \\ 2+3+c & = & 10 & |-5\\ c & = & 5 & \end{array}$$

Die gesuchte Funktion lautet damit: $\boxed{f(x)=2x^2-3x+5}$

5.16 Aufgabe 16:

Eine verschobene Normalparabel (Formfaktor $a = 1$) verläuft durch die Punkte $P_1(-1|-2)$ und $P_2(0|1)$. Geben Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ an!

Solution: Mit dem bekannten Formfaktor lautet die Funktionsgleichung in Normalform:

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

Die bekannten Punkte können eingesetzt werden.

$$\begin{array}{lrcll} (1) & f(-1) & = & -2 & \Rightarrow & (-1)^2 + b \cdot (-1) + c & = & -2 \\ (2) & f(0) & = & 1 & \Rightarrow & 0^2 + b \cdot 0 + c & = & 1 \end{array}$$

Aus Gleichung (2) erhält man sofort:

$$c = 1$$

Das wird in (1) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcll} (-1)^2 + b \cdot (-1) + 1 & = & -2 & \\ 1 - b + 1 & = & -2 & |-2 \\ -b & = & -4 & |\cdot(-1) \\ b & = & 4 & \end{array}$$

Die gesuchte Funktion lautet damit: $\boxed{f(x) = x^2 + 4x + 1}$

5.17 Aufgabe 17:

Eine Parabel (Quadratische Funktion) verläuft durch die drei Punkte $P_1(0|8)$, $P_2(1|3)$ und $P_3(2|0)$. Geben Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ an!

Solution: Die Koordinaten werden in die Normalform eingesetzt: $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{array}{lrcccrcl}
(1) & f(0) & = & 8 & \Rightarrow & a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & = & 8 \\
(2) & f(1) & = & 3 & \Rightarrow & a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c & = & 3 \\
(3) & f(2) & = & 0 & \Rightarrow & a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c & = & 0
\end{array}$$

Wenn wir das rechts stehende Lineargleichungssystem zusammenfassen, erhalten wir:

$$\begin{array}{lrrrcl}
(1) & & & c & = & 8 \\
(2) & a & +b & +c & = & 3 \\
(3) & 4a & +2b & +c & = & 0
\end{array}$$

Dieses Lineargleichungssystem kann nun mit einem beliebigen Verfahren gelöst werden. Es sollte aber auffallen, dass aus (1) bereits der erste Parameter $c = 8$ bekannt ist. Dieser Wert wird vorab in (2) und (3) eingesetzt, die Gleichungen werden vereinfacht.

$$\begin{array}{lrcll}
(2) & a + b + 8 & = & 3 & | - 8 \\
(2) & a + b & = & -5 & \\
\hline
(3) & 4a + 2b + 8 & = & 0 & | - 8 \\
(3) & 4a + 2b & = & -8 &
\end{array}$$

Zusammengefasst bleibt ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung übrig:

$$\boxed{\begin{array}{lrrcr}
(2) & a & +b & = & -5 \\
(3) & 4a & +2b & = & -8
\end{array}}$$

Gleichung (2) lässt sich bequem für die Anwendung des Einsetzungsverfahrens nach a oder b umstellen. Ich stelle sie nach a um.

$$\begin{array}{rcll}
a + b & = & -5 & | - b \\
a & = & -5 - b &
\end{array}$$

Einsetzen in (3):

$$\begin{array}{rcll}
4a + 2b & = & -8 & \\
4 \cdot (-5 - b) + 2b & = & -8 & \\
-20 - 4b + 2b & = & -8 & | + 20 \\
-2b & = & 12 & | : (-2) \\
b & = & -6 &
\end{array}$$

Mit der umgestellten Gleichung (2) erhalten wir sofort a.

$$a = -5 - b = -5 - (-6) = -5 + 6 = 1$$

Mit diesen Ergebnissen lautet die gesuchte Funktion: $\boxed{f(x) = x^2 - 6x + 8}$

5.18 Aufgabe 18:

Eine Parabel (Quadratische Funktion) hat den Scheitelpunkt $S(-2|0)$ und verläuft durch den Punkt $P(-1|-2)$. Geben Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ an!

Solution: Da der Scheitelpunkt bekannt ist, bietet sich die Scheitelpunktform an. Es muss dann nur noch a berechnet werden.

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot (x - x_S)^2 + y_S \\ f(x) &= a \cdot (x + 2)^2 + 0 \end{aligned}$$

Neben S ist auch noch der Punkt P auf dem Graphen bekannt. Seine Koordinaten müssen auch die Funktionsgleichung erfüllen.

$$\begin{aligned} f(x_p) &= y_p \\ a \cdot (x_p + 2)^2 &= y_p \\ a \cdot (-1 + 2)^2 &= -2 \\ a \cdot 1^2 &= -2 \\ a &= -2 \end{aligned}$$

Diesen Wert für a setze ich ein und erhalte die gesuchte Funktionsgleichung.

$$f(x) = -2 \cdot (x + 2)^2$$

Wer mag, kann die Funktionsgleichung noch in die Normalform umwandeln.

$$f(x) = -2x^2 - 8x - 8$$

Die gesuchte Funktion lautet: $\boxed{f(x) = -2 \cdot (x + 2)^2}$ oder $\boxed{f(x) = -2x^2 - 8x - 8}$

5.19 Aufgabe 19:

Verschieben Sie die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 1$ so nach **oben**, dass die neue Parabel durch den Punkt $P(2|3)$ verläuft. Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung $f_2(x)$ an!

