

Quadratische Funktion

Wolfgang Kippels

8. April 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Zusammenstellung der Grundlagen

Nebenstehend ist eine typische Quadratische Funktion dargestellt. Das Beispiel stellt diese Funktion dar:

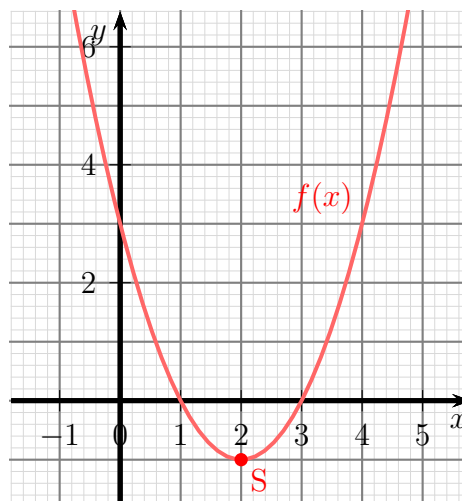
$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

Diese Kurvenform nennt man **Parabel**. Der tiefste Punkt¹ der Parabel heißt **Scheitelpunkt** der Parabel. Er wird meist mit dem Buchstaben **S** bezeichnet.

Eine Quadratische Funktion ist jede Funktion, die sich in der Normalform schreiben lässt:

Normalform:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$



Um zu untersuchen, welche Auswirkungen der Parameter a auf den Funktionsgraphen hat, sind nebenstehend 8 Funktionen mit unterschiedlichem Parameter a dargestellt. Bei allen ist $b = 0$ und $c = 0$. Die Funktionsgleichungen lauten:

$$f_1(x) = 0,2x^2$$

$$f_2(x) = 0,5x^2$$

$$f_3(x) = 1x^2$$

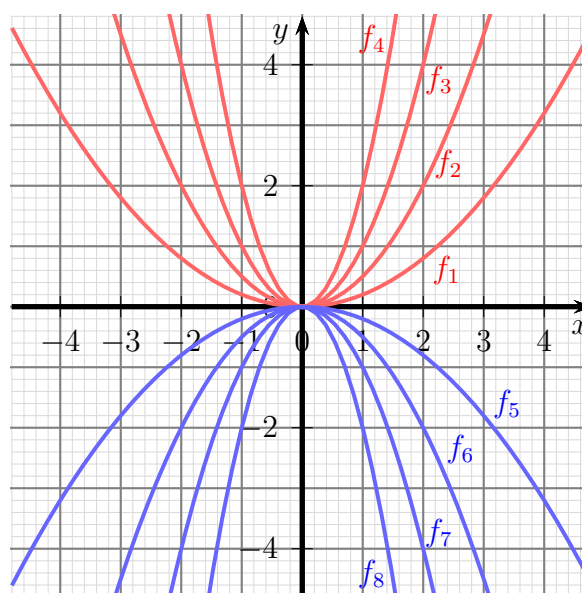
$$f_4(x) = 2x^2$$

$$f_5(x) = -0,2x^2$$

$$f_6(x) = -0,5x^2$$

$$f_7(x) = -1x^2$$

$$f_8(x) = -2x^2$$



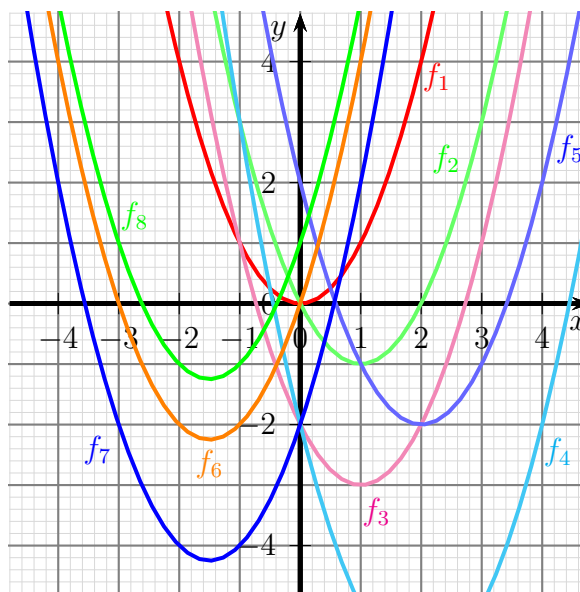
Man kann gut erkennen, dass alle Parabeln eine unterschiedliche Form haben.

Der Parameter a wird deshalb **Formfaktor** genannt, weil er die Form der Parabel bestimmt. Ist a groß, ist die Parabel schmal, ist a negativ, ist die Parabel nach unten geöffnet.

¹Wenn die Parabel nach unten geöffnet ist, ist der Scheitelpunkt der höchste Punkt.

Um zu zeigen, dass tatsächlich nur der Parameter a für die Form der Parabel zuständig ist, sind nebenstehend diverse Funktionen dargestellt. Für alle ist $a = 1$, jedoch haben b und c jeweils unterschiedliche Werte. Die Funktionsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 \\ f_2(x) &= x^2 - 2x \\ f_3(x) &= x^2 - 2x - 2 \\ f_4(x) &= x^2 - 4x - 2 \\ f_5(x) &= x^2 - 4x + 2 \\ f_6(x) &= x^2 + 3x \\ f_7(x) &= x^2 + 3x - 2 \\ f_8(x) &= x^2 + 3x + 1 \end{aligned}$$



Trotz allem „Gewusel“ kann man aber doch gut erkennen, dass alle Parabeln die gleiche Form haben. Nur die Lage ist jeweils unterschiedlich.

Kümmern wir uns als nächstes um den Parameter c . Hierfür können wir ganz gut die selben hier dargestellten Funktionsgraphen der Funktionen f_1 bis f_8 verwenden.

Betrachten wir dazu zunächst die Funktionen f_1 , f_2 und f_6 . Bei allen drei Funktionen ist $c = 0$. Als Gemeinsamkeit der drei Funktionsgraphen sollte auffallen, dass sie alle durch den Koordinatenursprung verlaufen. Hier ist $y = 0$.

Auch die Funktionen f_3 , f_4 und f_7 haben alle den selben Parameter c , nämlich $c = -2$. Alle zugehörigen Funktionsgraphen schneiden die y -Achse an der selben Stelle, bei $y = -2$.

Offensichtlich gibt der Parameter c den **Abschnitt auf der y -Achse** an.

Wir können das noch mit f_5 und f_8 überprüfen. Bei f_5 ist $c = 2$, die y -Achse wird bei $y = 2$ geschnitten. Bei der Funktion f_8 ist $c = 1$, die y -Achse wird bei $y = 1$ geschnitten. Es ist also richtig:

Der Parameter c gibt den **Abschnitt auf der y -Achse** an.

Anmerkung: Natürlich kann man das auch „richtig“ beweisen. Wenn man den Funktionswert von $f(x) = ax^2 + bx + c$ für $x = 0$ berechnet, dann ist $a \cdot 0^2 = 0$ und $b \cdot 0 = 0$. Es bleibt also nur c übrig.

Leider ist die Rolle des Parameters b nicht ganz so offensichtlich, wie die von a und c . Daher wird hierauf erst später eingegangen.

2.1 Nullstellen

Unter der **Nullstelle** einer Funktion versteht man die Stelle (den x -Wert, genannt x_0), an der der Funktionswert (der y -Wert) Null wird. Um mögliche Nullstellen zu bestimmen, wird der Funktionsterm gleich Null gesetzt. Am anfangs vorgestellten Beispiel $f(x) = x^2 - 4x + 3$ möchte ich die Vorgehensweise darstellen. Man benötigt dazu die p - q -Formel.²

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ x_0^2 - 4x_0 + 3 &= 0 && | \text{p-q-Formel anwenden} \\ x_{01/02} &= -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 3} \\ &= 2 \pm \sqrt{4 - 3} \\ x_{01/02} &= 2 \pm 1 \\ x_{01} &= 1 && x_{02} = 3 \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Nullstellen liegen bei $x_{01} = 1$ und $x_{02} = 3$.

Man kann das auch so ausdrücken: Die x -Achse wird bei $x_{01} = 1$ und $x_{02} = 3$ geschnitten.

2.2 Scheitelpunkt

Was ist ein **Scheitelpunkt** bei einer Quadratischen Funktion?

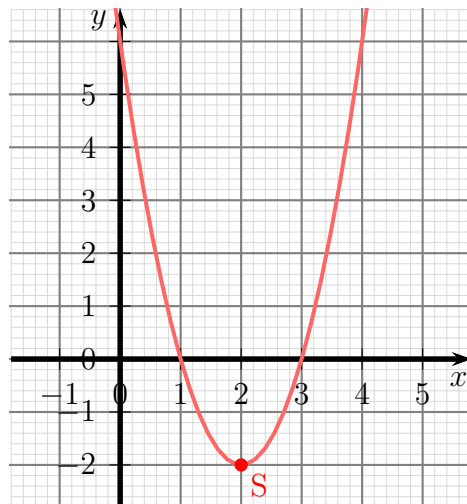
Die Definition lautet wie bereits erwähnt: *Der **Scheitelpunkt** einer Quadratischen Funktion ist der tiefste bzw. der höchste Punkt der zugehörigen Parabel.*

Nebenstehend ist die Funktion mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 6$$

dargestellt. Der Scheitelpunkt S ist eingetragen.

Da die Parabel nach **oben** geöffnet ist, gibt es nur einen **tiefsten** Punkt, nach oben gibt es keinerlei Begrenzung. Deswegen ist hier der Scheitelpunkt der tiefste Punkt.



Schauen wir uns den Funktionsgraphen einmal näher an. Man erkennt, dass der Scheitelpunkt wegen der Symmetrie der Parabel genau in der Mitte zwischen den Nullstellen liegt. Aus dieser Tatsache lässt sich eine Formel zur einfachen Scheitelpunktbestimmung herleiten. Bestimmen wir dazu zunächst bei diesem Beispiel die Nullstellen.

²Einzelheiten zur p - q -Formel siehe hier: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/quad.pdf>

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= 0 \\
2x_0^2 - 8x_0 + 6 &= 0 && | : 2 \\
x_0^2 - 4x_0 + 3 &= 0 \\
p &= -4 \\
q &= 3 \\
x_{1/2} &= -\frac{p}{1} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\
x_{01/02} &= -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 3} \\
x_{01/02} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \\
x_{01/02} &= 2 \pm 1
\end{aligned}$$

Ohne, dass man die beiden Nullstellen konkret ausrechnen muss, kann man an dieser Formel sofort erkennen, dass die Nullstellen symmetrisch zu $x = 2$ liegen, die eine 1 darüber und die andere 1 darunter. Das bedeutet im Umkehrschluss, dass die Zahl **vor** dem Zeichen \pm den x -Wert des Scheitelpunktes x_S darstellen muss. Sie liegt ja in der Mitte zwischen den Nullstellen.

Ergebnis: $x_S = 2$

Diese Erkenntnis möchte ich jetzt ausnutzen, um allgemein eine einfache Formel zur Bestimmung des x -Wertes x_S des Scheitelpunktes $S(x_S|y_S)$ einer Quadratischen Funktion herzuleiten.

Ich gehe dazu von der Normalform aus und bestimme zunächst die Nullstellen.

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c && | \text{ Funktionsterm gleich Null setzen} \\
0 &= ax^2 + bx + c && | : a \\
0 &= x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} && | p-q-Formel anwenden \\
x_{01/02} &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \\
x_{01} &= -\frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \\
x_{02} &= -\frac{b}{2a} - \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}
\end{aligned}$$

Ich bilde den Mittelwert, um den x -Wert x_S des Scheitelpunktes zu erhalten.

$$\begin{aligned}x_S &= \frac{x_{01} + x_{02}}{2} \\x_S &= \frac{\left(-\frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}\right) + \left(-\frac{b}{2a} - \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}\right)}{2} \\&= \frac{-2 \cdot \frac{b}{2a}}{2} \\x_S &= -\frac{b}{2a}\end{aligned}$$

Ergebnis: Wenn die Funktionsgleichung in der Normalform

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

bekannt ist, dann kann die x -Koordinate x_S des Scheitelpunktes mit Hilfe dieser Formel bestimmt werden:

Scheitelpunktformel:

$$x_S = -\frac{b}{2a}$$

Kommen wir zu unserem Beispiel zurück.

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 6$$

Wir bestimmen x_S mit der oben hergeleiteten Formel:

$$\begin{aligned}x_S &= -\frac{b}{2a} \\&= \frac{-8}{2 \cdot 2} \\x_S &= 2\end{aligned}$$

Der zugehörige y -Wert y_S kann dadurch bestimmt werden, dass der gefundene Wert für x_S in die Funktionsgleichung eingesetzt wird. In unserem Beispiel sieht das so aus:

$$\begin{aligned}y_S &= f(x_S) \\&= 2x_S^2 - 8x_S + 6 \\&= 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 6 \\y_S &= -2\end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt in unserem Beispiel ist damit: $S(2 | -2)$

2.3 Scheitelpunktform

Die Funktionsgleichung einer Quadratischen Funktion kann nicht nur in der Normalform, sondern auch in der Scheitelpunktform angegeben werden. Zur Erinnerung – die Normalform lautet:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Gibt man die Funktionsgleichung in der **Scheitelpunktform** an, dann sieht das so aus:

Scheitelpunktform:

$$f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$$

Hierin sind x_S und y_S die Koordinaten des Scheitelpunktes $S(x_S|y_S)$ und a der bereits aus der Normalform bekannte Formfaktor.

Diese Formel möchte ich an dieser Stelle nicht herleiten. Das wäre recht einfach mit der nachfolgenden Formel für eine Verschiebung. Verschiebt man den Graphen einer beliebige Funktion $f(x)$ (nicht nur einer Quadratischen Funktion) um den Wert x_v nach rechts und y_v nach oben, so hat die verschobene Funktion $f_v(x)$ die Funktionsgleichung:

Verschobene Funktion:

$$f_v(x) = f(x - x_v) + y_v$$

Auch zu dieser Formel möchte ich mir den Beweis an dieser Stelle ersparen.³

Wichtig: Die Scheitelpunktform bietet gegenüber der Normalform zwei Vorteile.

1. Ist die Funktionsgleichung einer Quadratischen Funktion in der Scheitelpunktform angegeben, dann kann man sofort die **Koordinaten des Scheitelpunktes darin ablesen**.
2. Sucht man die Funktionsgleichung einer Quadratischen Funktion und kennt man den Formfaktor und die Koordinaten des Scheitelpunktes, dann kann die Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform **ohne weitere Rechnung** direkt angegeben werden.

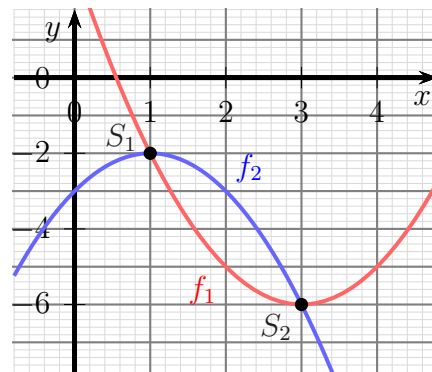
³Die Einzelheiten zum Verschieben eines Funktionsgraphen habe ich hier beschrieben:
<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/transfo.pdf>

2.4 Schnittpunktbestimmung

Auch Parabeln von Quadratischen Funktionen können Schnittpunkte miteinander haben. Nebenstehend sind die beiden Funktionsgraphen von

$$f_1(x) = x^2 - 6x + 3 \quad \text{und} \quad f_2(x) = -x^2 + 2x - 3$$

dargestellt.



In diesem Fall gibt es zwei Schnittpunkte, S_1 und S_2 . Es ist aber auch möglich, dass die beiden Parabeln so liegen, dass sie sich garnicht treffen. Läge beispielsweise der Funktionsgraph von f_1 um 5 Einheiten höher, dann liefen die beiden Funktionsgraphen aneinander vorbei, es gäbe keine Schnittpunkte. Möglich ist es auch, dass die Funktionsgraphen sich „streifen“, also nur in einem einzigen Punkt gerade noch berühren.

Wie bei Linearen Funktionen auch können die Schnittpunkte durch Gleichsetzen der Funktionsterme berechnet werden. Das möchte ich an den gegebenen Beispiel einmal vorrechnen.

$$\begin{aligned}
 f_1(x_S) &= f_2(x_S) \\
 x_S^2 - 6x_S + 3 &= -x_S^2 + 2x_S - 3 && | + x_S^2 - 2x_S + 3 \\
 2x_S^2 - 8x_S + 6 &= 0 && | : 2 \\
 x_S^2 - 4x_S + 3 &= 0 && | p-q\text{-Formel} \\
 x_{S1/2} &= -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 3} \\
 &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \\
 &= 2 \pm 1 \\
 x_{S1} &= 2 - 1 = 1 && x_{S2} = 2 + 1 = 3
 \end{aligned}$$

Die zugehörigen y -Werte erhält man durch Einsetzen der gefundene x -Werte in eine (beliebige) der beiden Funktionsgleichungen. Willkürlich wähle ich hier f_1 .

$$y_{S1} = f_1(x_{S1}) = x_{S1}^2 - 6x_{S1} + 3 = 1^2 - 6 \cdot 1 + 3 = -2$$

$$y_{S2} = f_1(x_{S2}) = x_{S2}^2 - 6x_{S2} + 3 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 3 = -6$$

Damit erhalten wir die beiden Schnittpunkte: $S_1(1|-2)$ und $S_2(3|-6)$

3 Beispiele

3.1 Beispiel 1

Eine Quadratische Funktion hat den Scheitelpunkt $S(-1|12)$ und eine Nullstelle bei $x_0 = -3$. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung in **Normalform**?