Solution: Für eine vertikale Verschiebung muss lediglich ein Parameter (ich nenne ihn k) addiert werden.

$$f_2(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 1 + k$$

Damit der Punkt P auf der Parabel liegt, müssen seine Koordinaten die Funktionsgleichung erfüllen.

$$\begin{aligned}
f_2(x_P) &= y_P \\
f_2(2) &= 3 \\
\frac{1}{2} \cdot (2-4)^2 - 1 + k &= 3 \\
\frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - 1 + k &= 3 \\
\frac{1}{2} \cdot 4 - 1 + k &= 3 \\
2 - 1 + k &= 3 \qquad |-1 \\
k &= 2
\end{aligned}$$

Der Wert wird kür k eingesetzt.

$$f_2(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 1 + 2 = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 1$$

Wer mag, kann die Funktionsgleichung noch in die Normalform umwandeln:

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= = \tfrac{1}{2}(x-4)^2 + 1 \\
&= \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 8x + 16) + 1 \\
&= \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 + 1 \\
f_2(x) &= \frac{1}{2}x^2 - 4x + 9
\end{aligned}$$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet:

$\boxed{f_2(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 1}$ oder: $\boxed{f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 9}$

5.20 Aufgabe 20:

Verschieben Sie die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 7$ so nach **links**, dass die neue Parabel durch den Punkt $P(0|\frac{7}{2})$ verläuft. Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung $f_2(x)$ an! (Geben Sie **alle** Lösungen an!)

Solution: Eine **Rechts**verschiebung um k bedeutet, dass anstelle der Variablen x ein $(x - k)$ eingesetzt wird. Entsprechend bedeutet ein im Ergebnis **negatives** k dann eine **Links**verschiebung. Wünscht man ein **positives** k, dann kann auch $(x + k)$ für eine **Links**verschiebung eingesetzt werden. Ich verwende in meiner Musterlösung die erste Möglichkeit.

$$\begin{aligned} f_2(x) &= f_1(x-k) \\ f_2(x) &= \frac{1}{2} \cdot (x-k)^2 - 4(x-k) + 7 \end{aligned}$$

Jetzt werden für x und y die Koordinaten des Punktes P eingesetzt. Damit kann k bestimmt werden.

$$\begin{aligned} f_2(0) &= \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \cdot (0-k)^2 - 4 \cdot (0-k) + 7 &= \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \cdot k^2 + 4k + 7 &= \frac{7}{2} & & | \cdot 2 \\ k^2 + 8k + 14 &= 7 & & | - 7 \\ k^2 + 8k + 7 &= 0 \\ k_{1/2} &= -4 \pm \sqrt{4^2 - 7} \\ k_{1/2} &= -4 \pm 3 \\ k_1 = -1 & \qquad k_2 = -7 \end{aligned}$$

Da beide Werte **negativ** sind, handelt es sich in beiden Fällen um eine **Links**verschiebung. Beide Lösungen sind also gültig. Die Werte werden für k eingesetzt.

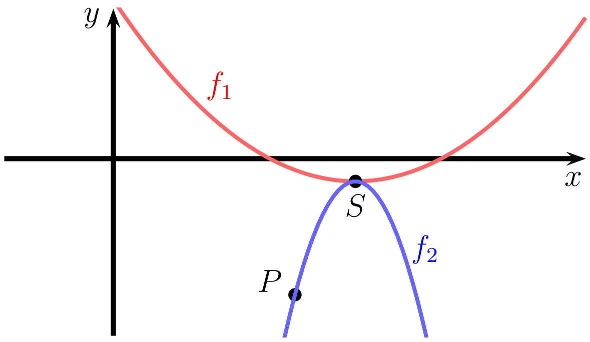
$$\begin{aligned} f_{21} &= \frac{1}{2} \cdot (x+1)^2 - 4 \cdot (x+1) + 7 & f_{22} &= \frac{1}{2} \cdot (x+7)^2 - 4 \cdot (x+7) + 7 \\ f_{21} &= \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 2x + 1) - 4x - 4 + 7 & f_{22} &= \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 14x + 49) - 4x - 28 + 7 \\ f_{21} &= \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} - 4x + 3 & f_{22} &= \frac{1}{2}x^2 + 7x + \frac{49}{2} - 4x - 21 \\ f_{21} &= \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{7}{2} & f_{22} &= \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Ergebnis: $\boxed{f_{21} = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{7}{2}}$ oder: $\boxed{f_{22} = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{7}{2}}$

5.21 Aufgabe 21:

Wie ist die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 7$ zu verändern, damit bei **gleichem Scheitelpunkt** der Punkt $P(3|-6)$ zur neuen Parabel gehört. Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung $f_2(x)$ an!

Solution: Damit man sich die Zusammenhänge besser vorstellen kann, ist hier eine Skizze der beiden Funktionsgraphen dargestellt.



Zunächst muss der (gemeinsame) Scheitelpunkt bestimmt werden. Dies kann entweder mit der Mitte zwischen den Nullstellen von f_1 oder einfacher mit der Scheitelpunkt-Formel geschehen:[11]

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \Rightarrow \qquad x_S = -\frac{b}{2a}}$$

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 4$$

$$y_S = f(x_S) = \frac{1}{2} \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 + 7 = -1$$

Mit bekanntem Scheitelpunkt kann die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform aufgestellt werden.

$$f_2(x) = a \cdot (x-4)^2 - 1$$

Zur Bestimmung des Parameters a werden die Koordinaten des Punktes P in die Funktionsgleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned} f_2(3) &= -6 \\ a \cdot (3-4)^2 - 1 &= -6 \\ a \cdot (-1)^2 - 1 &= -6 \\ a - 1 &= -6 \quad |+1 \\ a &= -5 \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung kann angegeben werden:

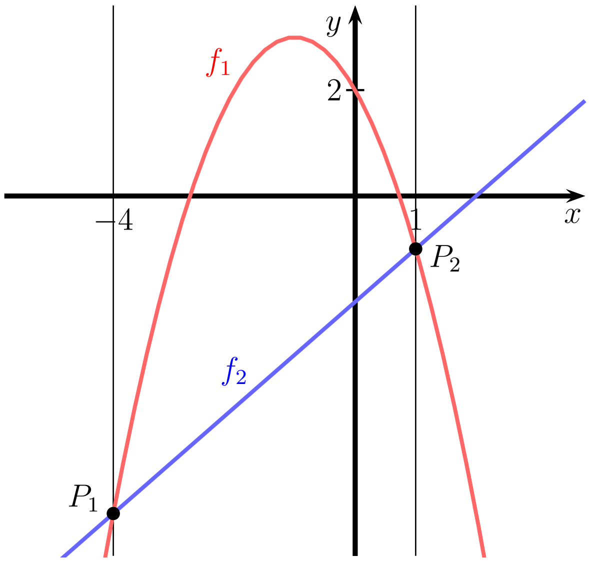
$$\boxed{f_2(x) = -5 \cdot (x-4)^2 - 1}$$

[11] Siehe Kapitel 2.2

5.22 Aufgabe 22:

Die Parabel der Quadratischen Funktion $f_1(x)$ schneidet die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = x - 2$ bei $x_1 = -4$ und $x_2 = 1$. Die Parabel schneidet die y-Achse bei $y_0 = 2$. Geben Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ an!

Solution: Damit man sich die Zusammenhänge besser vorstellen kann, ist hier eine Skizze der Funktionsgraphen dargestellt.



Zunächst werden die y-Werte der Schnittpunkte P_1 und P_2 bestimmt. Dazu werden die x-Werte in f_2 eingesetzt.

$$\begin{array}{rclcrcl} y_1 & = & f_2(x_1) & \quad & y_2 & = & f_2(x_2) \\ y_1 & = & -4 - 2 & & y_2 & = & 1 - 2 \\ y_1 & = & -6 & & y_2 & = & -1 \end{array}$$

Damit lauten die Schnittpunkte $P_1(-4|-6)$ und $P_2(1|-1)$. Der Schnittpunkt mit der y-Achse liegt bei $x = 0$, damit heist dieser Punkt $P_3(0|2)$. Mit drei bekannten Punkten kann ein Lineargleichungssystem aufgestellt werden, wenn man von der Normalform der Quadratischen Funktion ausgeht:

$$f_2(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{array}{lrclcrcl} (1) & f(-4) & = & -6 & \Rightarrow & a \cdot (-4)^2 + b \cdot (-4) + c & = & -6 \\ (2) & f(1) & = & -1 & \Rightarrow & a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c & = & -1 \\ (3) & f(0) & = & 2 & \Rightarrow & a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & = & 2 \end{array}$$

Wenn wir das rechts stehende Lineargleichungssystem zusammenfassen, erhalten wir:

$$\boxed{\begin{array}{lrrrcr} (1) & 16a & -4b & +c & = & -6 \\ (2) & a & +b & +c & = & -1 \\ (3) & & & c & = & 2 \end{array}}$$

Da aus (3) sofort das Ergebnis für c bekannt ist, kann der Wert in beide anderen Gleichungen eingesetzt werden. Übrig bleibt ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung.

$$\begin{array}{lrcll}
(1) & 16a - 4b + 2 & = & -6 & \mid -2 \\
(2) & a + b + 2 & = & -1 & \mid -2 \\
\hline
(1) & 16a - 4b & = & -8 & \\
(2) & a + b & = & -3 &
\end{array}$$

Dieses Gleichungssystem kann mit einem beliebigen Verfahren gelöst werden. Beispielsweise kann zum Einsetzungsverfahren (2) nach a aufgelöst und in (1) eingesetzt werden.

$$\begin{array}{rcll}
a + b & = & -3 & \mid -b \\
a & = & -3 - b &
\end{array}$$

Einsetzen in (1):

$$\begin{array}{rcll}
16a - 4b & = & -8 & \\
16 \cdot (-3 - b) - 4b & = & -8 & \\
-48 - 16b - 4b & = & -8 & \mid +48 \\
-20b & = & 40 & \mid : (-20) \\
b & = & -2 &
\end{array}$$

Dieses Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (1) eingesetzt.

$$a = -3 - b = -3 - (-2) = -1$$

Jetzt sind alle Parameter bekannt. Die Funktionsgleichung kann angegeben werden.

$$\boxed{f_2(x) = -x^2 - 2x + 2}$$

5.23 Aufgabe 23:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte – falls vorhanden – der beiden Parabeln mit den Funktionsgleichungen $f_1(x) = x^2 - 2x + 3$ und $f_2(x) = 2x^2 - 8x + 12$.