Lösung: Weil ein Scheitelpunkt bekannt ist, bietet sich zum Aufstellen zunächst die Scheitelpunktform der Funktionsgleichung an.

$$\begin{aligned}f(x) &= a \cdot (x - x_S)^2 + y_S \\ &= a \cdot (x - (-1))^2 + 12 \\ f(x) &= a \cdot (x + 1)^2 + 12\end{aligned}$$

Jetzt fehlt nur noch der Parameter a . Zur Berechnung von a können wir die Angabe zur Nullstelle benutzen. An einer Nullstelle ist immer der y -Wert Null. Wenn wir also den Funktionswert an der Nullstelle berechnen, erhalten wir den Wert Null.

$$\begin{aligned}f(x_0) &= 0 \\ a \cdot (x_0 + 1)^2 + 12 &= 0 \\ a \cdot (-3 + 1)^2 + 12 &= 0 \\ a \cdot (-2)^2 + 12 &= 0 \\ 4a + 12 &= 0 & | -12 \\ 4a &= -12 & | :4 \\ a &= -3\end{aligned}$$

Mit diesem Wert kann nun die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform angegeben werden.

$$f(x) = -3 \cdot (x + 1)^2 + 12$$

Jetzt muss die Scheitelpunktform nur noch in die Normalform umgeformt werden. Dazu wird die Klammer mit der ersten Binomischen Formel⁴ umgeformt.

$$\begin{aligned}f(x) &= -3 \cdot (x + 1)^2 + 12 \\ &= -3 \cdot (x^2 + 2x + 1) + 12 \\ &= -3x^2 - 6x - 3 + 12 \\ f(x) &= -3x^2 - 6x + 9\end{aligned}$$

Die gesuchte Funktion lautet: $f(x) = -3x^2 - 6x + 9$

⁴Einzelheiten zum den Binomischen Formeln siehe hier:
<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/binom.pdf>

3.2 Beispiel 2

Eine Parabel verläuft durch die Punkte $P_1(3|9)$ und $P_2(4|19)$. Sie schneidet die y -Achse bei $y_0 = 3$. Wo liegt ihr Scheitelpunkt?

Lösung: Eine Parabel ist eine Quadratische Funktion. Wir können von der Normalform ausgehen:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Da der y -Achsenabschnitt mit $y_0 = 3$ bekannt ist, kennen wir auch schon den Parameter c .

$$c = y_0 = 3$$

Damit lässt sich die Funktionsgleichung schon wie folgt konkretisieren:

$$f(x) = ax^2 + bx + 3$$

Wir können die Koordinaten der bekannten Punkte in die Funktionsgleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} P_1(3|9) : f(3) = 9 &\Rightarrow a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 3 = 9 \\ P_2(4|19) : f(4) = 19 &\Rightarrow a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + 3 = 19 \end{aligned}$$

Die beiden Gleichungen werden zunächst vereinfacht:

$$\begin{array}{r} (1) \quad a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 3 = 9 \\ (2) \quad a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + 3 = 19 \\ \hline (1) \quad 9a + 3b + 3 = 9 \quad | -3 \\ (2) \quad 16a + 4b + 3 = 19 \quad | -3 \\ \hline (1) \quad 9a + 3b = 6 \\ (2) \quad 16a + 4b = 16 \end{array}$$

Dieses Lineargleichungssystem kann nun mit einem beliebigen Verfahren gelöst werden.⁵ Willkürlich verwende ich das **Einsetzungsverfahren**. Dazu löse ich Gleichung (1) nach b auf und setze das Ergebnis in (2) ein.

$$\begin{array}{r} 9a + 3b = 6 \quad | -9a \\ 3b = 6 - 9a \quad | :3 \\ b = 2 - 3a \end{array}$$

Einsetzen in (2):

$$\begin{array}{r} 16a + 4b = 16 \\ 16a + 4 \cdot (2 - 3a) = 16 \\ 16a + 8 - 12a = 16 \quad | -8 \\ 4a = 8 \quad | :4 \\ a = 2 \end{array}$$

⁵Einzelheiten zu Lösungsverfahren von Lineargleichungssystemen siehe hier:
<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/lingl.pdf>

Das Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (1) eingesetzt, um b zu erhalten.

$$b = 2 - 3a = 2 - 3 \cdot 2 = 2 - 6 = -4$$

Mit diesen Ergebnissen kann die Funktionsgleichung angegeben werden:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 3$$

Jetzt muss nur noch der Scheitelpunkt berechnet werden. Die Scheitelpunktformel hilft dabei.

$$\begin{aligned}x_S &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{-4}{2 \cdot 2} \\ x_S &= 1\end{aligned}$$

Den zugehörigen y -Wert y_S liefert die Funktionsgleichung.

$$\begin{aligned}y_S &= f(x_S) \\ &= 2x_S^2 - 4x_S + 3 \\ &= 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 \\ &= 2 - 4 + 3 \\ y_S &= 1\end{aligned}$$

Der gesuchte Scheitelpunkt lautet: $S(1|1)$

3.3 Beispiel 3

Eine Parabel mit dem Formfaktor $a = -1$ verläuft durch die Punkte $P_1(1|4)$ und $P_2(4|1)$. Berechnen Sie ihren Scheitelpunkt.

Lösung: Die **Normalform** der Funktionsgleichung lautet:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Da der Formfaktor mit $a = -1$ bekannt ist, lautet die Funktionsgleichung:

$$f(x) = -x^2 + bx + c$$

Die Koordinaten beider Punkte können eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} P_1(1|4) : f(1) = 4 &\Rightarrow -1^2 + b \cdot 1 + c = 4 \\ P_2(4|1) : f(4) = 1 &\Rightarrow -4^2 + b \cdot 4 + c = 1 \end{aligned}$$

Die beiden Gleichungen werden zunächst vereinfacht:

$$\begin{array}{r} (1) \quad -1^2 + b \cdot 1 + c = 4 \\ (2) \quad -4^2 + b \cdot 4 + c = 1 \\ \hline (1) \quad \quad -1 + b + c = 4 \quad | +1 \\ (2) \quad -16 + 4b + c = 1 \quad | +16 \\ \hline (1) \quad \quad \quad b + c = 5 \\ (2) \quad \quad \quad 4b + c = 17 \end{array}$$

Dieses Lineargleichungssystem kann mit jedem beliebigen Lösungsverfahren gelöst werden.⁶ Weil hier die Koeffizienten (die Vorzahlen) von c übereinstimmen, bietet sich das Additions-/Subtraktionsverfahren an. Wenn man Gleichung (1) von (2) subtrahiert, fällt c sofort weg.

$$\begin{array}{r} (1) \quad b + c = 5 \quad | - \\ (2) \quad 4b + c = 17 \quad | \\ \hline \quad \quad 3b = 12 \quad | :3 \\ \quad \quad b = 4 \end{array}$$

Zur Bestimmung des Parameters c wird dieses Ergebnis in eine der beiden Gleichungen eingesetzt. Weil mir Gleichung (1) einfacher erscheint, nehme ich diese.

$$\begin{aligned} b + c &= 5 \\ 4 + c &= 5 \quad | -4 \\ c &= 1 \end{aligned}$$

Damit kann die Funktionsgleichung angegeben werden:

$$f(x) = -x^2 + 4x + 1$$

⁶Einzelheiten zu Lösungsverfahren von Lineargleichungssystemen siehe hier:
<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/lingl.pdf>

Jetzt muss der Scheitelpunkt berechnet werden. Die Scheitelpunktformel hilft dabei.

$$\begin{aligned}x_S &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{4}{2 \cdot (-1)} \\ x_S &= 2\end{aligned}$$

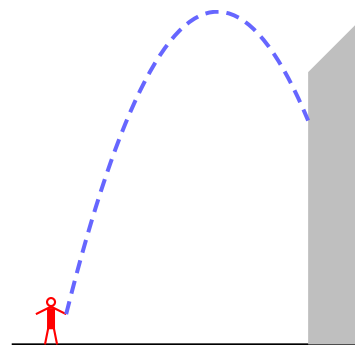
Den zugehörigen y -Wert y_S liefert die Funktionsgleichung.

$$\begin{aligned}y_S &= f(x_S) \\ &= -x_S^2 + 4x_S + 1 \\ &= -2^2 + 4 \cdot 2 + 1 \\ &= -4 + 8 + 1 \\ y_S &= 5\end{aligned}$$

Der gesuchte Scheitelpunkt lautet: $S(2|5)$

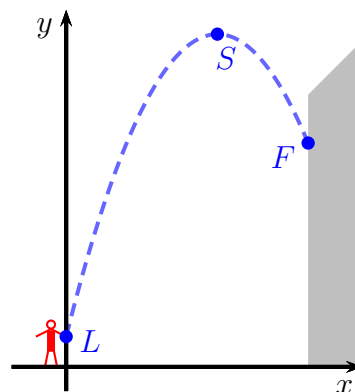
3.4 Beispiel 4

Ein Feuerwehrmann will mit dem Wasserstrahl aus seiner Löschspritze ein Gebäude löschen, das 8 Meter entfernt von ihm steht. Der Wasserstrahl trifft auf ein Fenster in 7,40 Meter Höhe. Der Feuerwehrmann hält die Löschspritze einen Meter über dem Boden fest. In einer waagrecht gemessenen Entfernung von 5 Metern vom Feuerwehrmann hat der Bogen des Wasserstrahls seine größte Höhe. Wie hoch kommt der Wasserstrahl dort? Der Wasserstrahl hat die Form einer Parabel.



Lösung: Zur Lösung legt man zunächst sinnvollerweise ein geeignetes Koordinatensystem in die Planskizze. Hier gibt es natürlich nicht nur eine einzige Möglichkeit. Hat man es aber festgelegt, dann orientiert sich die Funktionsgleichung natürlich an diesem Koordinatensystem.

Ich lege mein Koordinatensystem mit der x -Achse auf den Erdboden und der y -Achse durch die Austrittsöffnung der Löschspritze bei L . Außerdem benenne ich den Scheitelpunkt des Wasserstrahls mit S und den Eintrittspunkt des Wasserstrahles ins Fenster mit F .



Für die weitere Rechnung werden alle Maße in der Einheit *Meter* angegeben. Dann kann man sie der Einfachheit halber in der Rechnung weglassen. Mit den angegebenen Daten können die Punkte mit ihren Koordinaten in dieser Form angegeben werden:

$$L(0|1) \quad F(8|7,4) \quad S(5|y_S)$$

Hierbei ist der Parameter y_S gesucht.

Da der Wasserstrahl die Form einer **Parabel** hat, stellt die zugehörige Funktion eine Quadratische Funktion dar. Daher gibt es für die Lösung zwei unterschiedliche mögliche Ansätze:

1. Die Scheitelpunktform
2. Die Normalform

Lösungsvariante 1: Beginnen wir mit der **Scheitelpunktform** der Quadratischen Funktion.

$$f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$$

Der bereits bekannte Wert $x_S = 5$ kann eingesetzt werden.

$$f(x) = a \cdot (x - 5)^2 + y_S$$

In diese Funktionsgleichung werden nun die Parameter der beiden Punkte $L(0|1)$ und $F(8|7,4)$ eingesetzt.

$$\begin{aligned} L(0|1) : f(0) = 1 &\Rightarrow a \cdot (0 - 5)^2 + y_S = 1 \\ F(8|7,4) : f(8) = 7,4 &\Rightarrow a \cdot (8 - 5)^2 + y_S = 7,4 \end{aligned}$$

Die beiden Gleichungen – ich nenne sie Gleichung (1) und (2) – werden nun vereinfacht.

$$\begin{array}{r} (1) \quad a \cdot (0 - 5)^2 + y_S = 1 \\ (2) \quad a \cdot (8 - 5)^2 + y_S = 7,4 \\ \hline (1) \quad a \cdot 5^2 + y_S = 1 \\ (2) \quad a \cdot 3^2 + y_S = 7,4 \\ \hline (1) \quad 25a + y_S = 1 \\ (2) \quad 9a + y_S = 7,4 \end{array}$$

Dieses Lineargleichungssystem kann nun mit einem beliebigen Verfahren gelöst werden. Das **Subtraktionsverfahren**⁷ bietet sich an, denn wenn man Gleichung (2) von Gleichung (1) subtrahiert, fällt sofort y_S weg, weil die Koeffizienten von y_S (die Vorzeichen) gleich sind. (Beide sind 1, weshalb man sie auch weglassen darf.)

$$\begin{array}{r} (1) \quad 25a + y_S = 1 \quad | \\ (2) \quad 9a + y_S = 7,4 \quad | - \\ \hline 16a = -6,4 \quad | : 16 \\ a = -0,4 \end{array}$$

Zur Bestimmung von y_S wird der gefundene Wert für den Parameter a in eine der beiden Gleichungen eingesetzt. Ich wähle willkürlich dafür Gleichung (1).

$$\begin{array}{r} 25a + y_S = 1 \\ 25 \cdot (-0,4) + y_S = 1 \\ -10 + y_S = 1 \quad | + 10 \\ y_S = 11 \end{array}$$

⁷Einzelheiten zum Additions-/Subtraktionsverfahren siehe hier:
<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/add.pdf>

Lösungsvariante 2: Führen wir nur die Lösung mit der **Normalform** der Quadratischen Funktion durch.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Im Gegensatz zur Lösungsvariante 1 gibt es hier nicht nur zwei (a und y_S) sondern **drei** Parameter (a , b und c), die bestimmt werden müssen, um die Funktionsgleichung zu erhalten.

Zunächst können – ähnlich, wie bei Lösungsvariante 1 – die Koordinaten der beiden Punkte $L(0|1)$ und $F(8|7,4)$ in die Normalform eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} L(0|1) : f(0) = 1 &\Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 1 \\ F(8|7,4) : f(8) = 7,4 &\Rightarrow a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c = 7,4 \end{aligned}$$

Zunächst vereinfacht man die beiden Gleichungen.

$$\begin{aligned} (1) \quad 0a + 0b + c &= 1 \quad \Rightarrow \quad c = 1 \\ (2) \quad 64a + 8b + c &= 7,4 \end{aligned}$$

Aus Gleichung (1) haben wir sofort den Parameter $c = 1$ erhalten. Den können wir in Gleichung (2) einsetzen und diese weiter zusammenfassen.

$$\begin{aligned} (2) \quad 64a + 8b + c &= 7,4 \\ (2) \quad 64a + 8b + 1 &= 7,4 \quad | -1 \\ (2) \quad 64a + 8b &= 6,4 \end{aligned}$$

Wir haben noch nicht ausgenutzt, dass der x -Wert des Scheitelpunktes mit $x_S = 5$ bekannt ist. Er kann in die Scheitelpunktformel eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} x_S &= -\frac{b}{2a} \\ 5 &= -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann leicht nach b umgestellt werden, damit das Ergebnis in die umgestellte Gleichung 2 eingesetzt werden kann. Man spricht dann vom **Einsetzungsverfahren**.⁸

$$\begin{aligned} 5 &= -\frac{b}{2a} \quad | \cdot (-2a) \\ -10a &= b \end{aligned}$$

In (2) einsetzen:

$$\begin{aligned} 64a + 8b &= 6,4 \\ 64a + 8 \cdot (-10a) &= 6,4 \\ 64a - 80a &= 6,4 \\ -16a &= 6,4 \quad | : (-16) \\ a &= -0,4 \end{aligned}$$

⁸Einzelheiten zum Einsetzungsverfahren siehe hier:
<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/einsetz.pdf>

Das Ergebnis wird in die umgeformte Scheitelpunktformel eingesetzt.

$$\begin{aligned} b &= -10a \\ &= -10 \cdot (-0,4) \\ b &= 4 \end{aligned}$$

Damit kann die Funktionsgleichung angegeben werden:

$$f(x) = -0,4x^2 + 4x + 1$$

Setzt man für x den Wert $x_S = 5$ ein, erhält man den y -Wert des Scheitelpunktes $S(x_S|y_S)$.

$$\begin{aligned} y_S &= f(x_S) \\ &= -0,4x_S^2 + 4x_S + 1 \\ &= -0,4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 1 \\ &= -10 + 20 + 1 \\ y_S &= 11 \end{aligned}$$

Vergleicht man beide Lösungswege, dann fällt vermutlich auf, dass der erste etwas kürzer ist. Aber unabhängig vom Lösungsweg kommt man zum selben Ergebnis:

Der Wasserstrahl kommt bis auf 11 Meter hoch.

3.5 Beispiel 5

Ein Kind springt auf die Straße. Ein Autofahrer, der mit der innerorts erlaubten Geschwindigkeit von $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt, kann gerade noch unmittelbar vor dem Kind anhalten. Mit welcher Geschwindigkeit würde er das Kind anfahren, wenn er unzulässigerweise „ein bisschen“ zu schnell, nämlich mit $70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ gefahren wäre?