Solution: Zur Schnittpunktbestimmung werden die Funktionsterme gleichgesetzt.

$$\begin{aligned}
f_1(x_S) &= f_2(x_S) \\
x_S^2 - 2x_S + 3 &= 2x_S^2 - 8x_S + 12 \quad && | - 2x_S^2 + 8x_S - 12 \\
-x_S^2 + 6x_S - 9 &= 0 && | \cdot (-1) \\
x_S^2 - 6x_S + 9 &= 0 \\
x_{S1/2} &= 3 \pm \sqrt{9 - 9} \\
x_S &= 3
\end{aligned}$$

Es gibt nur ein Ergebnis, also auch nur einen einzigen Schnittpunkt. Zur Bestimmung des y-Wertes wird dieser x_S-Wert in f_1 oder in f_2 eingesetzt. Ich wähle dazu f_1, weil die Zahlen etwas kleiner sind.

$$\begin{aligned}
y_S &= f_1(x_S) \\
&= x_S^2 - 2x_S + 3 \\
&= 3^2 - 2 \cdot 3 + 3 \\
y_S &= 6
\end{aligned}$$

Hiermit kann der Schnittpunkt angegeben werden: $\boxed{S(3|6)}$

5.24 Aufgabe 24:

Eine Parabel mit dem Formfaktor $a = 2$ verläuft durch die Punkte $P_1(1|-1)$ und $P_2(2|1)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$!

Solution: Die Normalform der Quadratischen Funktion lautet:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Da a mit $a = 2$ bekannt ist, erhalten wir diese Form:

$$f(x) = 2x^2 + bx + c$$

Jetzt müssen nur noch die Parameter b und c berechnet werden. Dazu werden die Koordinaten der bekannten Punkte für x und y eingesetzt.

$$\begin{array}{lllllll}
P_1(1|-1) & \Rightarrow & f(1) = -1 & \Rightarrow & 2\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c & = & -1 \\
P_2(2|1) & \Rightarrow & f(2) = 1 & \Rightarrow & 2\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c & = & 1
\end{array}$$

Die beiden dabei entstandenen Gleichungen werden zunächst vereinfacht und in die Normalform gebracht.

$$\begin{array}{lrcll}
(1) & 2 + b + c & = & -1 & |-2 \\
(2) & 8 + 2b + c & = & 1 & |-8 \\
\hline
(1) & b + c & = & -3 & \\
(2) & 2b + c & = & -7 &
\end{array}$$

Jetzt haben wir ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung erhalten, das man mit einem beliebigen Verfahren lösen kann. Weil in beiden Gleichungen c ohne Vorzahl vorkommt, bietet es sich an, die Gleichungen voneinander zu subtrahieren. Dabei fällt dann c weg. Weil die Vorzahl von b in Gleichung (2) – hier: $2b$ – größer, als die in Gleichung (1) – hier: $1b$ – ist, subtrahiere ich Gleichung (1) von Gleichung (2). Dann bleibt mir ein **positives** Ergebnis. (Natürlich geht es auch anders herum, dann erhält man halt $-b$.)

$$\begin{array}{rrrcrl}
(1) & b & +c & = & -3 & |- \\
(2) & 2b & +c & = & -7 & | \\
\hline
(2)-(1) & b & & = & -4 &
\end{array}$$

Damit haben wir bereits b. Um den noch verbleibenden Parameter c zu berechnen, wird das Ergebnis in eine beliebige der beiden Gleichungen eingesetzt. Weil in Gleichung (1) die Zahlen kleiner sind, verwende ich diese.

$$\begin{array}{rcll}
b + c & = & -3 & \\
-4 + c & = & -3 & |+4 \\
c & = & 1 &
\end{array}$$

Damit kann die Funktionsgleichung angegeben werden:

$$\boxed{f(x) = 2x^2 - 4x + 1}$$

5.25 Aufgabe 25:

Eine Parabel verläuft durch die Punkte $P_1(2|7)$ und $P_2(3|6)$ und schneidet die y-Achse bei $y_0 = 3$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$!

Solution: Die Normalform der Quadratischen Funktion lautet:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Der y-Achsenabschnitt bei $y_0 = 3$ bedeutet $c = y_0 = 3$. Damit erhalten wir diese Form:

$$f(x) = ax^2 + bx + 3$$

Jetzt müssen nur noch die Parameter a und b berechnet werden. Dazu werden die Koordinaten der bekannten Punkte für x und y eingesetzt.

$$\begin{array}{lclcrcl} P_1(2|7) & \Rightarrow & f(2) = 7 & \Rightarrow & a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 3 & = & 7 \\ P_2(3|6) & \Rightarrow & f(3) = 6 & \Rightarrow & a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 3 & = & 6 \end{array}$$

Die beiden dabei entstandenen Gleichungen werden zunächst vereinfacht und in die Normalform gebracht.

$$\begin{array}{lrcll} (1) & 4a + 2b + 3 & = & 7 & | - 3 \\ (2) & 9a + 3b + 3 & = & 6 & | - 3 \\ \hline (1) & 4a + 2b & = & 4 & \\ (2) & 9a + 3b & = & 3 & \end{array}$$

Jetzt haben wir ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung erhalten, das man mit einem beliebigen Verfahren lösen kann. Weil keine Vorzahlen in den Gleichungen übereinstimmen, bietet sich kein Lösungsverfahren besonders an. Ich verwende willkürlich das **Einsetzungsverfahren**. Dazu löse ich Gleichung (1) nach b auf.

$$\begin{array}{lrcll} (1) & 4a + 2b & = & 4 & | - 4a \\ & 2b & = & 4 - 4a & | : 2 \\ & b & = & 2 - 2a & \end{array}$$

Der Ergebnisterm wird in Gleichung (2) eingesetzt.

$$\begin{array}{lrcll} (2) & 9a + 3b & = & 3 & \\ & 9a + 3 \cdot (2 - 2a) & = & 3 & \\ & 9a + 6 - 6a & = & 3 & | - 6 \\ & 3a & = & -3 & | : 3 \\ & a & = & -1 & \end{array}$$

Um den noch fehlenden Parameter b zu ermitteln, wird der gefundene Wert in die schon passend umgestellte Gleichung (1) eingesetzt.

$$b = 2 - 2a = 2 - 2 \cdot (-1) = 2 + 2 = 4$$

Damit erhalten wir die gesuchte Funktionsgleichung:

$$\boxed{f(x) = -x^2 + 4x + 3}$$

5.26 Aufgabe 26:

Verschieben Sie die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = 3x^2 - 4$ so, dass sie durch die Punkte $P_1(3|2)$ und $P_2(6|-7)$ verläuft. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_2(x)$ der so entstandenen Funktion.

Solution: Das Einzige, was sich beim Verschieben nicht ändert, ist die Form der Parabel und somit der Formfaktor a. In f_1 kann man a ablesen mit $a = 3$. Die gesuchte Funktionsgleichung hat damit diese Form:

$$f_2(x) = 3x^2 + bx + c$$

$$\begin{array}{llllllll} P_1(3|2) & \Rightarrow & f(3) = 2 & \Rightarrow & 3 \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c & = & 2 \\ P_2(6|-7) & \Rightarrow & f(6) = -7 & \Rightarrow & 3 \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c & = & -7 \end{array}$$

Die beiden dabei entstandenen Gleichungen werden zunächst vereinfacht und in die Normalform gebracht.

$$\begin{array}{lrcll} (1) & 27 + 3b + c & = & 2 & |-27 \\ (2) & 108 + 6b + c & = & -7 & |-108 \\ \hline (1) & 3b + c & = & -25 & \\ (2) & 6b + c & = & -115 & \end{array}$$

Jetzt haben wir ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung erhalten, das man mit einem beliebigen Verfahren lösen kann. Weil in beiden Gleichungen c ohne Vorzahl vorkommt, bietet es sich an, die Gleichungen voneinander zu subtrahieren. Dabei fällt dann c weg. Weil die Vorzahl von b in Gleichung (2) – hier: $6b$ – größer, als die in Gleichung (1) – hier: $3b$ – ist, subtrahiere ich Gleichung (1) von Gleichung (2). Dann bleibt mir ein **positives** Ergebnis. (Natürlich geht es auch anders herum, dann erhält man halt einen negativen Wert mit b.)

$$\begin{array}{rllcll} (1) & 3b & +c & = & -25 & |- \\ (2) & 6b & +c & = & -115 & | \\ \hline (2)-(1) & 3b & & = & -90 & |:3 \\ & b & & = & -30 & \end{array}$$

Damit haben wir bereits b. Um den noch verbleibenden Parameter c zu berechnen, wird das Ergebnis in eine beliebige der beiden Gleichungen eingesetzt. Weil in Gleichung (1) die Zahlen kleiner sind, verwende ich diese.

$$\begin{array}{rcll} 3b + c & = & -20 & \\ 3 \cdot (-30) + c & = & -25 & \\ -90 + c & = & -25 & |+90 \\ c & = & 65 & \end{array}$$

Damit kann die Funktionsgleichung angegeben werden:

$$\boxed{f(x) = 3x^2 - 30x + 65}$$

5.27 Aufgabe 27:

Eine Quadratische Funktion hat den Formfaktor $a = -1$ und den Scheitelpunkt $S(2|3)$. Geben Sie die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform und in Normalform an!

Solution: Die Lösung in Scheitelpunktform kann sofort aufgeschrieben werden:

$$\boxed{f(x) = -(x-2)^2 + 3}$$

Die Umformung in die Normalform erfolgt schrittweise mit der 2. Binomischen Formel.

$$\begin{aligned}
f(x) &= -(x-2)^2 + 3 \\
&= -(x^2 - 4x + 4) + 3 \\
&= -x^2 + 4x - 4 + 3 \\
f(x) &= -x^2 - 4x - 1
\end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung in Normalform lautet:

$$\boxed{f(x) = -x^2 - 4x - 1}$$

5.28 Aufgabe 28:

Der Funktionsgraph einer Quadratische Funktion mit dem Scheitelpunkt $S(3|-1)$ verläuft durch den Punkt $P(1|7)$. Geben Sie die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform und in Normalform an!