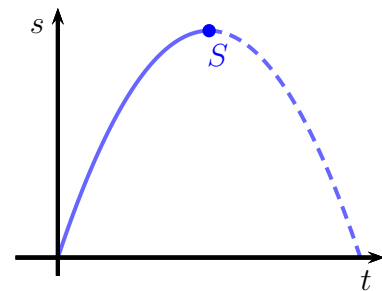
Lösung: Hier brauchen wir zunächst ein paar physikalische Grundlagen. Der in der Zeit t zurückgelegte Weg s eines bremsenden Fahrzeuges stellt eine Quadratische Funktion dar. Sie lautet:

$$s(t) = -\frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

Achtung! Der Parameter a in dieser Formel ist nicht identisch mit dem Parameter a aus der Normalform der Quadratischen Funktion. Hier ist a die Bremsverzögerung und v_0 die Anfangsgeschwindigkeit des Fahrzeuges. Dabei verringert sich die Geschwindigkeit nach der Linearen Funktion:

$$v(t) = v_0 - a \cdot t$$

Nebenstehend ist der Verlauf der Weg-Zeit-Funktion des Bremsvorgangs dargestellt. Am Koordinatenursprung beim Zeitpunkt $t = 0$ beginnt der Bremsvorgang. Das Fahrzeug bewegt sich zunächst weiter vorwärts. Der steile Kurvenverlauf ganz links kurz nach dem Beginn des Bremsvorgangs lässt auf eine hohe Geschwindigkeit schließen. Dann wird die Kurve immer flacher, das Fahrzeug wird langsamer. Im Scheitelpunkt S kommt das Fahrzeug zum Stehen. Weil hier der Bremsvorgang endet, endet hier auch der Definitionsbereich der Quadratischen Funktion für den Bremsvorgang. Würde weiterhin eine Kraft wie die Bremskraft am Fahrzeug nach hinten ziehen, dann würde sich das Fahrzeug rückwärts beschleunigen und dem gestrichelten Kurvenverlauf folgen. Da das aber nicht passiert, ist der Kurvenverlauf hier nur gestrichelt eingezeichnet.



Man kann unter normalen Bedingungen von einer Bremsverzögerung von etwa $4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ausgehen.

Zum bequemen Rechnen möchte ich die Einheiten weglassen. Da alle Zeiten in Sekunden und alle Wege im Metern angegeben werden sollen, müssten die Geschwindigkeiten eigentlich in Meter pro Sekunde umgerechnet werden. Man kann das aber auch in die Formeln hineinnehmen. Da $1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3,6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sind, muss nur der Faktor 3,6 in die Formeln eingebaut werden. Damit erhalten wir die nachfolgenden Formen der Formeln. Zunächst die Weg-Zeit-Funktion:

$$s(t) = -\frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + \frac{v_0}{3,6} \cdot t$$

Und hier die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion:

$$\begin{aligned}\frac{v(t)}{3,6} &= \frac{v_0}{3,6} - a \cdot t & | \cdot 3,6 \\ v(t) &= v_0 - 3,6 \cdot a \cdot t\end{aligned}$$

Zur Erinnerung: Verwendet man diese Form der Formeln, dann wird s in Metern, t in Sekunden, a in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ und v in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ eingesetzt.

Hiermit ergibt sich folgender Lösungsweg:

1. Man berechnet für die erlaubte Geschwindigkeit die Zeit bis zum Stillstand des Fahrzeuges, indem man den t_S -Wert (x_S -Wert) des Scheitelpunktes der Quadratischen Weg-Zeit-Funktion mit Hilfe der Scheitelpunktformel berechnet.
2. Mit dieser Zeit kann der Bremsweg als s_S -Wert (y_S -Wert) der Quadratische Weg-Zeit-Funktion ermittelt werden.
3. Mit diesem errechneten Bremsweg wird die Zeit ausgerechnet, nach der das schnelle Fahrzeug auf das Kind trifft.
4. Mit dieser Zeit und der schnelleren Anfangsgeschwindigkeit kann über die Lineare Geschwindigkeits-Zeit-Funktion die Geschwindigkeit berechnet werden, mit der das Kind angefahren wird.

Zunächst setzen wir den angenommenen Wert der Bremsverzögerung von $4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ in die Formeln ein und vereinfachen diese.

$$\begin{aligned}s(t) &= -\frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + \frac{v_0}{3,6} \cdot t \\ s(t) &= -\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot t^2 + \frac{v_0}{3,6} \cdot t \\ s(t) &= -2 \cdot t^2 + \frac{v_0}{3,6} \cdot t \\ v(t) &= v_0 - 3,6 \cdot a \cdot t \\ v(t) &= v_0 - 3,6 \cdot 4 \cdot t \\ v(t) &= v_0 - 14,4 \cdot t\end{aligned}$$

Dann wird die Zeit für die Bremsung bei erlaubter Geschwindigkeit berechnet. Das ist der t -Wert t_S des Scheitelpunktes.

$$\begin{aligned}t_S &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{\frac{50}{3,6}}{2 \cdot (-2)} \\ t_S &= 3,472\end{aligned}$$

Nach 3,472 Sekunden kommt das Fahrzeug zu Stehen. Der Bremsweg s_S wird berechnet.

$$\begin{aligned} s_S &= -2 \cdot t^2 + \frac{v_0}{3,6} \cdot t \\ &= -2 \cdot (3,472)^2 + \frac{50}{3,6} \cdot 3,472 \\ s_S &= 24,11 \end{aligned}$$

Der Bremsweg bei den erlaubten $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ beträgt 24,11 m.

Jetzt wird berechnet, wie lange es bei einer Anfangsgeschwindigkeit von $70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ dauert, bis 24,11 m zurückgelegt sind. Die dabei entstehende Quadratische Gleichung wird mit der p - q -Formel⁹ gelöst.

$$\begin{aligned} s &= -2 \cdot t^2 + \frac{v_0}{3,6} \cdot t \\ 24,11 &= -2 \cdot t^2 + \frac{70}{3,6} \cdot t && | + 2 \cdot t^2 - \frac{70}{3,6} \\ 2 \cdot t^2 - \frac{70}{3,6} \cdot t + 24,11 &= 0 && | : 2 \\ t^2 - 9,72 \cdot t + 12,055 &= 0 \\ t_{1/2} &= \frac{-(-9,72)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-9,72}{2}\right)^2 - 12,055} \\ t_{1/2} &= 4,86 \pm 3,40 \\ t_1 &= 1,46 && t_2 = 8,26 \end{aligned}$$

Jetzt stellt sich vermutlich die Frage, wieso wir denn zwei Ergebnisse erhalten haben. Der Grund ist folgender:

Wie bereits weiter vorne erwähnt, bedeutet „Bremsen“ für das Fahrzeug eine Kraft, die es nach hinten zieht. Dadurch wird es langsamer, bis zum Stillstand. Würde jetzt immer noch eine Kraft wirken, die nach hinten zieht, dann würde das Fahrzeug rückwärts beschleunigt und irgendwann wieder an der Wegmarke bei 24,11 m vorbeikommen. Deswegen verliert die Formel zum Zeitpunkt des Stillstandes ihre Gültigkeit, die größere Zeit liegt **außerhalb** des Gültigkeitsbereiches der Formel. Deshalb müssen wir mit der kleineren Zeit von $t_1 = 1,46$ s rechnen.

$$\begin{aligned} v &= v_0 - 14,4 \cdot t \\ &= 70 - 14,4 \cdot 1,46 \\ v &= 48,98 \end{aligned}$$

Das Kind wird demnach mit einer Geschwindigkeit von $48,98 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Das ist ungefähr die erlaubte Geschwindigkeit. Ein „bischen“ schneller hat also sehr gravierende Folgen für das Kind.

⁹Einzelheiten zur p - q -Formel siehe hier: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/quad.pdf>

Nachtrag: Was wäre gewesen, wenn wir mit der größeren Zeit von $t_1 = 8,26$ s gerechnet hätten? Probieren wir es aus.

$$\begin{aligned}v &= v_0 - 14,4 \cdot t \\ &= 70 - 14,4 \cdot 8,26 \\ v &= -48,94\end{aligned}$$

Das ist (von Rundungsfehlern abgesehen) der gleiche Betrag, wie bei der kleineren Zeit, nur mit negativem Vorzeichen. Mit dieser Geschwindigkeit käme das Fahrzeug also **rückwärts** wieder an der Wegmarke bei 24,11 m vorbei, wenn die rückwärtsgerichtete bremsende Kraft auch nach dem Stillstand weiter wirken würde. Aber das tut sie bekanntlich ja nicht.

4 Aufgaben

4.1 Aufgabe 1:

Geben Sie Quadratische Funktion $f(x)$ mit dem Formfaktor 1 an, deren Scheitelpunkt $S(4 | -7)$ lautet!

4.2 Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion $f_1(x) = 2x^2 - 4x + 3$. Geben Sie die Funktion $f_2(x)$ an, die gegenüber der Funktion $f_1(x)$ um 3 Einheiten nach rechts und 2 Einheiten nach unten verschoben ist!

4.3 Aufgabe 3:

Die Quadratische Funktion hat den Scheitelpunkt $S(4|1)$. Der Graph schneidet die y -Achse bei $y_0 = -7$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

4.4 Aufgabe 4:

Bestimmen Sie den Scheitelpunkt, die Nullstellen und den Wertebereich der Quadratischen Funktion $f(x) = 3x^2 - 12x + 15$!

4.5 Aufgabe 5:

Bestimmen Sie den Scheitelpunkt, die Nullstellen und den Wertebereich der Quadratischen Funktion $f(x) = -16x^2 - 16x + 5$!

4.6 Aufgabe 6:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Parabel mit $f_1(x) = 4x^2 - 9x + 1$ und der Geraden mit $f_2(x) = 3x + 17$!

4.7 Aufgabe 7:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Parabel mit $f_1(x) = 9x^2 + 12x - 4$ und der Geraden mit $f_2(x) = -12x + 5$!

4.8 Aufgabe 8:

Gegeben ist die Quadratische Funktion $f(x) = -2x^2 + 5x - 3$. Geben Sie den Scheitelpunkt an und bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$. Welchen Definitionsbereich hat die Umkehrfunktion?

4.9 Aufgabe 9:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der beiden Parabeln mit den Funktionsgleichungen $f_1(x) = 4x^2 + 3x - 8$ und $f_2(x) = 7x^2 + 9x + 7$.

4.10 Aufgabe 10:

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Quadratischen Funktion, deren Graph durch die Punkte $P_1(-1|8)$, $P_2(2|-1)$ und $P_3(4|3)$ verläuft.

4.11 Aufgabe 11:

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Linearen Funktion $f_2(x)$, deren Graph die Parabel der Quadratischen Funktion $f_1(x) = x^2 - 4x + 4$ bei $x_b = 4$ als Tangente berührt.

4.12 Aufgabe 12:

Der Graph der Quadratischen Funktion $f(x)$ hat den Scheitelpunkt $S(3|2)$ und verläuft durch den Punkt $P(5|10)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von $f(x)$!

4.13 Aufgabe 13:

Bestimmen Sie die Nullstellen und den Scheitelpunkt der Quadratischen Funktion (so weit vorhanden):

$$f(x) = -16x^2 + 24x - 25$$

4.14 Aufgabe 14:

Die Quadratische Funktion $f(x)$ hat den Scheitelpunkt $S(4|3)$ und verläuft durch den Punkt $P(6|11)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von $f(x)$!

4.15 Aufgabe 15:

Die Quadratische Funktion $f(x)$ verläuft durch die drei Punkte $P_1(-3|32)$, $P_2(-1|10)$ und $P_3(2|7)$. Geben Sie die Funktionsgleichung an!

4.16 Aufgabe 16:

Eine verschobene Normalparabel (Formfaktor $a = 1$) verläuft durch die Punkte $P_1(-1|-2)$ und $P_2(0|1)$. Geben Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ an!

4.17 Aufgabe 17:

Eine Parabel (Quadratische Funktion) verläuft durch die drei Punkte $P_1(0|8)$, $P_2(1|3)$ und $P_3(2|0)$. Geben Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ an!

4.18 Aufgabe 18:

Eine Parabel (Quadratische Funktion) hat den Scheitelpunkt $S(-2|0)$ und verläuft durch den Punkt $P(-1|-2)$. Geben Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ an!

4.19 Aufgabe 19:

Verschieben Sie die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 1$ so nach **oben**, dass die neue Parabel durch den Punkt $P(2|3)$ verläuft. Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung $f_2(x)$ an!

4.20 Aufgabe 20:

Verschieben Sie die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 7$ so nach **links**, dass die neue Parabel durch den Punkt $P(0|\frac{7}{2})$ verläuft. Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung $f_2(x)$ an! (Geben Sie **alle** Lösungen an!)

4.21 Aufgabe 21:

Wie ist die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 7$ zu verändern, damit bei **gleichem Scheitelpunkt** der Punkt $P(3|-6)$ zur neuen Parabel gehört. Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung $f_2(x)$ an!

4.22 Aufgabe 22:

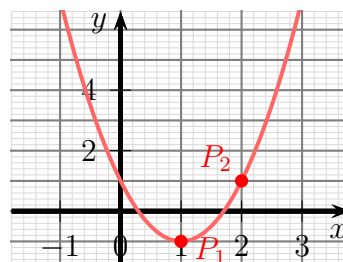
Die Parabel der Quadratischen Funktion $f_1(x)$ schneidet die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = x - 2$ bei $x_1 = -4$ und $x_2 = 1$. Die Parabel schneidet die y -Achse bei $y_0 = 2$. Geben Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ an!

4.23 Aufgabe 23:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte – falls vorhanden – der beiden Parabeln mit den Funktionsgleichungen $f_1(x) = x^2 - 2x + 3$ und $f_2(x) = 2x^2 - 8x + 12$.

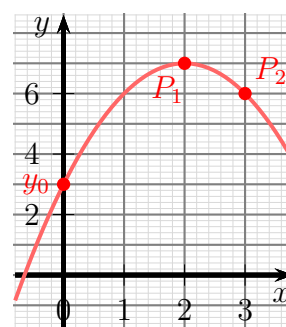
4.24 Aufgabe 24:

Eine Parabel mit dem Formfaktor $a = 2$ verläuft durch die Punkte $P_1(1|-1)$ und $P_2(2|1)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$!



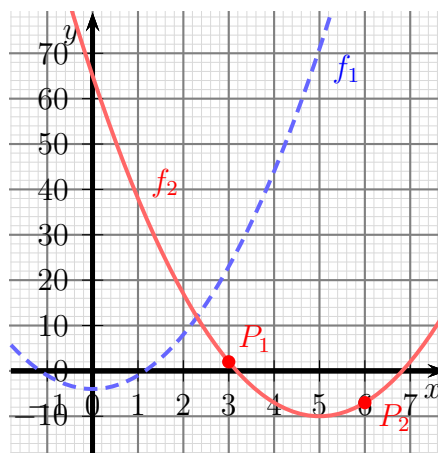
4.25 Aufgabe 25:

Eine Parabel verläuft durch die Punkte $P_1(2|7)$ und $P_2(3|6)$ und schneidet die y -Achse bei $y_0 = 3$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$!



4.26 Aufgabe 26:

Verschieben Sie die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = 3x^2 - 4$ so, dass sie durch die Punkte $P_1(3|2)$ und $P_2(6|-7)$ verläuft. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_2(x)$ der so entstandenen Funktion.



4.27 Aufgabe 27:

Eine Quadratische Funktion hat den Formfaktor $a = -1$ und den Scheitelpunkt $S(2|3)$. Geben Sie die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform und in Normalform an!

4.28 Aufgabe 28:

Der Funktionsgraph einer Quadratischen Funktion mit dem Scheitelpunkt $S(3|-1)$ verläuft durch den Punkt $P(1|7)$. Geben Sie die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform und in Normalform an!

4.29 Aufgabe 29:

Gegeben ist eine Quadratische Funktion mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = -2x^2 - 4x + 6$$

Berechnen Sie den Scheitelpunkt und die Nullstellen.

4.30 Aufgabe 30:

Eine Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(4|7)$ schneidet die y -Achse bei $y_0 = 3$. Bestimmen Sie die zugehörige Funktionsgleichung!

4.31 Aufgabe 31:

Gegeben ist die Quadratische Funktion mit der Funktionsgleichung:

$$f_1(x) = 3x^2 + 24x + 53$$

Gesucht ist die Funktion f_2 , deren Funktionsgraph den selben Scheitelpunkt hat wie f_1 . Der Funktionsgraph von f_2 verläuft außerdem durch den Punkt $P(-2|-3)$.

4.32 Aufgabe 32:

Eine Parabel verläuft durch die Punkte $P_1(0|14)$ und $P_2(2|-2)$. Der Scheitelpunkt liegt an der Stelle $x_S = 3$. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung?

4.33 Aufgabe 33:

Welche dieser fünf Funktionen haben den selben Scheitelpunkt?

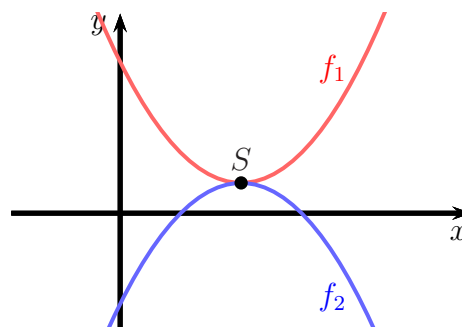
$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 - 10x + 21 \\ f_2(x) &= 3x^2 - 30x + 71 \\ f_3(x) &= -2x^2 + 20x - 48 \\ f_4(x) &= 0,5x^2 + 5x + 8,5 \\ f_5(x) &= 4 \cdot (x - 5)^2 - 4 \end{aligned}$$

4.34 Aufgabe 34:

Gegeben ist die Funktion f_1 mit der Funktionsgleichung

$$f_1(x) = 4x^2 - 24x + 37$$

Gesucht ist die Funktion f_2 , die aus f_1 dadurch entstanden ist, dass man die Parabel von f_1 um 180° um deren Scheitelpunkt S gedreht hat, wie nebenstehend dargestellt.



5 Lösungen

5.1 Aufgabe 1:

Geben Sie Quadratische Funktion $f(x)$ mit dem Formfaktor 1 an, deren Scheitelpunkt $S(4 | -7)$ lautet!