Solution: Zunächst wird der Ansatz in Scheitelpunktform gemacht.

$$f(x) = a \cdot (x-3)^2 - 1$$

Um den noch unbekannten Formfaktor a zu bestimmen, werden die Koordinaten des bekannten Punktes $P(1|7)$ eingesetzt.

$$\begin{aligned}
f(x_p) &= y_p \\
a \cdot (x_p - 3)^2 - 1 &= y_p \\
a \cdot (1-3)^2 - 1 &= 7 \\
a \cdot (-2)^2 - 1 &= 7 \\
4a - 1 &= 7 \quad | +1 \\
4a &= 8 \quad | : 4 \\
a &= 2
\end{aligned}$$

Hiermit kann die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform angegeben werden.

$$\boxed{f(x) = 2 \cdot (x-3)^2 - 1}$$

Nun kann die Funktionsgleichung mit Hilfe der 2. Binomischen Formel in die Normalform umgeformt werden.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2 \cdot (x-3)^2 - 1 \\
&= 2 \cdot (x^2 - 6x + 9) - 1 \\
&= 2x^2 - 12x + 18 - 1 \\
f(x) &= 2x^2 - 12x + 17
\end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung in Normalform lautet:

$$\boxed{f(x) = 2x^2 - 12x + 17}$$

5.29 Aufgabe 29:

Gegeben ist eine Quadratische Funktion mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = -2x^2 - 4x + 6$$

Berechnen Sie den Scheitelpunkt und die Nullstellen.

Solution: Der x-Wert des Scheitelpunktes x_S kann über die Scheitelpunkformel bestimmt werden.

$$\begin{aligned} x_S &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{-4}{2 \cdot (-2)} \\ &= \frac{4}{-4} \\ x_S &= -1 \end{aligned}$$

Den zugehörigen y-Wert y_S liefert die Funktionsgleichung.

$$\begin{aligned} y_S &= f(x_S) \\ &= -2x_S^2 - 4x_S + 6 \\ &= -2 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 6 \\ &= -2 + 4 + 6 \\ y_S &= 8 \end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt lautet: $\boxed{S(-1|8)}$

Zum Berechnen der Nullstellen muss der Funktionsterm gleich Null gesetzt werden.

$$\begin{aligned} -2x_0^2 - 4x_0 + 6 &= 0 & &| : (-2) \\ x_0^2 + 2x_0 - 3 &= 0 & &| \; p\text{-}q\text{-Formel anwerden} \\ x_{01/02} &= -\tfrac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{2}{2}\right)^2 - (-3)} \\ &= -1 \pm \sqrt{1+3} \\ &= -1 \pm 2 \\ x_0 1 = -1 + 2 = 1 & \qquad x_0 2 = -1 - 2 = -3 \end{aligned}$$

Die Nullstellen lauten $\boxed{x_{01} = 1}$ und $\boxed{x_{02} = -3}$

5.30 Aufgabe 30:

Eine Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(4|7)$ schneidet die y-Achse bei $y_0 = 3$. Bestimmen Sie die zugehörige Funktionsgleichung!

Solution: Der Ansatz kann mit Hilfe der Scheitelpunktform gemacht werden.

$$f(x) = a \cdot (x-4)^2 + 7$$

Um den noch fehlenden Formfaktor a zu bestimmen, gibt es zwei Möglichkeiten.

Lösungvariante 1: Die y-Achse liegt an der Stelle $x = 0$. Damit sind Koordinaten des Schnittpunktes mit $(0|y_0)$ bzw. $(0|3)$ bekannt und können in die Gleichung in Scheitelpunktform eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} f(0) &= 3 \\ a \cdot (0-4)^2 + 7 &= 3 \\ a \cdot 16 + 7 &= 3 \quad | -7 \\ 16a &= -4 \quad | : 16 \\ a &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Da die Form der Funktionsgleichung nicht vorgegeben ist, reicht die Angabe in der Scheitelpunktform:

$$\boxed{f(x) = -\tfrac{1}{4} \cdot (x-4)^2 + 7}$$

Lösungsvariante 2: Man kann auch den Ansatz in der Scheitelpunktform machen, diese in die Normalform umwandeln und dort den y-Achsenabschnitt als absolutes Glied c ablesen. Das sieht dann so aus:

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot (x-4)^2 + 7 \\ &= a \cdot (x^2 - 8x + 16) + 7 \\ f(x) &= ax^2 - 8ax + \underbrace{16a + 7}_{c} \end{aligned}$$

Da der y-Achsenabschnitt mit $y_0 = 3$ bekannt ist, kann dieser mit c gleichgesetzt werden.

$$\begin{aligned} c &= y_0 \\ 16a + 7 &= 3 \quad | -7 \\ 16a &= -4 \quad | : 16 \\ a &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Auch so erhalten wir die Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform:

$$\boxed{f(x) = -\tfrac{1}{4} \cdot (x-4)^2 + 7}$$

5.31 Aufgabe 31:

Gegeben ist die Quadratische Funktion mit der Funktionsgleichung:

$$f_1(x) = 3x^2 + 24x + 53$$

Gesucht ist die Funktion f_2, deren Funktionsgraph den selben Scheitelpunkt hat wie f_1. Der Funktionsgraph von f_2 verläuft außerdem durch den Punkt $P(-2|-3)$.

Solution: Zunächst muss der Scheitelpunkt von f_1 bestimmt werden. Dazu beginnen wir mit x_S.

$$\begin{aligned} x_S &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{24}{2 \cdot 3} \\ x_S &= -4 \end{aligned}$$

Den zugehörigen y-Wert liefert die Funktionsgleichung von f_1.

$$\begin{aligned} y_S &= f_1(x_S) \\ &= 3x_S^2 + 24x_S + 53 \\ &= 3 \cdot (-4)^2 + 24 \cdot (-4) + 53 \\ &= 48 - 96 + 53 \\ y_S &= 5 \end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt der Funktion f_1 – und damit auch von f_2 – lautet: $\boxed{S(-4|5)}$

Hiermit kann die Funktionsgleichung von f_2 in der Scheitelpunktform aufgestellt werden.

$$f_2(x) = a \cdot (x+4)^2 + 5$$

Um nun den Formfaktor a zu bestimmen, werden die Koordinaten des gegebenen Punktes $P(-2|-3)$ in diese Gleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned} f_2(-2) &= -3 \\ a \cdot (-2+4)^2 + 5 &= -3 \quad |-5 \\ a \cdot 2^2 &= -8 \\ 4a &= -8 \quad |:4 \\ a &= -2 \end{aligned}$$

Hiermit kann die Funktionsgleichung von f_2 angegeben werden:

$$\boxed{f(x) = -2 \cdot (x+4)^2 + 5}$$

5.32 Aufgabe 32:

Eine Parabel verläuft durch die Punkte $P_1(0|14)$ und $P_2(2|-2)$. Der Scheitelpunkt liegt an der Stelle $x_S = 3$. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung?

Solution: Mit dem Scheitelpunkt $S(3|y_S)$ kann der Ansatz der Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform gemacht werden.

$$f(x) = a \cdot (x-3)^2 + y_S$$

In diese Funktionsgleichung können die Koordinaten beider Punkte eingesetzt werden.

$$\begin{array}{rlcrcl} P_1(0|3): & f(0)=3 & \Rightarrow & a\cdot(0-3)^2+y_S & = & 14 \\ P_2(2|-2): & f(2)=-2 & \Rightarrow & a\cdot(2-3)^2+y_S & = & -2 \end{array}$$

Wir haben ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung mt den Variablen a und y_S erhalten. Die Gleichungen werden noch ein wenig zusammengefasst.

$$\begin{array}{lrcl} (1) & a\cdot(0-3)^2+y_S & = & 14 \\ (2) & a\cdot(2-3)^2+y_S & = & -2 \\ \hline (1) & 9a+y_S & = & 14 \\ (2) & a+y_S & = & -2 \end{array}$$

Zur Lösung dieses Gleichungssystems bietet sich das Additions-/Subtraktionsverfahren[12] an. Man kann Gleichung (2) von Gleichung (1) subtrahieren, dann fällt y_S weg.

$$\begin{array}{lrrcll} (1) & 9a & +y_S & = & 14 & | \\ (2) & a & +y_S & = & -2 & |- \\ \hline & 8a & & = & 16 & |:8 \\ & a & & = & 2 & \end{array}$$

Mit Hilfe der Gleichung (2) kann damit y_S berechnet werden.

$$\begin{array}{rcll} a+y_S & = & -2 & \\ 2+y_S & = & -2 & |-2 \\ y_S & = & -4 & \end{array}$$

Jetzt sind alle Parameter bekannt, die Funktionsgleichung kann angegeben werden:

$$\boxed{f(x) = 2\cdot(x-3)^2-4}$$

Wer mag, kann das noch in die Normalform umwandeln:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 2\cdot(x-3)^2-4 \\ & = & 2\cdot(x^2-6x+9)-4 \\ & = & 2x^2-12x+18-4 \\ f(x) & = & 2x^2-12x+14 \end{array}$$

[12]Einzelheiten zum Additions-/Subtraktionsverfahren siehe hier:
http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/add.pdf

5.33 Aufgabe 33:

Welche dieser fünf Funktionen haben den selben Scheitelpunkt?

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 - 10x + 21 \\ f_2(x) &= 3x^2 - 30x + 71 \\ f_3(x) &= -2x^2 + 20x - 48 \\ f_4(x) &= 0{,}5x^2 + 5x + 8{,}5 \\ f_5(x) &= 4 \cdot (x-5)^2 - 4 \end{aligned}$$

Solution: Um die Frage beantworten zu können, müssen alle Scheitelpunkte bestimmt werden.