Lösung: Es bietet sich an, die Scheitelpunktform der Funktionsgleichung zu verwenden.

$$f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$$

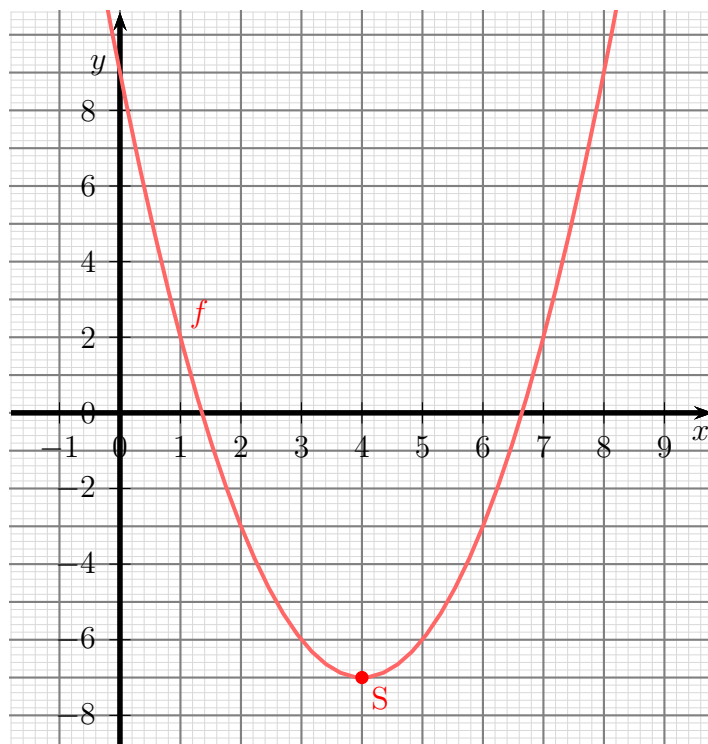
Setzt man die bekannten Koordinaten und den ebenfalls bekannten Formfaktor ein, ist man schon fertig.

$$f(x) = 1 \cdot (x - 4)^2 - 7$$

Wenn man möchte, kann man die Klammer noch auflösen, um die Gleichung in die Normalform zu bringen.

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \cdot (x - 4)^2 - 7 \\ &= x^2 - 8x + 16 - 7 \\ f(x) &= x^2 - 8x + 9 \end{aligned}$$

Nachfolgend ist der Verlauf des Funktionsgraphen dargestellt.



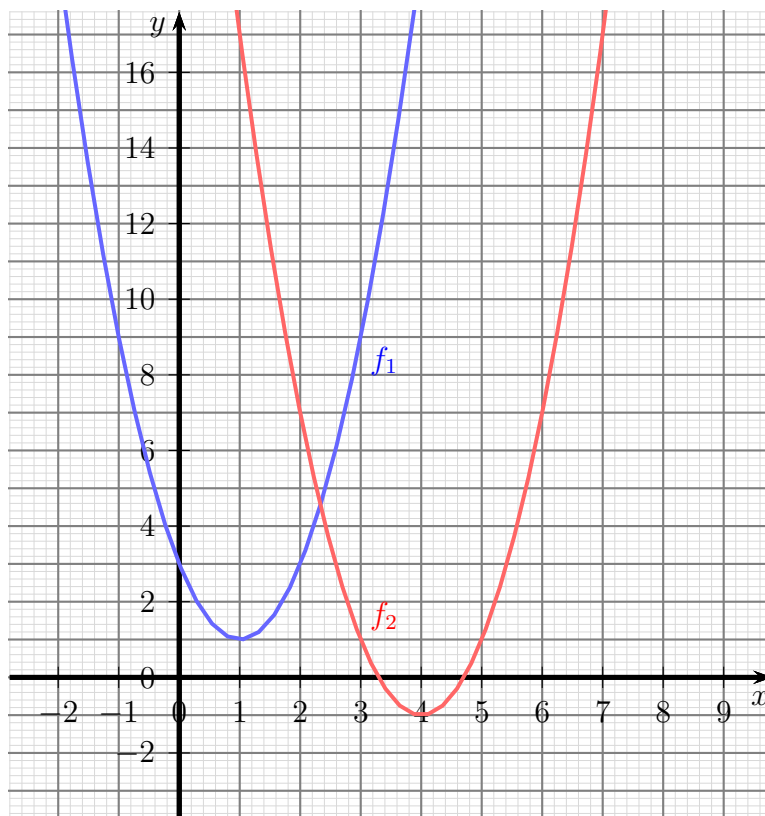
5.2 Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion $f_1(x) = 2x^2 - 4x + 3$. Geben Sie die Funktion $f_2(x)$ an, die gegenüber der Funktion $f_1(x)$ um 3 Einheiten nach rechts und 2 Einheiten nach unten verschoben ist!

Lösung: Für dieses Problem bietet sich die Verschiebformel an. 2 Einheiten nach unten entsprechen dabei -2 Einheiten nach oben.

$$\begin{aligned} f_2(x) &= f_1(x - 3) + (-2) \\ &= 2 \cdot (x - 3)^2 - 4 \cdot (x - 3) + 3 - 2 \\ &= 2 \cdot (x^2 - 6x + 9) - 4x + 12 + 1 \\ &= 2x^2 - 12x + 18 - 4x + 13 \\ f_2(x) &= 2x^2 - 16x + 31 \end{aligned}$$

Nachfolgend ist der Verlauf der Funktionsgraphen dargestellt.



5.3 Aufgabe 3:

Die Quadratische Funktion hat den Scheitelpunkt $S(4|1)$. Der Graph schneidet die y -Achse bei $y_0 = -7$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung: Da der Scheitelpunkt bekannt ist, bietet sich die Scheitelpunktform an. Es muss dann nur noch a berechnet werden.

$$\begin{aligned}f(x) &= a \cdot (x - x_S)^2 + y_S \\f(x) &= a \cdot (x - 4)^2 + 1\end{aligned}$$

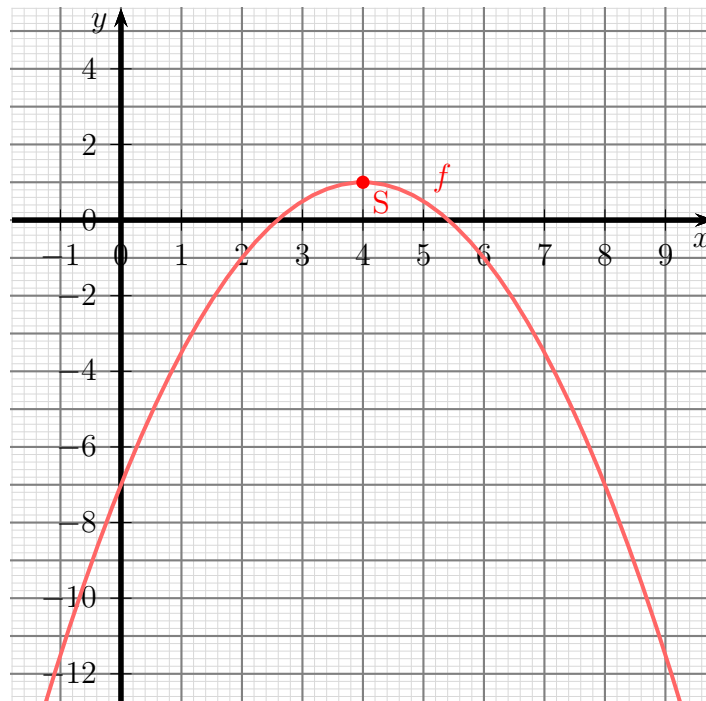
Der Schnittpunkt mit der y -Achse bedeutet: $f(0) = y_S$. Das setzen wir ein.

$$\begin{aligned}-7 &= a \cdot (0 - 4)^2 + 1 \\-7 &= a \cdot 16 + 1 && | -1 \\-8 &= 16a && | : 16 \\a &= -\frac{8}{16} \\a &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Mit diesem Wert für a erhalten wir die gesuchte Funktion:

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x - 4)^2 + 1 = -\frac{1}{2} \cdot (x^2 - 8x + 16) + 1 = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 7$$

Nachfolgend ist der Verlauf des Funktionsgraphen dargestellt.



5.4 Aufgabe 4:

Bestimmen Sie den Scheitelpunkt, die Nullstellen und den Wertebereich der Quadratischen Funktion $f(x) = 3x^2 - 12x + 15$!

Lösung: An einer Nullstelle ist der Funktionswert $= 0$. Daher lautet der Ansatz zur Nullstellenbestimmung: $f(x_0) = 0$.

$$\begin{aligned} 3x_0^2 - 12x_0 + 15 &= 0 && | : 3 \\ x_0^2 - 4x_0 + 5 &= 0 \\ x_{01/2} &= 2 \pm \sqrt{4 - 5} \\ x_{01/2} &= 2 \pm \sqrt{-1} \end{aligned}$$

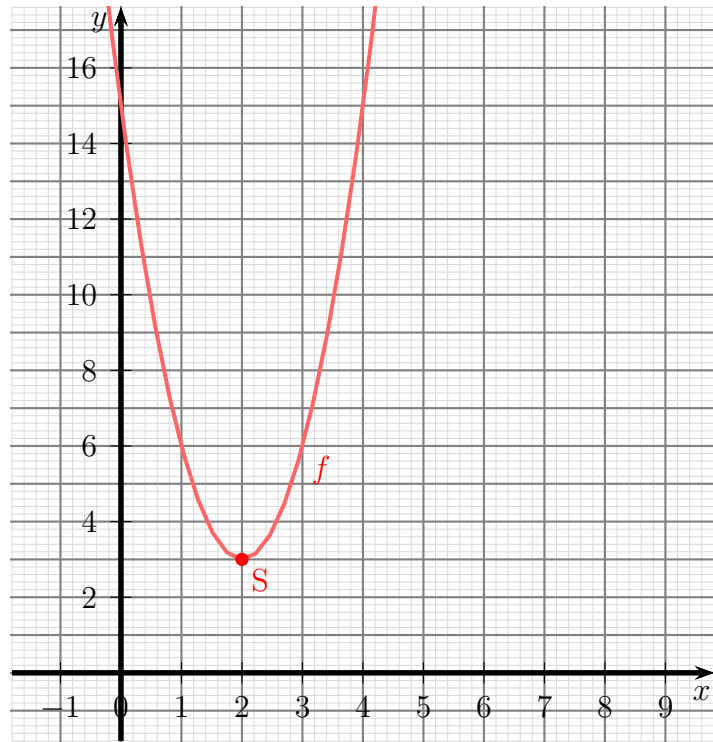
Da es für die Wurzel keine reelle Lösung gibt, gibt es keine Nullstellen. Andererseits kann man an dieser Gleichung schon den x -Wert des Scheitelpunktes ablesen. Es ist immer die Zahl, die vor der Wurzel steht, also $x_S = 2$. Den zugehörigen y -Wert y_S bekommt man durch Einsetzen von x_S in die Funktionsgleichung.

$$\begin{aligned} y_S &= f(x_S) \\ &= 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 15 \\ y_S &= 3 \end{aligned}$$

Der Formfaktor ist mit $a = 3$ positiv, darum ist die Parabel nach oben geöffnet. Das wiederum bedeutet, dass der Scheitelpunkt der tiefste Punkt der Kurve ist. Also lautet der Wertebereich:

$$W = \{y | y \geq 3\}$$

Nachfolgend ist der Verlauf des Funktionsgraphen dargestellt.



5.5 Aufgabe 5:

Bestimmen Sie den Scheitelpunkt, die Nullstellen und den Wertebereich der Quadratischen Funktion $f(x) = -16x^2 - 16x + 5$!

Lösung: An einer Nullstelle ist der Funktionswert = 0. Daher lautet der Ansatz zur Nullstellenbestimmung: $f(x_0) = 0$.

$$\begin{aligned} -16x_0^2 - 16x_0 + 5 &= 0 && | : (-16) \\ x_0^2 + x_0 - \frac{5}{16} &= 0 \\ x_{01/2} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{5}{16}} \\ x_{01/2} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4}{16} + \frac{5}{16}} \\ x_{01/2} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} \\ x_{01/2} &= -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{4} \\ x_{01/2} &= -\frac{2}{4} \pm \frac{3}{4} \\ x_{01} &= \frac{1}{4} \\ x_{02} &= -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

Wie schon bei Aufgabe 4 können wir daraus auch den x -Wert des Scheitelpunktes als die Zahl vor der Wurzel ablesen, also:

$$x_S = -\frac{1}{2}$$

Den zugehörigen y -Wert y_S finden wir wieder durch Einsetzen in die Funktionsgleichung:

$$y_S = f(x_S) = -16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 5 = 9$$

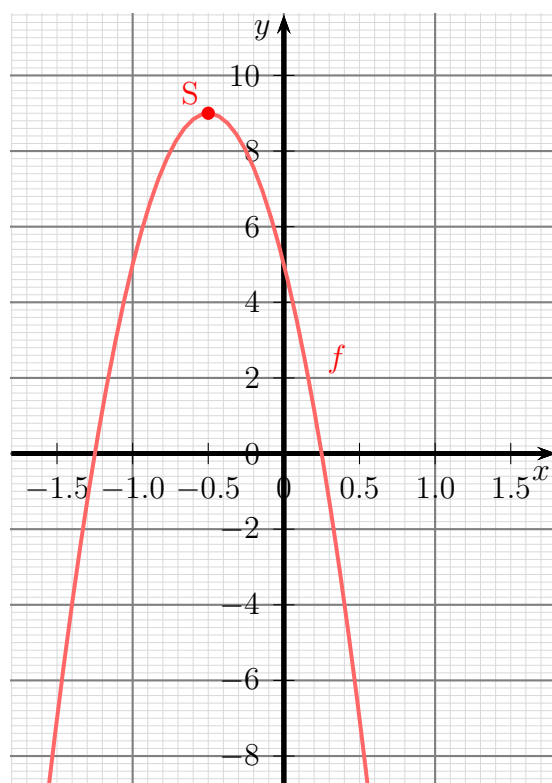
Der Scheitelpunkt lautet demnach:

$$S\left(-\frac{1}{2} | 9\right)$$

Da der Formfaktor mit -16 negativ ist, ist die Parabel nach unten geöffnet. Der Wertebereich liegt also **unterhalb** des Scheitelpunktes:

$$W = \{x | x \leq 9\}$$

Nachfolgend ist der Verlauf des Funktionsgraphen dargestellt.



5.6 Aufgabe 6:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Parabel mit $f_1(x) = 4x^2 - 9x + 1$ und der Geraden mit $f_2(x) = 3x + 17$!

Lösung: Die Schnittpunkte sind ja genau die Punkte beider Kurven, bei denen x - und y -Wert übereinstimmen. Ich kann also zur Schnittpunktbestimmung die Funktionsgleichungen gleichsetzen.

$$\begin{aligned} f_1(x_S) &= f_2(x_S) \\ 4x_S^2 - 9x_S + 1 &= 3x_S + 17 && | - 3x_S - 17 \\ 4x_S^2 - 12x_S - 16 &= 0 && | : 4 \\ x_S^2 - 3x_S - 4 &= 0 \\ x_{S1/2} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} \\ &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \\ &= \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \\ x_{S1} &= \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4 \\ x_{S2} &= \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -1 \end{aligned}$$

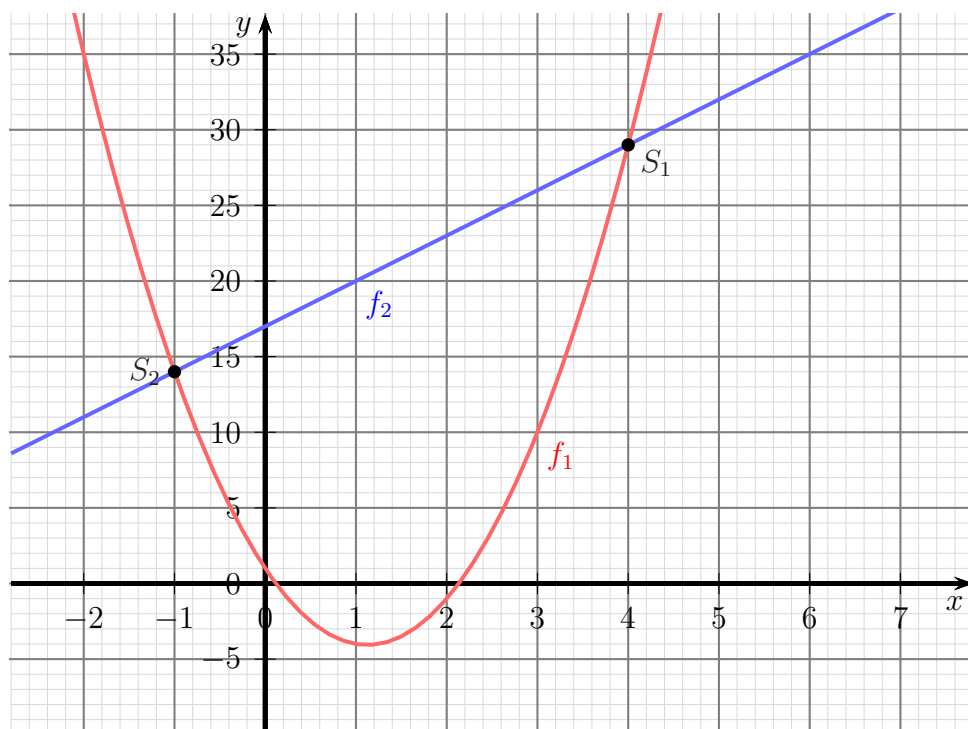
Die zugehörigen y -Werte bekommt man durch Einsetzen in eine der beiden Funktionsgleichungen. Ich wähle dafür f_2 aus, da sie etwas einfacher ist.

$$\begin{aligned} y_S &= f_2(x_S) \\ y_{S1} &= 3x_{S1} + 17 = 3 \cdot 4 + 17 = 29 \\ y_{S2} &= 3x_{S2} + 17 = 3 \cdot (-1) + 17 = 14 \end{aligned}$$

Damit lauten die Schnittpunkte:

$$S_1(4|29) \text{ und } S_2(-1|14)$$

Nachfolgend ist der Verlauf der Funktionsgraphen dargestellt.



5.7 Aufgabe 7:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Parabel mit $f_1(x) = 9x^2 + 12x - 4$ und der Geraden mit $f_2(x) = -12x + 5$!

Lösung: Die Schnittpunkte sind ja genau die Punkte beider Kurven, bei denen x - und y -Wert übereinstimmen. Ich kann also zur Schnittpunktbestimmung die Funktionsgleichungen gleichsetzen.

$$\begin{aligned} f_1(x_S) &= f_2(x_S) \\ 9x_S^2 + 12x_S - 4 &= -12x_S + 5 && | +12x_S - 5 \\ 9x_S^2 + 24x_S - 9 &= 0 && | :9 \\ x_S^2 + \frac{8}{3}x_S - 1 &= 0 \\ x_{S1/2} &= -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{9}{9}} \\ &= -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9}} \\ &= -\frac{4}{3} \pm \frac{5}{3} \\ x_{S1} &= -\frac{4}{3} - \frac{5}{3} = -3 \\ x_{S2} &= -\frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

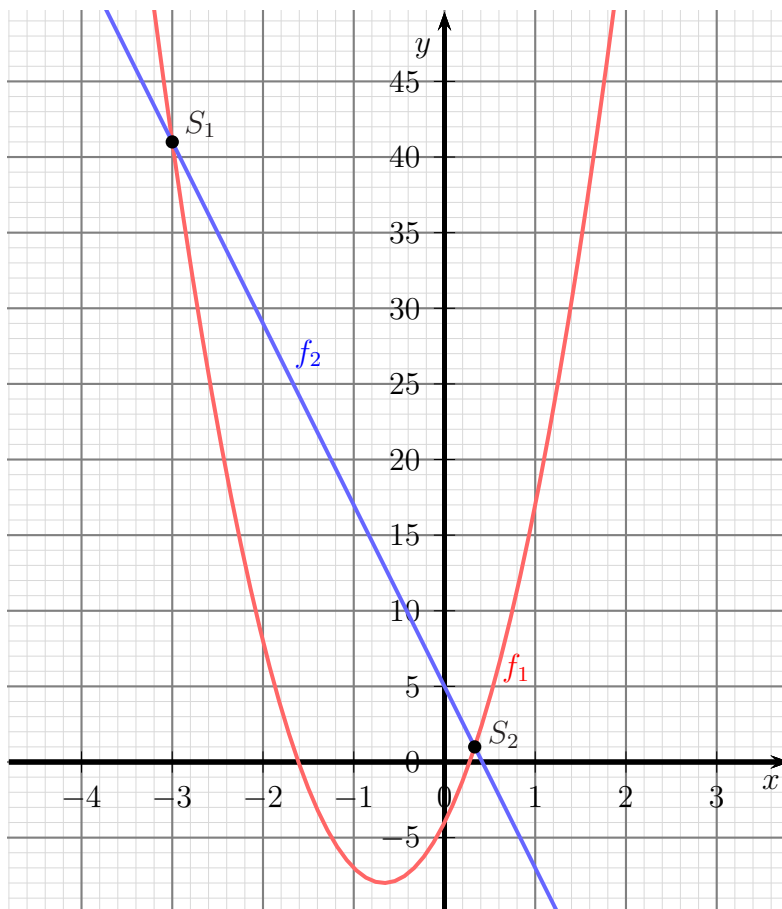
Die zugehörigen y -Werte bekommt man durch Einsetzen in eine der beiden Funktionsgleichungen. Ich wähle dafür f_2 aus, da sie etwas einfacher ist.

$$\begin{aligned} y_S &= f_2(x_S) \\ y_{S1} &= -12x_{S1} + 5 = -12 \cdot (-3) + 5 = 41 \\ y_{S2} &= -12x_{S2} + 5 = -12 \cdot \frac{1}{3} + 5 = 1 \end{aligned}$$

Damit lauten die Schnittpunkte:

$$S_1(-3|41) \text{ und } S_2\left(\frac{1}{3}|1\right)$$

Nachfolgend ist der Verlauf der Funktionsgraphen dargestellt.



5.8 Aufgabe 8:

Gegeben ist die Quadratische Funktion $f(x) = -2x^2 + 5x - 3$. Geben Sie den Scheitelpunkt an und bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$. Welchen Definitionsbereich hat die Umkehrfunktion?

Lösung: Den Scheitelpunkt bekommt man zweckmäßigerweise mit der Scheitelpunktformel.

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2 \cdot (-2)} = \frac{5}{4}$$

$$y_S = f(x_S) = -2x_S^2 + 5x_S - 3 = -2\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 5 \cdot \frac{5}{4} - 3 = \frac{1}{8}$$

$$S\left(\frac{5}{4} \mid \frac{1}{8}\right)$$

Die Umkehrfunktion wird bestimmt, indem man die Rollen von x und y tauscht und die dadurch entstandene Gleichung wieder nach y auflöst.

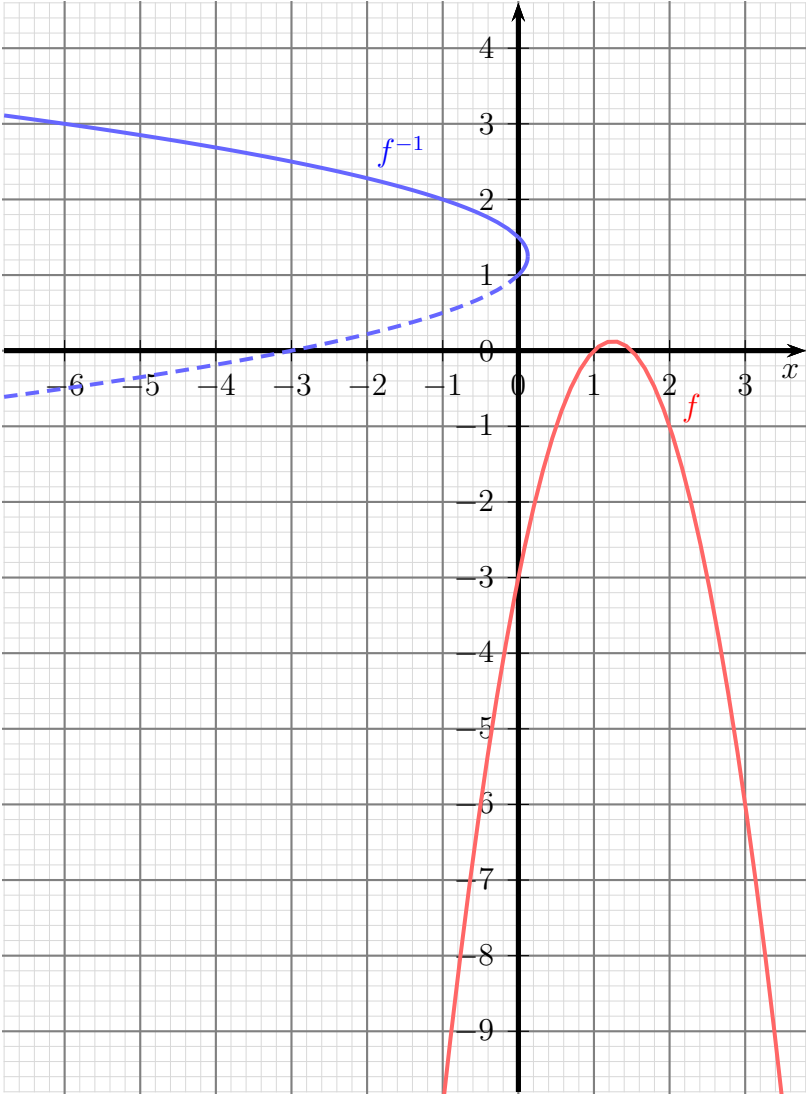
$$\begin{array}{rcl} y & = & -2x^2 + 5x - 3 & | \text{ } x \text{ und } y \text{ tauschen} \\ x & = & -2y^2 + 5y - 3 & | + 2y^2 - 5y + 3 \\ 2y^2 - 5y + 3 + x & = & 0 & | : 2 \\ y^2 - \frac{5}{2}y + \frac{3}{2} + \frac{x}{2} & = & 0 & | \text{ p-q-Formel} \end{array}$$

$$\begin{aligned} y_{1/2} &= \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{24}{16} - \frac{8x}{16}} \\ &= \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{1-8x}{16}} \\ &= \frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{1-8x}}{4} \\ f^{-1}(x) &= \frac{5}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{1-8x} \end{aligned}$$

Der Definitionsbereich wird dadurch eingeschränkt, dass der Wurzelinhalt (Radikand) nicht kleiner als Null werden darf.

$$\begin{array}{rcl} 1 - 8x & \geq & 0 & | - 1 \\ -8x & \geq & -1 & | : (-8) \\ x & \leq & \frac{1}{8} \\ D & = & \left\{ x \mid x \leq \frac{1}{8} \right\} \end{array}$$

Nachfolgend ist der Verlauf der Funktionsgraphen dargestellt.



5.9 Aufgabe 9:

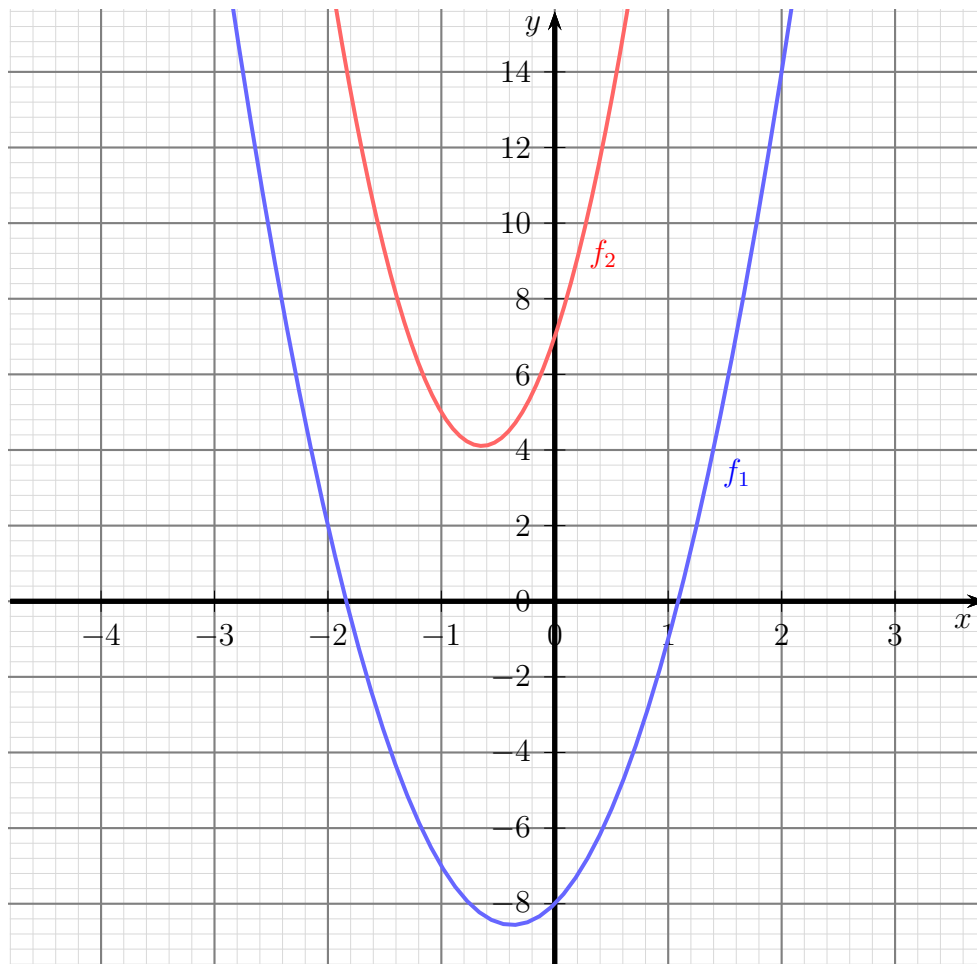
Bestimmen Sie die Schnittpunkte der beiden Parabeln mit den Funktionsgleichungen $f_1(x) = 4x^2 + 3x - 8$ und $f_2(x) = 7x^2 + 9x + 7$.

Lösung: Die Schnittpunkte sind ja genau die Punkte beider Kurven, bei denen x - und y -Wert übereinstimmen. Ich kann also zur Schnittpunktbestimmung die Funktionsgleichungen gleichsetzen.

$$\begin{aligned} 4x_S^2 + 3x_S - 8 &= 7x_S^2 + 9x_S + 7 && | -7x_S^2 - 9x_S - 7 \\ -3x_S^2 - 6x_S - 15 &= 0 && | : (-3) \\ x_S^2 + 2x_S + 5 &= 0 \\ x_{S1/2} &= -1 \pm \sqrt{1 - 5} \\ x_{S1/2} &= -1 \pm \sqrt{-4} \end{aligned}$$

Da diese Wurzel nicht reell zu lösen ist, gibt es **keine Schnittpunkte**.

Nachfolgend ist der Verlauf der Funktionsgraphen dargestellt.



5.10 Aufgabe 10:

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Quadratischen Funktion, deren Graph durch die Punkte $P_1(-1|8)$, $P_2(2|-1)$ und $P_3(4|3)$ verläuft.

Lösung: Zur Lösung gehen wir von der Normalform der Quadratischen Funktion aus. Wenn wir jeweils die Koordinaten eines Punktes einsetzen, dann erhalten wir drei Gleichungen als Lineargleichungssystem, aus denen wir die Parameter a , b und c berechnen können. Die Normalform lautet:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Wir setzen die Koordinaten der drei Punkte ein.

$$\begin{aligned} f(-1) &= 8 &\Rightarrow a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c &= 8 \\ f(2) &= -1 &\Rightarrow a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c &= -1 \\ f(4) &= 3 &\Rightarrow a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c &= 3 \end{aligned}$$

Wenn wir das rechts stehende Lineargleichungssystem zusammenfassen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} a - b + c &= 8 \\ 4a + 2b + c &= -1 \\ 16a + 4b + c &= 3 \end{aligned}$$

Dieses Lineargleichungssystem kann nun mit einem beliebigen Verfahren gelöst werden, also beispielsweise mit dem Einsetzungsverfahren, dem Additions-/Subtraktionsverfahren, der Cramerschen Regel oder dem Gauß-Jordan-Verfahren. Ich verwende hier als Beispiel die Cramersche Regel. Ich bestimme zunächst a :

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{16 - 3 - 4 - 6 - 32 - 1}{2 - 16 + 16 - 32 - 4 + 4} = \frac{-30}{-30} = 1$$

Mit der nun bekannten Nennerdeterminante ist auch b schnell bestimmt:

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 16 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-30} = \frac{-1 + 128 + 12 + 16 - 3 - 32}{-30} = \frac{120}{-30} = -4$$

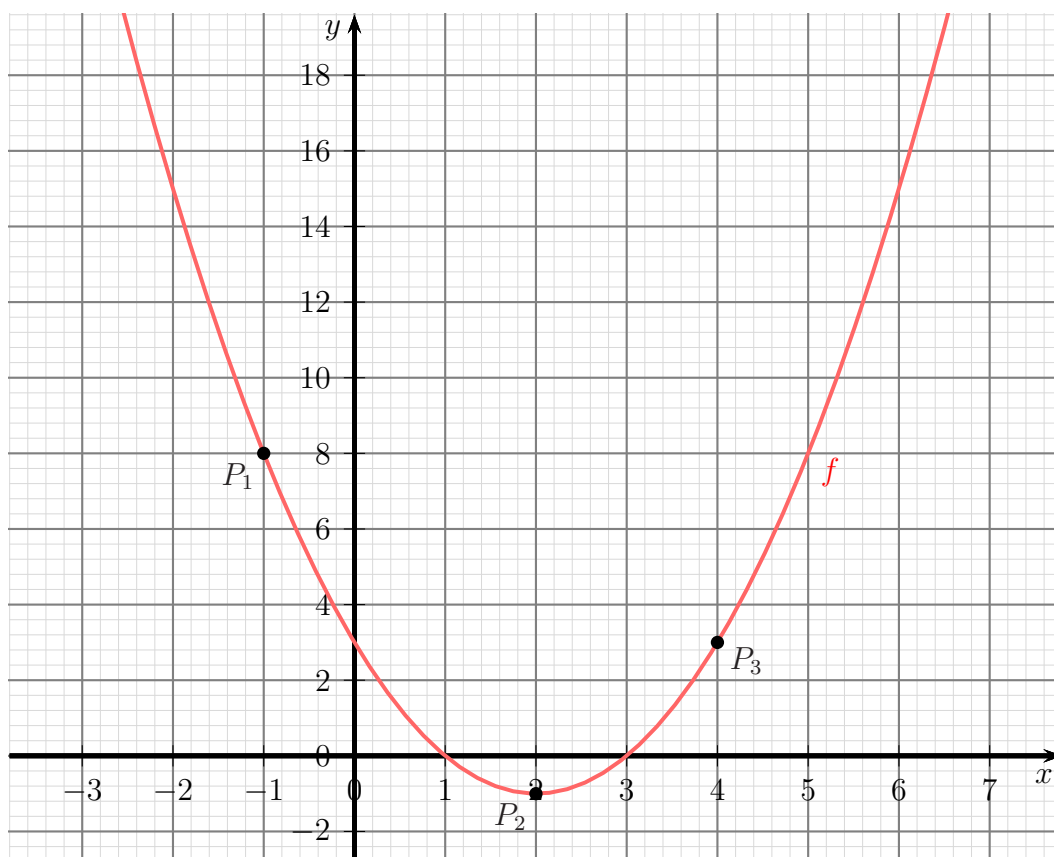
Den Parameter c bestimmt man nun am einfachsten durch Einsetzen der bereits bekannten Parameter in eine der drei Gleichungen. Ich nehme dazu die erste.

$$\begin{aligned} a - b + c &= 8 \\ 1 - (-4) + c &= 8 \\ 5 + c &= 8 \quad | -5 \\ c &= 3 \end{aligned}$$

Setzen wir die Werte in die Ausgangsform ein, erhalten wir die gesuchte Funktionsgleichung.

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

Nachfolgend ist der Verlauf des Funktionsgraphen dargestellt.



5.11 Aufgabe 11:

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Linearen Funktion $f_2(x)$, deren Graph die Parabel der Quadratischen Funktion $f_1(x) = x^2 - 4x + 4$ bei $x_b = 4$ als Tangente berührt.

Lösung: Zunächst einmal können wir von der Normalform der Linearen Funktion ausgehen. Die gesuchte Funktion hat also diese Form:

$$f_2(x) = mx + b$$

Wir müssen nur die beiden Parameter m und b bestimmen. Aus dem x -Wert des Berührungspunktes kann der dazugehörige y -Wert mit $y_b = f_1(x_b)$ berechnet werden.

$$y_b = x_b^2 - 4x_b + 4 = 4^2 - 4 \cdot 4 + 4 = 4$$

Damit können wir die erste von zwei notwendigen Gleichungen aufstellen.

$$f_2(x_b) = y_b \Rightarrow (1) \quad m \cdot 4 + b = 4$$

Die beiden Graphen *berühren* sich, sie *schneiden* sich nicht. Das bedeutet, es gibt nur genau *einen einzigen* gemeinsamen Punkt. Daraus können wir eine weitere Gleichung gewinnen. Wie das geht?

Setzen wir zunächst die beiden Funktionsgleichungen wie zur Schnittpunktbestimmung gleich.

$$\begin{array}{rcl} f_1(x_b) & = & f_2(x_b) \\ x_b^2 - 4x_b + 4 & = & mx_b + b \quad | - mx_b - b \\ x_b^2 - 4x_b - mx_b + 4 - b & = & 0 \quad | x_b \text{ ausklammern} \\ x_b^2 - (4+m)x_b + (4-b) & = & 0 \quad | \text{p-q-Formel} \end{array}$$
$$x_{b1/2} = \frac{4+m}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4+m}{2}\right)^2 - (4-b)}$$

Wann gibt es *genau einen* Schnittpunkt? Das kann doch nur dann der Fall sein, wenn der Wert der Wurzel = 0 ist. Der „Rest“ vor der Wurzel muss demnach unser $x_b = 4$ sein. Das ergibt dann unsere zweite Gleichung.

$$(2) \quad \frac{4+m}{2} = 4$$

Aus dieser Gleichung kann ich sofort m berechnen.

$$\begin{array}{rcl} \frac{4+m}{2} & = & 4 \quad | \cdot 2 \\ 4+m & = & 8 \quad | - 4 \\ m & = & 4 \end{array}$$

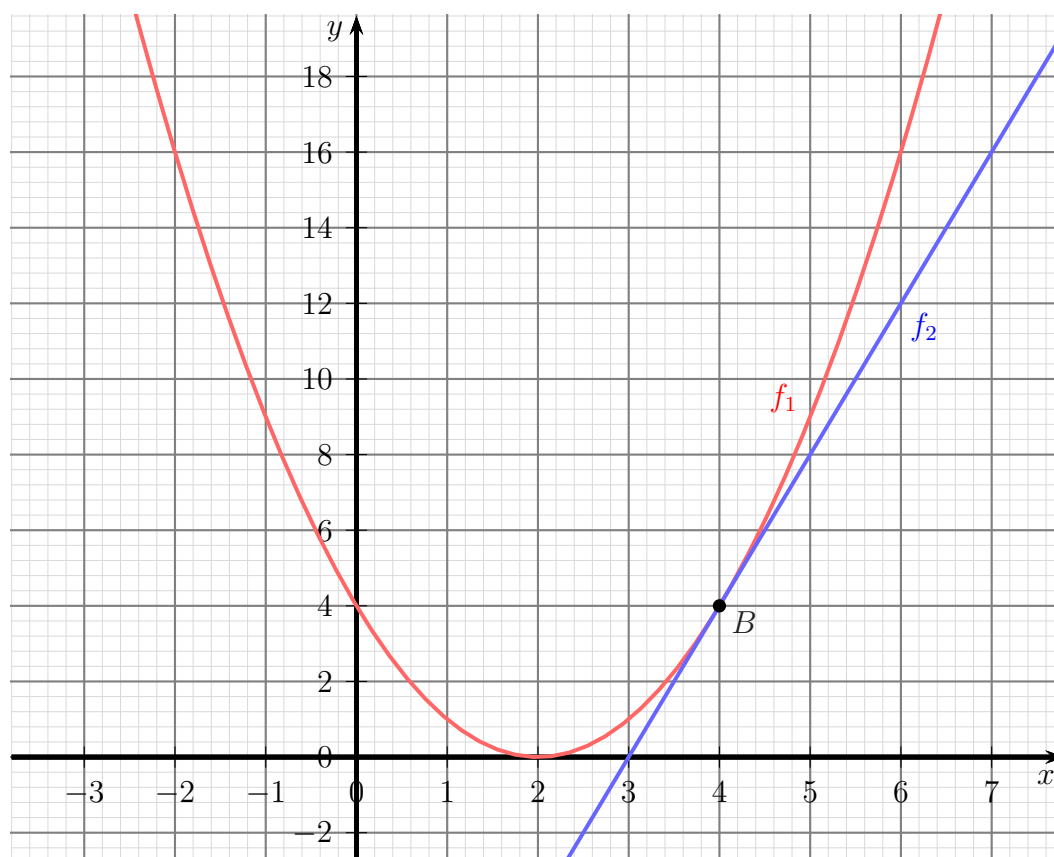
Das setzen wir in Gleichung (1) ein.

$$\begin{aligned} 4m + b &= 4 && | \text{ 4 für } m \text{ einsetzen} \\ 4 \cdot 4 + b &= 4 \\ 16 + b &= 4 && | -16 \\ b &= -12 \end{aligned}$$

Die gesuchte Gleichung lautet also:

$$f_2(x) = 4x - 12$$

Nachfolgend ist der Verlauf der Funktionsgraphen dargestellt.



5.12 Aufgabe 12:

Der Graph der Quadratischen Funktion $f(x)$ hat den Scheitelpunkt $S(3|2)$ und verläuft durch den Punkt $P(5|10)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von $f(x)$!

Lösung: Da der Scheitelpunkt bekannt ist, bietet sich die Scheitelpunktform an. Es muss dann nur noch a berechnet werden.

$$\begin{aligned}f(x) &= a \cdot (x - x_S)^2 + y_S \\f(x) &= a \cdot (x - 3)^2 + 2\end{aligned}$$

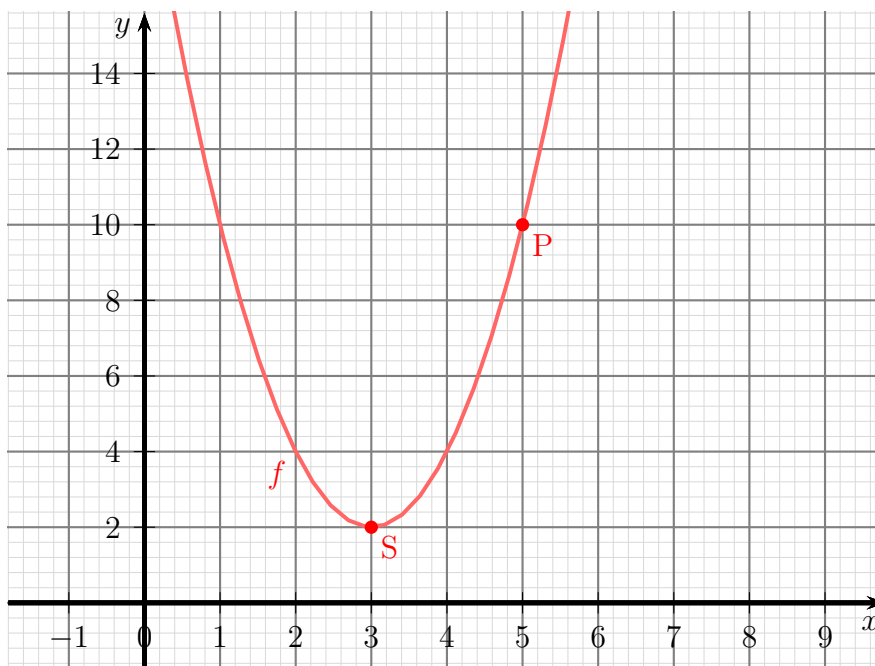
Neben S ist auch noch der Punkt P auf dem Graphen bekannt. Seine Koordinaten müssen auch die Funktionsgleichung erfüllen.

$$\begin{aligned}f(x_P) &= y_P \\a \cdot (x_P - 3)^2 + 2 &= y_P \\a \cdot (5 - 3)^2 + 2 &= 10 \\a \cdot 2^2 + 2 &= 10 \quad | - 2 \\a \cdot 4 &= 8 \quad | : 4 \\a &= 2\end{aligned}$$

Diesen Wert für a setze ich ein und erhalte die gesuchte Funktionsgleichung.

$$\begin{aligned}f(x) &= 2 \cdot (x - 3)^2 + 2 \\&= 2 \cdot (x^2 - 6x + 9) + 2 \\&= 2x^2 - 12x + 18 + 2 \\f(x) &= 2x^2 - 12x + 20\end{aligned}$$

Nachfolgend ist der Verlauf des Funktionsgraphen dargestellt.



5.13 Aufgabe 13:

Bestimmen Sie die Nullstellen und den Scheitelpunkt der Quadratischen Funktion (so weit vorhanden):

$$f(x) = -16x^2 + 24x - 25$$

Lösung: An einer Nullstelle ist der Funktionswert = 0. Daher lautet der Ansatz zur Nullstellenbestimmung: $f(x_0) = 0$.

$$\begin{aligned} -16x_0^2 + 24x_0 - 25 &= 0 && | : (-16) \\ x_0^2 - \frac{3}{2}x_0 + \frac{25}{16} &= 0 \\ x_{01/02} &= \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{25}{16}} \\ x_{01/02} &= \frac{3}{4} \pm \sqrt{-1} \end{aligned}$$

Da es für die Wurzel keine reelle Lösung gibt, gibt es **keine** Nullstellen. Andererseits kann man an dieser Gleichung schon den x -Wert des Scheitelpunktes ablesen. Es ist immer die Zahl, die vor der Wurzel steht, also $x_S = \frac{3}{4}$. Den zugehörigen y -Wert y_S bekommt man durch Einsetzen von x_S in die Funktionsgleichung.

$$\begin{aligned} y_S &= f(x_S) \\ &= -16x_S^2 + 24x_S - 25 \\ &= -16 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 24 \cdot \frac{3}{4} - 25 \\ &= -9 + 18 - 25 \\ y_S &= 16 \end{aligned}$$

Ergebnis: Scheitelpunkt $S\left(\frac{3}{4}|16\right)$

5.14 Aufgabe 14:

Die Quadratische Funktion $f(x)$ hat den Scheitelpunkt $S(4|3)$ und verläuft durch den Punkt $P(6|11)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von $f(x)$!

Lösung: Zur Lösung bietet sich die **Scheitelpunktform** der Quadratischen Funktion an.

$$\begin{aligned}f(x) &= a \cdot (x - x_S)^2 + y_S \\f(x) &= a \cdot (x - 4)^2 + 3\end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Parameters a werden die Koordinaten des Punktes P in die Funktion eingesetzt.

$$\begin{aligned}f(x_P) &= y_P \\f(6) &= 11 \\a \cdot (6 - 4)^2 + 3 &= 11 \\a \cdot 4 + 3 &= 11 \quad | - 3 \\4a &= 8 \quad | : 4 \\a &= 2\end{aligned}$$

Wer mag, kann die Funktion noch aus der Scheitelpunktform in die Normalform umwandeln.

$$f(x) = 2 \cdot (x - 4)^2 + 3 = 2 \cdot (x^2 - 8x + 16) + 3 = 2x^2 - 16x + 32 + 3 = 2x^2 - 16x + 35$$

Die gesuchte Funktion lautet damit: $f(x) = 2 \cdot (x - 4)^2 + 3 = 2x^2 - 16x + 35$

5.15 Aufgabe 15:

Die Quadratische Funktion $f(x)$ verläuft durch die drei Punkte $P_1(-3|32)$, $P_2(-1|10)$ und $P_3(2|7)$. Geben Sie die Funktionsgleichung an!

Lösung:

$$\begin{aligned} (1) \quad f(-3) &= 32 \Rightarrow a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c = 32 \\ (2) \quad f(-1) &= 10 \Rightarrow a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 10 \\ (3) \quad f(2) &= 7 \Rightarrow a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 7 \end{aligned}$$

Wenn wir das rechts stehende Lineargleichungssystem zusammenfassen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} (1) \quad 9a - 3b + c &= 32 \\ (2) \quad a - b + c &= 10 \\ (3) \quad 4a + 2b + c &= 7 \end{aligned}$$

Dieses Lineargleichungssystem kann nun mit einem beliebigen Verfahren gelöst werden, also beispielsweise mit dem Einsetzungsverfahren, dem Additions-/Subtraktionsverfahren, der Cramerschen Regel oder dem Gauß-Jordan-Verfahren. Ich verwende hier als Beispiel die Cramersche Regel. Ich bestimme zunächst a :

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 32 & -3 & 1 \\ 10 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-32 - 21 + 20 + 7 - 64 + 30}{-9 - 12 + 2 + 4 - 18 + 3} = \frac{-60}{-30} = 2$$

Mit der mittlerweile bereits bekannten Nennerdeterminante ist auch b schnell bestimmt:

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 32 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}}{-30} = \frac{90 + 128 + 7 - 40 - 63 - 32}{-30} = \frac{90}{-30} = -3$$

Den Parameter c bestimmt man nun am einfachsten durch Einsetzen der bereits bekannten Parameter in eine der drei Gleichungen. Ich nehme dazu Gleichung (2).

$$\begin{aligned} a - b + c &= 10 \\ 2 + 3 + c &= 10 \quad | -5 \\ c &= 5 \end{aligned}$$

Die gesuchte Funktion lautet damit: $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

5.16 Aufgabe 16:

Eine verschobene Normalparabel (Formfaktor $a = 1$) verläuft durch die Punkte $P_1(-1|-2)$ und $P_2(0|1)$. Geben Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ an!

Lösung: Mit dem bekannten Formfaktor lautet die Funktionsgleichung in Normalform:

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

Die bekannten Punkte können eingesetzt werden.

$$\begin{array}{l} (1) \quad f(-1) = -2 \Rightarrow (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = -2 \\ (2) \quad f(0) = 1 \Rightarrow 0^2 + b \cdot 0 + c = 1 \end{array}$$

Aus Gleichung (2) erhält man sofort:

$$c = 1$$

Das wird in (1) eingesetzt.

$$\begin{array}{r} (-1)^2 + b \cdot (-1) + 1 = -2 \\ 1 - b + 1 = -2 \quad | -2 \\ -b = -4 \quad | \cdot (-1) \\ b = 4 \end{array}$$

Die gesuchte Funktion lautet damit: $f(x) = x^2 + 4x + 1$

5.17 Aufgabe 17:

Eine Parabel (Quadratische Funktion) verläuft durch die drei Punkte $P_1(0|8)$, $P_2(1|3)$ und $P_3(2|0)$. Geben Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ an!

Lösung: Die Koordinaten werden in die Normalform eingesetzt: $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{aligned}(1) \quad f(0) &= 8 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 8 \\(2) \quad f(1) &= 3 \Rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 3 \\(3) \quad f(2) &= 0 \Rightarrow a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 0\end{aligned}$$

Wenn wir das rechts stehende Lineargleichungssystem zusammenfassen, erhalten wir:

$$\begin{aligned}(1) \quad & c = 8 \\(2) \quad & a + b + c = 3 \\(3) \quad & 4a + 2b + c = 0\end{aligned}$$

Dieses Lineargleichungssystem kann nun mit einem beliebigen Verfahren gelöst werden. Es sollte aber auffallen, dass aus (1) bereits der erste Parameter $c = 8$ bekannt ist. Dieser Wert wird vorab in (2) und (3) eingesetzt, die Gleichungen werden vereinfacht.

$$\begin{aligned}(2) \quad & a + b + 8 = 3 \quad | -8 \\(2) \quad & a + b = -5 \\(3) \quad & 4a + 2b + 8 = 0 \quad | -8 \\(3) \quad & 4a + 2b = -8\end{aligned}$$

Zusammengefasst bleibt ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung übrig:

$$\boxed{\begin{aligned}(2) \quad & a + b = -5 \\(3) \quad & 4a + 2b = -8\end{aligned}}$$

Gleichung (2) lässt sich bequem für die Anwendung des Einsetzungsverfahrens nach a oder b umstellen. Ich stelle sie nach a um.

$$\begin{aligned}a + b &= -5 \quad | -b \\a &= -5 - b\end{aligned}$$

Einsetzen in (3):

$$\begin{aligned}4a + 2b &= -8 \\4 \cdot (-5 - b) + 2b &= -8 \\-20 - 4b + 2b &= -8 \quad | +20 \\-2b &= 12 \quad | :(-2) \\b &= -6\end{aligned}$$

Mit der umgestellten Gleichung (2) erhalten wir sofort a .

$$a = -5 - b = -5 - (-6) = -5 + 6 = 1$$

Mit diesen Ergebnissen lautet die gesuchte Funktion: $f(x) = x^2 - 6x + 8$

5.18 Aufgabe 18:

Eine Parabel (Quadratische Funktion) hat den Scheitelpunkt $S(-2|0)$ und verläuft durch den Punkt $P(-1|-2)$. Geben Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ an!

Lösung: Da der Scheitelpunkt bekannt ist, bietet sich die Scheitelpunktform an. Es muss dann nur noch a berechnet werden.

$$\begin{aligned}f(x) &= a \cdot (x - x_S)^2 + y_S \\f(x) &= a \cdot (x + 2)^2 + 0\end{aligned}$$

Neben S ist auch noch der Punkt P auf dem Graphen bekannt. Seine Koordinaten müssen auch die Funktionsgleichung erfüllen.

$$\begin{aligned}f(x_p) &= y_p \\a \cdot (x_p + 2)^2 &= y_p \\a \cdot (-1 + 2)^2 &= -2 \\a \cdot 1^2 &= -2 \\a &= -2\end{aligned}$$

Diesen Wert für a setze ich ein und erhalte die gesuchte Funktionsgleichung.

$$f(x) = -2 \cdot (x + 2)^2$$

Wer mag, kann die Funktionsgleichung noch in die Normalform umwandeln.

$$f(x) = -2x^2 - 8x - 8$$

Die gesuchte Funktion lautet: $f(x) = -2 \cdot (x + 2)^2$ oder $f(x) = -2x^2 - 8x - 8$

5.19 Aufgabe 19:

Verschieben Sie die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = \frac{1}{2}(x - 4)^2 - 1$ so nach **oben**, dass die neue Parabel durch den Punkt $P(2|3)$ verläuft. Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung $f_2(x)$ an!

Lösung: Für eine vertikale Verschiebung muss lediglich ein Parameter (ich nenne ihn k) addiert werden.

$$f_2(x) = \frac{1}{2}(x - 4)^2 - 1 + k$$

Damit der Punkt P auf der Parabel liegt, müssen seine Koordinaten die Funktionsgleichung erfüllen.

$$\begin{aligned} f_2(x_P) &= y_P \\ f_2(2) &= 3 \\ \frac{1}{2} \cdot (2 - 4)^2 - 1 + k &= 3 \\ \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - 1 + k &= 3 \\ \frac{1}{2} \cdot 4 - 1 + k &= 3 \\ 2 - 1 + k &= 3 \quad | -1 \\ k &= 2 \end{aligned}$$

Der Wert wird für k eingesetzt.

$$f_2(x) = \frac{1}{2}(x - 4)^2 - 1 + 2 = \frac{1}{2}(x - 4)^2 + 1$$

Wer mag, kann die Funktionsgleichung noch in die Normalform umwandeln:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{1}{2}(x - 4)^2 + 1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 8x + 16) + 1 \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 + 1 \\ f_2(x) &= \frac{1}{2}x^2 - 4x + 9 \end{aligned}$$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet:

$$f_2(x) = \frac{1}{2}(x - 4)^2 + 1 \quad \text{oder:} \quad f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 9$$

5.20 Aufgabe 20:

Verschieben Sie die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 7$ so nach **links**, dass die neue Parabel durch den Punkt $P(0|\frac{7}{2})$ verläuft. Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung $f_2(x)$ an! (Geben Sie **alle** Lösungen an!)

Lösung: Eine **Rechts**verschiebung um k bedeutet, dass anstelle der Variablen x ein $(x - k)$ eingesetzt wird. Entsprechend bedeutet ein im Ergebnis **negatives** k dann eine **Links**verschiebung. Wünscht man ein **positives** k , dann kann auch $(x + k)$ für eine **Links**verschiebung eingesetzt werden. Ich verwende in meiner Musterlösung die erste Möglichkeit.

$$\begin{aligned}f_2(x) &= f_1(x - k) \\f_2(x) &= \frac{1}{2} \cdot (x - k)^2 - 4(x - k) + 7\end{aligned}$$

Jetzt werden für x und y die Koordinaten des Punktes P eingesetzt. Damit kann k bestimmt werden.

$$\begin{aligned}f_2(0) &= \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \cdot (0 - k)^2 - 4 \cdot (0 - k) + 7 &= \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \cdot k^2 + 4k + 7 &= \frac{7}{2} && | \cdot 2 \\ k^2 + 8k + 14 &= 7 && | - 7 \\ k^2 + 8k + 7 &= 0 \\ k_{1/2} &= -4 \pm \sqrt{4^2 - 7} \\ k_{1/2} &= -4 \pm 3 \\ k_1 &= -1 && k_2 = -7\end{aligned}$$

Da beide Werte **negativ** sind, handelt es sich in beiden Fällen um eine **Links**verschiebung. Beide Lösungen sind also gültig. Die Werte werden für k eingesetzt.

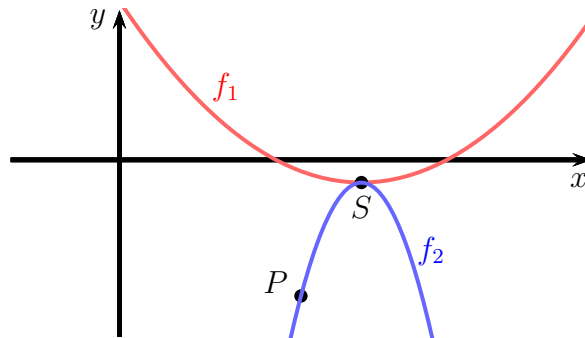
$$\begin{aligned}f_{21} &= \frac{1}{2} \cdot (x + 1)^2 - 4 \cdot (x + 1) + 7 && f_{22} = \frac{1}{2} \cdot (x + 7)^2 - 4 \cdot (x + 7) + 7 \\ f_{21} &= \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 2x + 1) - 4x - 4 + 7 && f_{22} = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 14x + 49) - 4x - 28 + 7 \\ f_{21} &= \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} - 4x + 3 && f_{22} = \frac{1}{2}x^2 + 7x + \frac{49}{2} - 4x - 21 \\ f_{21} &= \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{7}{2} && f_{22} = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{7}{2}\end{aligned}$$

Ergebnis: $f_{21} = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{7}{2}$ oder: $f_{22} = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{7}{2}$

5.21 Aufgabe 21:

Wie ist die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 7$ zu verändern, damit bei **gleichem Scheitelpunkt** der Punkt $P(3|-6)$ zur neuen Parabel gehört. Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung $f_2(x)$ an!

Lösung: Damit man sich die Zusammenhänge besser vorstellen kann, ist hier eine Skizze der beiden Funktionsgraphen dargestellt.



Zunächst muss der (gemeinsame) Scheitelpunkt bestimmt werden. Dies kann entweder mit der Mitte zwischen den Nullstellen von f_1 oder einfacher mit der Scheitelpunkt-Formel geschehen:¹⁰

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad x_S = -\frac{b}{2a}$$

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 4$$

$$y_S = f(x_S) = \frac{1}{2} \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 + 7 = -1$$

Mit bekanntem Scheitelpunkt kann die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform aufgestellt werden.

$$f_2(x) = a \cdot (x - 4)^2 - 1$$

Zur Bestimmung des Parameters a werden die Koordinaten des Punktes P in die Funktionsgleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned} f_2(3) &= -6 \\ a \cdot (3 - 4)^2 - 1 &= -6 \\ a \cdot (-1)^2 - 1 &= -6 \\ a - 1 &= -6 \quad | +1 \\ a &= -5 \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung kann angegeben werden:

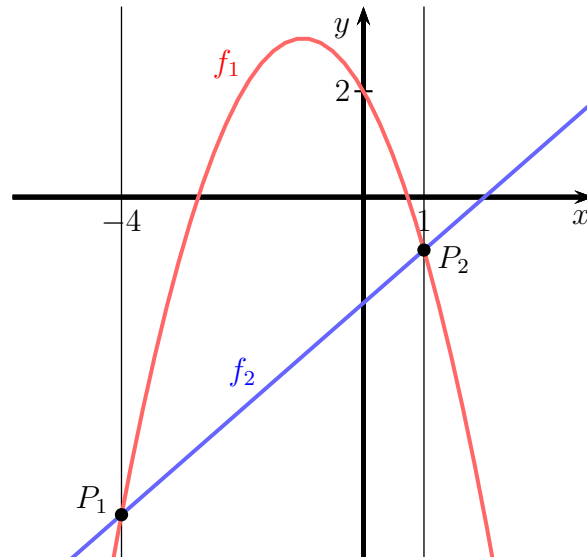
$$f_2(x) = -5 \cdot (x - 4)^2 - 1$$

¹⁰Siehe Kapitel 2.2

5.22 Aufgabe 22:

Die Parabel der Quadratischen Funktion $f_1(x)$ schneidet die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = x - 2$ bei $x_1 = -4$ und $x_2 = 1$. Die Parabel schneidet die y -Achse bei $y_0 = 2$. Geben Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ an!

Lösung: Damit man sich die Zusammenhänge besser vorstellen kann, ist hier eine Skizze der Funktionsgraphen dargestellt.



Zunächst werden die y -Werte der Schnittpunkte P_1 und P_2 bestimmt. Dazu werden die x -Werte in f_2 eingesetzt.

$$\begin{aligned} y_1 &= f_2(x_1) & y_2 &= f_2(x_2) \\ y_1 &= -4 - 2 & y_2 &= 1 - 2 \\ y_1 &= -6 & y_2 &= -1 \end{aligned}$$

Damit lauten die Schnittpunkte $P_1(-4 | -6)$ und $P_2(1 | -1)$. Der Schnittpunkt mit der y -Achse liegt bei $x = 0$, damit heist dieser Punkt $P_3(0 | 2)$. Mit drei bekannten Punkten kann ein Linearsystem aufgestellt werden, wenn man von der Normalform der Quadratischen Funktion ausgeht:

$$f_2(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{aligned} (1) \quad f(-4) &= -6 \Rightarrow a \cdot (-4)^2 + b \cdot (-4) + c = -6 \\ (2) \quad f(1) &= -1 \Rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = -1 \\ (3) \quad f(0) &= 2 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 2 \end{aligned}$$

Wenn wir das rechts stehende Linearsystem zusammenfassen, erhalten wir:

(1)	$16a$	$-4b$	$+c$	$= -6$
(2)	a	$+b$	$+c$	$= -1$
(3)			c	$= 2$

Da aus (3) sofort das Ergebnis für c bekannt ist, kann der Wert in beide anderen Gleichungen eingesetzt werden. Übrig bleibt ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung.

$$\begin{array}{rcl}
 (1) & 16a - 4b + 2 & = -6 \quad | - 2 \\
 (2) & a + b + 2 & = -1 \quad | - 2 \\
 \hline
 (1) & 16a - 4b & = -8 \\
 (2) & a + b & = -3
 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem kann mit einem beliebigen Verfahren gelöst werden. Beispielsweise kann zum Einsetzungsverfahren (2) nach a aufgelöst und in (1) eingesetzt werden.

$$\begin{array}{rcl}
 a + b & = & -3 \quad | - b \\
 a & = & -3 - b
 \end{array}$$

Einsetzen in (1):

$$\begin{array}{rcl}
 16a - 4b & = & -8 \\
 16 \cdot (-3 - b) - 4b & = & -8 \\
 -48 - 16b - 4b & = & -8 \quad | + 48 \\
 -20b & = & 40 \quad | : (-20) \\
 b & = & -2
 \end{array}$$

Dieses Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (1) eingesetzt.

$$a = -3 - b = -3 - (-2) = -1$$

Jetzt sind alle Parameter bekannt. Die Funktionsgleichung kann angegeben werden.

$$f_2(x) = -x^2 - 2x + 2$$

5.23 Aufgabe 23:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte – falls vorhanden – der beiden Parabeln mit den Funktionsgleichungen $f_1(x) = x^2 - 2x + 3$ und $f_2(x) = 2x^2 - 8x + 12$.

Lösung: Zur Schnittpunktbestimmung werden die Funktionsterme gleichgesetzt.

$$\begin{aligned} f_1(x_S) &= f_2(x_S) \\ x_S^2 - 2x_S + 3 &= 2x_S^2 - 8x_S + 12 && | -2x_S^2 + 8x_S - 12 \\ -x_S^2 + 6x_S - 9 &= 0 && | \cdot (-1) \\ x_S^2 - 6x_S + 9 &= 0 \\ x_{S1/2} &= 3 \pm \sqrt{9 - 9} \\ x_S &= 3 \end{aligned}$$

Es gibt nur ein Ergebnis, also auch nur einen einzigen Schnittpunkt. Zur Bestimmung des y -Wertes wird dieser x_S -Wert in f_1 oder in f_2 eingesetzt. Ich wähle dazu f_1 , weil die Zahlen etwas kleiner sind.

$$\begin{aligned} y_S &= f_1(x_S) \\ &= x_S^2 - 2x_S + 3 \\ &= 3^2 - 2 \cdot 3 + 3 \\ y_S &= 6 \end{aligned}$$

Hiermit kann der Schnittpunkt angegeben werden: $S(3|6)$

5.24 Aufgabe 24:

Eine Parabel mit dem Formfaktor $a = 2$ verläuft durch die Punkte $P_1(1|-1)$ und $P_2(2|1)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$!

Lösung: Die Normalform der Quadratischen Funktion lautet:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Da a mit $a = 2$ bekannt ist, erhalten wir diese Form:

$$f(x) = 2x^2 + bx + c$$

Jetzt müssen nur noch die Parameter b und c berechnet werden. Dazu werden die Koordinaten der bekannten Punkte für x und y eingesetzt.

$$\begin{array}{l} P_1(1|-1) \Rightarrow f(1) = -1 \Rightarrow 2 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = -1 \\ P_2(2|1) \Rightarrow f(2) = 1 \Rightarrow 2 \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 1 \end{array}$$

Die beiden dabei entstandenen Gleichungen werden zunächst vereinfacht und in die Normalform gebracht.

$$\begin{array}{r} (1) \quad 2 + b + c = -1 \quad | -2 \\ (2) \quad 8 + 2b + c = 1 \quad | -8 \\ \hline (1) \quad \quad b + c = -3 \\ (2) \quad \quad 2b + c = -7 \end{array}$$

Jetzt haben wir ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung erhalten, das man mit einem beliebigen Verfahren lösen kann. Weil in beiden Gleichungen c ohne Vorzahl vorkommt, bietet es sich an, die Gleichungen voneinander zu subtrahieren. Dabei fällt dann c weg. Weil die Vorzahl von b in Gleichung (2) – hier: $2b$ – größer, als die in Gleichung (1) – hier: $1b$ – ist, subtrahiere ich Gleichung (1) von Gleichung (2). Dann bleibt mir ein **positives** Ergebnis. (Natürlich geht es auch anders herum, dann erhält man halt $-b$.)

$$\begin{array}{r} (1) \quad b + c = -3 \quad | - \\ (2) \quad 2b + c = -7 \quad | \\ \hline (2) - (1) \quad b = -4 \end{array}$$

Damit haben wir bereits b . Um den noch verbleibenden Parameter c zu berechnen, wird das Ergebnis in eine beliebige der beiden Gleichungen eingesetzt. Weil in Gleichung (1) die Zahlen kleiner sind, verwende ich diese.

$$\begin{array}{r} b + c = -3 \\ -4 + c = -3 \quad | +4 \\ \hline c = 1 \end{array}$$

Damit kann die Funktionsgleichung angegeben werden:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 1$$

5.25 Aufgabe 25:

Eine Parabel verläuft durch die Punkte $P_1(2|7)$ und $P_2(3|6)$ und schneidet die y -Achse bei $y_0 = 3$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$!

Lösung: Die Normalform der Quadratischen Funktion lautet:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Der y -Achsenabschnitt bei $y_0 = 3$ bedeutet $c = y_0 = 3$. Damit erhalten wir diese Form:

$$f(x) = ax^2 + bx + 3$$

Jetzt müssen nur noch die Parameter a und b berechnet werden. Dazu werden die Koordinaten der bekannten Punkte für x und y eingesetzt.

$$\begin{aligned} P_1(2|7) &\Rightarrow f(2) = 7 \Rightarrow a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 3 = 7 \\ P_2(3|6) &\Rightarrow f(3) = 6 \Rightarrow a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 3 = 6 \end{aligned}$$

Die beiden dabei entstandenen Gleichungen werden zunächst vereinfacht und in die Normalform gebracht.

$$\begin{array}{r} (1) \quad 4a + 2b + 3 = 7 \quad | -3 \\ (2) \quad 9a + 3b + 3 = 6 \quad | -3 \\ \hline (1) \quad 4a + 2b = 4 \\ (2) \quad 9a + 3b = 3 \end{array}$$

Jetzt haben wir ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung erhalten, das man mit einem beliebigen Verfahren lösen kann. Weil keine Vorzeichen in den Gleichungen übereinstimmen, bietet sich kein Lösungsverfahren besonders an. Ich verwende willkürlich das **Einsetzungsverfahren**. Dazu löse ich Gleichung (1) nach b auf.

$$\begin{array}{r} (1) \quad 4a + 2b = 4 \quad | -4a \\ \quad \quad 2b = 4 - 4a \quad | :2 \\ \quad \quad b = 2 - 2a \end{array}$$

Der Ergebnisterm wird in Gleichung (2) eingesetzt.

$$\begin{array}{r} (2) \quad 9a + 3b = 3 \\ \quad 9a + 3 \cdot (2 - 2a) = 3 \\ \quad 9a + 6 - 6a = 3 \quad | -6 \\ \quad 3a = -3 \quad | :3 \\ \quad a = -1 \end{array}$$

Um den noch fehlenden Parameter b zu ermitteln, wird der gefundene Wert in die schon passend umgestellte Gleichung (1) eingesetzt.

$$b = 2 - 2a = 2 - 2 \cdot (-1) = 2 + 2 = 4$$

Damit erhalten wir die gesuchte Funktionsgleichung:

$$f(x) = -x^2 + 4x + 3$$

5.26 Aufgabe 26:

Verschieben Sie die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = 3x^2 - 4$ so, dass sie durch die Punkte $P_1(3|2)$ und $P_2(6|-7)$ verläuft. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_2(x)$ der so entstandenen Funktion.

Lösung: Das Einzige, was sich beim Verschieben nicht ändert, ist die Form der Parabel und somit der Formfaktor a . In f_1 kann man a ablesen mit $a = 3$. Die gesuchte Funktionsgleichung hat damit diese Form:

$$f_2(x) = 3x^2 + bx + c$$

$$\begin{aligned} P_1(3|2) &\Rightarrow f(3) = 2 \Rightarrow 3 \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 2 \\ P_2(6|-7) &\Rightarrow f(6) = -7 \Rightarrow 3 \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c = -7 \end{aligned}$$

Die beiden dabei entstandenen Gleichungen werden zunächst vereinfacht und in die Normalform gebracht.

$$\begin{array}{r} (1) \quad 27 + 3b + c = 2 \quad | -27 \\ (2) \quad 108 + 6b + c = -7 \quad | -108 \\ \hline (1) \quad \quad 3b + c = -25 \\ (2) \quad \quad 6b + c = -115 \end{array}$$

Jetzt haben wir ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung erhalten, das man mit einem beliebigen Verfahren lösen kann. Weil in beiden Gleichungen c ohne Vorzahl vorkommt, bietet es sich an, die Gleichungen voneinander zu subtrahieren. Dabei fällt dann c weg. Weil die Vorzahl von b in Gleichung (2) – hier: $6b$ – größer, als die in Gleichung (1) – hier: $3b$ – ist, subtrahiere ich Gleichung (1) von Gleichung (2). Dann bleibt mir ein **positives** Ergebnis. (Natürlich geht es auch anders herum, dann erhält man halt einen negativen Wert mit b .)

$$\begin{array}{r} (1) \quad 3b + c = -25 \quad | - \\ (2) \quad 6b + c = -115 \quad | \\ \hline (2) - (1) \quad 3b \quad = -90 \quad | :3 \\ \quad \quad \quad b \quad = -30 \end{array}$$

Damit haben wir bereits b . Um den noch verbleibenden Parameter c zu berechnen, wird das Ergebnis in eine beliebige der beiden Gleichungen eingesetzt. Weil in Gleichung (1) die Zahlen kleiner sind, verwende ich diese.

$$\begin{aligned} 3b + c &= -20 \\ 3 \cdot (-30) + c &= -25 \\ -90 + c &= -25 \quad | +90 \\ c &= 65 \end{aligned}$$

Damit kann die Funktionsgleichung angegeben werden:

$$f(x) = 3x^2 - 30x + 65$$

5.27 Aufgabe 27:

Eine Quadratische Funktion hat den Formfaktor $a = -1$ und den Scheitelpunkt $S(2|3)$. Geben Sie die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform und in Normalform an!

Lösung: Die Lösung in Scheitelpunktform kann sofort aufgeschrieben werden:

$$f(x) = -(x - 2)^2 + 3$$

Die Umformung in die Normalform erfolgt schrittweise mit der 2. Binomischen Formel.

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x - 2)^2 + 3 \\ &= -(x^2 - 4x + 4) + 3 \\ &= -x^2 + 4x - 4 + 3 \\ f(x) &= -x^2 - 4x - 1 \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung in Normalform lautet:

$$f(x) = -x^2 - 4x - 1$$

5.28 Aufgabe 28:

Der Funktionsgraph einer Quadratischen Funktion mit dem Scheitelpunkt $S(3|-1)$ verläuft durch den Punkt $P(1|7)$. Geben Sie die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform und in Normalform an!

Lösung: Zunächst wird der Ansatz in Scheitelpunktform gemacht.

$$f(x) = a \cdot (x - 3)^2 - 1$$

Um den noch unbekanntem Formfaktor a zu bestimmen, werden die Koordinaten des bekannten Punktes $P(1|7)$ eingesetzt.

$$\begin{aligned} f(x_p) &= y_p \\ a \cdot (x_p - 3)^2 - 1 &= y_p \\ a \cdot (1 - 3)^2 - 1 &= 7 \\ a \cdot (-2)^2 - 1 &= 7 \\ 4a - 1 &= 7 & | +1 \\ 4a &= 8 & | :4 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Hiermit kann die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform angegeben werden.

$$f(x) = 2 \cdot (x - 3)^2 - 1$$

Nun kann die Funktionsgleichung mit Hilfe der 2. Binomischen Formel in die Normalform umgeformt werden.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \cdot (x - 3)^2 - 1 \\ &= 2 \cdot (x^2 - 6x + 9) - 1 \\ &= 2x^2 - 12x + 18 - 1 \\ f(x) &= 2x^2 - 12x + 17 \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung in Normalform lautet:

$$f(x) = 2x^2 - 12x + 17$$

5.29 Aufgabe 29:

Gegeben ist eine Quadratische Funktion mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = -2x^2 - 4x + 6$$

Berechnen Sie den Scheitelpunkt und die Nullstellen.

Lösung: Der x -Wert des Scheitelpunktes x_S kann über die Scheitelpunktformel bestimmt werden.

$$\begin{aligned}x_S &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{-4}{2 \cdot (-2)} \\ &= \frac{4}{-4} \\ x_S &= -1\end{aligned}$$

Den zugehörigen y -Wert y_S liefert die Funktionsgleichung.

$$\begin{aligned}y_S &= f(x_S) \\ &= -2x_S^2 - 4x_S + 6 \\ &= -2 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 6 \\ &= -2 + 4 + 6 \\ y_S &= 8\end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt lautet: $S(-1|8)$

Zum Berechnen der Nullstellen muss der Funktionsterm gleich Null gesetzt werden.

$$\begin{aligned}-2x_0^2 - 4x_0 + 6 &= 0 && | : (-2) \\ x_0^2 + 2x_0 - 3 &= 0 && | p-q\text{-Formel anwenden} \\ x_{01/02} &= -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-3)} \\ &= -1 \pm \sqrt{1 + 3} \\ &= -1 \pm 2 \\ x_{01} &= -1 + 2 = 1 && x_{02} = -1 - 2 = -3\end{aligned}$$

Die Nullstellen lauten $x_{01} = 1$ und $x_{02} = -3$

5.30 Aufgabe 30:

Eine Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(4|7)$ schneidet die y -Achse bei $y_0 = 3$. Bestimmen Sie die zugehörige Funktionsgleichung!

Lösung: Der Ansatz kann mit Hilfe der Scheitelpunktform gemacht werden.

$$f(x) = a \cdot (x - 4)^2 + 7$$

Um den noch fehlenden Formfaktor a zu bestimmen, gibt es zwei Möglichkeiten.

Lösungsvariante 1: Die y -Achse liegt an der Stelle $x = 0$. Damit sind Koordinaten des Schnittpunktes mit $(0|y_0)$ bzw. $(0|3)$ bekannt und können in die Gleichung in Scheitelpunktform eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} f(0) &= 3 \\ a \cdot (0 - 4)^2 + 7 &= 3 \\ a \cdot 16 + 7 &= 3 & | - 7 \\ 16a &= -4 & | : 16 \\ a &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Da die Form der Funktionsgleichung nicht vorgegeben ist, reicht die Angabe in der Scheitelpunktform:

$$f(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x - 4)^2 + 7$$

Lösungsvariante 2: Man kann auch den Ansatz in der Scheitelpunktform machen, diese in die Normalform umwandeln und dort den y -Achsenabschnitt als absolutes Glied c ablesen. Das sieht dann so aus:

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot (x - 4)^2 + 7 \\ &= a \cdot (x^2 - 8x + 16) + 7 \\ f(x) &= ax^2 - 8ax + \underbrace{16a + 7}_c \end{aligned}$$

Da der y -Achsenabschnitt mit $y_0 = 3$ bekannt ist, kann dieser mit c gleichgesetzt werden.

$$\begin{aligned} c &= y_0 \\ 16a + 7 &= 3 & | - 7 \\ 16a &= -4 & | : 16 \\ a &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Auch so erhalten wir die Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform:

$$f(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x - 4)^2 + 7$$

5.31 Aufgabe 31:

Gegeben ist die Quadratische Funktion mit der Funktionsgleichung:

$$f_1(x) = 3x^2 + 24x + 53$$

Gesucht ist die Funktion f_2 , deren Funktionsgraph den selben Scheitelpunkt hat wie f_1 . Der Funktionsgraph von f_2 verläuft außerdem durch den Punkt $P(-2 | -3)$.

Lösung: Zunächst muss der Scheitelpunkt von f_1 bestimmt werden. Dazu beginnen wir mit x_S .

$$\begin{aligned}x_S &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{24}{2 \cdot 3} \\ x_S &= -4\end{aligned}$$

Den zugehörigen y -Wert liefert die Funktionsgleichung von f_1 .

$$\begin{aligned}y_S &= f_1(x_S) \\ &= 3x_S^2 + 24x_S + 53 \\ &= 3 \cdot (-4)^2 + 24 \cdot (-4) + 53 \\ &= 48 - 96 + 53 \\ y_S &= 5\end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt der Funktion f_1 – und damit auch von f_2 – lautet: $S(-4|5)$

Hiermit kann die Funktionsgleichung von f_2 in der Scheitelpunktform aufgestellt werden.

$$f_2(x) = a \cdot (x + 4)^2 + 5$$

Um nun den Formfaktor a zu bestimmen, werden die Koordinaten des gegebenen Punktes $P(-2 | -3)$ in diese Gleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned}f_2(-2) &= -3 \\ a \cdot (-2 + 4)^2 + 5 &= -3 \quad | -5 \\ a \cdot 2^2 &= -8 \\ 4a &= -8 \quad | :4 \\ a &= -2\end{aligned}$$

Hiermit kann die Funktionsgleichung von f_2 angegeben werden:

$$f(x) = -2 \cdot (x + 4)^2 + 5$$

5.32 Aufgabe 32:

Eine Parabel verläuft durch die Punkte $P_1(0|14)$ und $P_2(2|-2)$. Der Scheitelpunkt liegt an der Stelle $x_S = 3$. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung?

Lösung: Mit dem Scheitelpunkt $S(3|y_S)$ kann der Ansatz der Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform gemacht werden.

$$f(x) = a \cdot (x - 3)^2 + y_S$$

In diese Funktionsgleichung können die Koordinaten beider Punkte eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} P_1(0|3) : f(0) = 3 &\Rightarrow a \cdot (0 - 3)^2 + y_S = 14 \\ P_2(2|-2) : f(2) = -2 &\Rightarrow a \cdot (2 - 3)^2 + y_S = -2 \end{aligned}$$

Wir haben ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung mit den Variablen a und y_S erhalten. Die Gleichungen werden noch ein wenig zusammengefasst.

$$\begin{array}{r} (1) \quad a \cdot (0 - 3)^2 + y_S = 14 \\ (2) \quad a \cdot (2 - 3)^2 + y_S = -2 \\ \hline (1) \quad \quad \quad 9a + y_S = 14 \\ (2) \quad \quad \quad a + y_S = -2 \end{array}$$

Zur Lösung dieses Gleichungssystems bietet sich das Additions-/Subtraktionsverfahren¹¹ an. Man kann Gleichung (2) von Gleichung (1) subtrahieren, dann fällt y_S weg.

$$\begin{array}{r} (1) \quad 9a + y_S = 14 \quad | \\ (2) \quad a + y_S = -2 \quad | - \\ \hline \quad \quad 8a \quad = 16 \quad | : 8 \\ \quad \quad a \quad = 2 \end{array}$$

Mit Hilfe der Gleichung (2) kann damit y_S berechnet werden.

$$\begin{aligned} a + y_S &= -2 \\ 2 + y_S &= -2 \quad | - 2 \\ y_S &= -4 \end{aligned}$$

Jetzt sind alle Parameter bekannt, die Funktionsgleichung kann angegeben werden:

$$f(x) = 2 \cdot (x - 3)^2 - 4$$

Wer mag, kann das noch in die Normalform umwandeln:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \cdot (x - 3)^2 - 4 \\ &= 2 \cdot (x^2 - 6x + 9) - 4 \\ &= 2x^2 - 12x + 18 - 4 \\ f(x) &= 2x^2 - 12x + 14 \end{aligned}$$

¹¹Einzelheiten zum Additions-/Subtraktionsverfahren siehe hier:
<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/add.pdf>

5.33 Aufgabe 33:

Welche dieser fünf Funktionen haben den selben Scheitelpunkt?

$$\begin{aligned}f_1(x) &= x^2 - 10x + 21 \\f_2(x) &= 3x^2 - 30x + 71 \\f_3(x) &= -2x^2 + 20x - 48 \\f_4(x) &= 0,5x^2 + 5x + 8,5 \\f_5(x) &= 4 \cdot (x - 5)^2 - 4\end{aligned}$$

Lösung: Um die Frage beantworten zu können, müssen alle Scheitelpunkte bestimmt werden.

$$\begin{aligned}x_{S1} &= -\frac{b}{2a} \\&= -\frac{-10}{2 \cdot 1} \\x_{S1} &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_{S1} &= f_1(x_{S1}) \\&= x_{S1}^2 - 10x_{S1} + 21 \\&= 5^2 - 10 \cdot 5 + 21 \\y_{S1} &= -4\end{aligned}$$

$$S_1(5 | -4)$$

$$\begin{aligned}x_{S2} &= -\frac{b}{2a} \\&= -\frac{-30}{2 \cdot 3} \\x_{S2} &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_{S2} &= f_2(x_{S2}) \\&= 3x_{S2}^2 - 30x_{S2} + 71 \\&= 3 \cdot 5^2 - 30 \cdot 5 + 71 \\&= 75 - 150 + 71 \\y_{S2} &= -4\end{aligned}$$

$$S_2(5 | -4)$$

$$\begin{aligned}x_{S3} &= -\frac{b}{2a} \\&= -\frac{20}{2 \cdot (-2)} \\x_{S3} &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{S3} &= f_3(x_{S3}) \\
&= -2 \cdot x_{S3}^2 + 20x_{S3} - 48 \\
&= -2 \cdot 5^2 + 20 \cdot 5 - 48 \\
&= -50 + 100 - 48 \\
y_{S3} &= 2
\end{aligned}$$

$$S_3(5|2)$$

$$\begin{aligned}
x_{S4} &= -\frac{b}{2a} \\
&= -\frac{5}{2 \cdot 0,5} \\
x_{S4} &= -5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{S4} &= f_4(x_{S4}) \\
&= 0,5 \cdot x_{S4}^2 + 5x_{S4} + 8,5 \\
&= 0,5 \cdot (-5)^2 + 5 \cdot (-5) + 8,5 \\
&= 12,5 - 25 + 8,5 \\
y_{S4} &= -4
\end{aligned}$$

$$S_4(-5|-4)$$

An f_5 können die Koordinaten von x_S und y_S direkt abgelesen werden, weil die Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform angegeben ist.

$$S_5(5|-4)$$

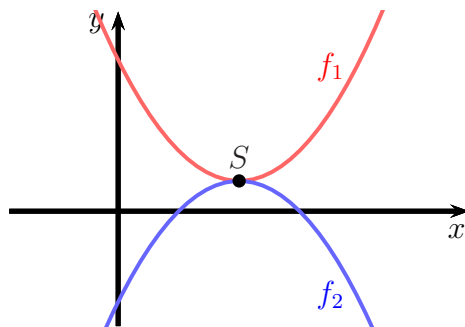
Ergebnis: Die Scheitelpunkte S_1 , S_2 und S_5 sind identisch. Bei S_3 gibt es einen anderen y -Wert und bei S_4 einen anderen x -Wert.

5.34 Aufgabe 34:

Gegeben ist die Funktion f_1 mit der Funktionsgleichung

$$f_1(x) = 4x^2 - 24x + 37$$

Gesucht ist die Funktion f_2 , die aus f_1 dadurch entstanden ist, dass man die Parabel von f_1 um 180° um deren Scheitelpunkt S gedreht hat, wie nebenstehend dargestellt.



Lösung: Zunächst wird der Scheitelpunkt von f_1 mit Hilfe der Scheitelpunktformel bestimmt.

$$\begin{aligned}x_S &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{-24}{2 \cdot 4} \\ x_S &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_S &= f_1(x_S) \\ &= 4x_S^2 - 24x_S + 37 \\ &= 4 \cdot 3^2 - 24 \cdot 3 + 37 \\ &= 36 - 72 + 37 \\ y_S &= 1\end{aligned}$$

$$S(3|1)$$

Durch die Drehung der Parabel um 180° wird der Formfaktor $a_1 = 4$ von f_1 im Vorzeichen umgekehrt.

$$\begin{aligned}a_2 &= -a_1 \\ a_2 &= -4\end{aligned}$$

Mit diesen Daten kann die Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform aufgestellt werden.

$$f_2(x) = -4 \cdot (x - 3)^2 + 1$$

Wer mag, kann das noch in die Normalform umwandeln, auch wenn das hier nicht verlangt ist:

$$\begin{aligned}f_2(x) &= -4 \cdot (x - 3)^2 + 1 \\ &= -4 \cdot (x^2 - 6x + 9) + 1 \\ f_2(x) &= -4x^2 + 24x - 35\end{aligned}$$