$$\begin{aligned} x_{S1} &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{-10}{2 \cdot 1} \\ x_{S1} &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{S1} &= f_1(x_{S1}) \\ &= x_{S1}^2 - 10x_{S1} + 21 \\ &= 5^2 - 10 \cdot 5 + 21 \\ y_{S1} &= -4 \end{aligned}$$

$$\boxed{S_1(5|-4)}$$

$$\begin{aligned} x_{S2} &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{-30}{2 \cdot 3} \\ x_{S2} &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{S2} &= f_2(x_{S2}) \\ &= 3x_{S2}^2 - 30x_{S2} + 71 \\ &= 3 \cdot 5^2 - 30 \cdot 5 + 71 \\ &= 75 - 150 + 71 \\ y_{S2} &= -4 \end{aligned}$$

$$\boxed{S_2(5|-4)}$$

$$\begin{aligned} x_{S3} &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{20}{2 \cdot (-2)} \\ x_{S3} &= 5 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y_{S3} &= f_3(x_{S3}) \\
&= -2 \cdot x_{S3}^2 + 20x_{S3} - 48 \\
&= -2 \cdot 5^2 + 20 \cdot 5 - 48 \\
&= -50 + 100 - 48 \\
y_{S3} &= 2
\end{aligned}
$$

$$\boxed{S_3(5|2)}$$

$$
\begin{aligned}
x_{S4} &= -\frac{b}{2a} \\
&= -\frac{5}{2 \cdot 0{,}5} \\
x_{S4} &= -5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_{S4} &= f_4(x_{S4}) \\
&= 0{,}5 \cdot x_{S4}^2 + 5x_{S4} + 8{,}5 \\
&= 0{,}5 \cdot (-5)^2 + 5 \cdot (-5) + 8{,}5 \\
&= 12{,}5 - 25 + 8{,}5 \\
y_{S4} &= -4
\end{aligned}
$$

$$\boxed{S_4(-5|-4)}$$

An f_5 können die Koordinaten von x_S und y_S direkt abgelesen werden, weil die Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform angegeben ist.

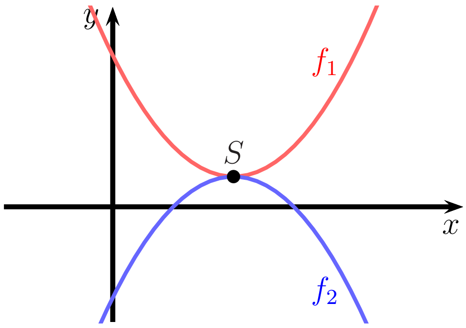
$$\boxed{S_5(5|-4)}$$

<u>Ergebnis:</u> Die Scheitelpunkte S_1, S_2 und S_5 sind identisch. Bei S_3 gibt es einen anderen y-Wert und bei S_4 einen anderen x-Wert.

5.34 Aufgabe 34:

Gegeben ist die Funktion f_1 mit der Funktionsgleichung

$$f_1(x) = 4x^2 - 24x + 37$$



Gesucht ist die Funktion f_2, die aus f_1 dadurch entstanden ist, dass man die Parabel von f_1 um 180° um deren Scheitelpunkt S gedreht hat, wie nebenstehend dargestellt.

Solution: Zunächst wird der Scheitelpunkt von f_1 mit Hilfe der Scheitelpunktformel bestimmt.

$$\begin{aligned} x_S &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{-24}{2 \cdot 4} \\ x_S &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_S &= f_1(x_S) \\ &= 4x_S^2 - 24x_S + 37 \\ &= 4 \cdot 3^2 - 24 \cdot 3 + 37 \\ &= 36 - 72 + 37 \\ y_S &= 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{S(3|1)}$$

Durch die Drehung der Parabel um 180° wird der Formfaktor $a_1 = 4$ von f_1 im Vorzeichen umgekehrt.

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_1 \\ a_2 &= -4 \end{aligned}$$

Mit diesen Daten kann die Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform aufgestellt werden.

$$\boxed{f_2(x) = -4 \cdot (x-3)^2 + 1}$$

Wer mag, kann das noch in die Normalform umwandeln, auch wenn das hier nicht verlangt ist:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -4 \cdot (x-3)^2 + 1 \\ &= -4 \cdot (x^2 - 6x + 9) + 1 \\ f_2(x) &= -4x^4 + 24x - 35 \end{aligned}$$

5.35 Aufgabe 35:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Parabel mit $f_1(x) = 10x^2 + 12x - 4$ und der Geraden mit $f_2(x) = 9x - 3$.

Solution:

$$
\begin{array}{rcll}
f_1(x_S) &=& f_2(x_S) & \\
10x_S^2 + 12x_S - 4 &=& 9x_S - 3 & \mid -9x_S + 3 \\
10x_S^2 + 3x_S - 1 &=& 0 & \mid :10 \\
x_S^2 + 0{,}3x_S - 0{,}1 &=& 0 & \\
x_{S1/2} &=& -0{,}15 \pm \sqrt{0{,}15^2 + 0{,}1} & \\
&=& -0{,}15 \pm 0{,}35 & \\
x_{S1} = -0{,}15 + 0{,}35 = 0{,}2 & & x_{S2} = -0{,}15 - 0{,}35 = -0{,}5 & \\
y_{S1} &=& f_2(x_{S1}) & \\
&=& 9 \cdot 0{,}2 - 3 & \\
y_{S1} &=& -1{,}2 & \\
y_{S2} &=& f_2(x_{S2}) & \\
&=& 9 \cdot (-0{,}5) - 3 & \\
y_{S2} &=& -7{,}5 &
\end{array}
$$

Ergebnis: $\boxed{S_1(0{,}2|-1{,}2)}$ $\boxed{S_2(-0{,}5|-7{,}5)}$

Skizze der Funktionsgraphen: