# Quadratische Funktion

Wolfgang Kippels

6. Dezember 2020

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

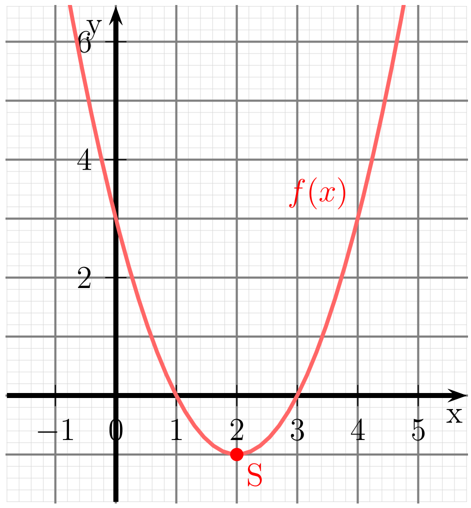
Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

## 2 Zusammenstellung der Grundlagen

Nebenstehend ist eine typische Quadratische Funktion dargestellt. Das Beispiel stellt diese Funktion dar:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$




Diese Kurvenform nennt man **Parabel**. Der tiefste Punkt[1] der Parabel heißt ***Scheitelpunkt*** der Parabel. Er wird meist mit dem Buchstaben **S** bezeichnet.

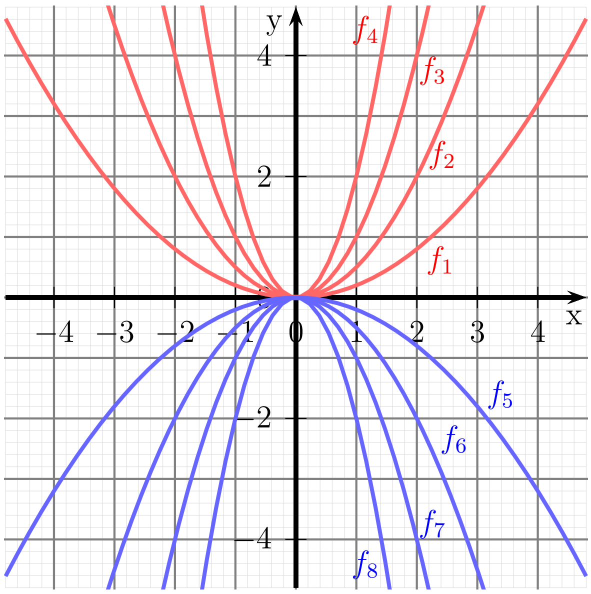
Eine Quadratische Funktion ist jede Funktion, die sich in der Normalform schreiben lässt:

**Normalform:**

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

Um zu untersuchen, welche Auswirkungen der Parameter $a$ auf den Funktionsgraphen hat, sind nebenstehend 8 Funktionen mit unterschiedlichem Parameter $a$ dargestellt. Bei allen ist $b = 0$ und $c = 0$. Die Funktionsgleichungen lauten:

$f_1(x) = 0{,}2x^2$
$f_2(x) = 0{,}5x^2$
$f_3(x) = 1x^2$
$f_4(x) = 2x^2$
$f_5(x) = -0{,}2x^2$
$f_6(x) = -0{,}5x^2$
$f_7(x) = -1x^2$
$f_8(x) = -2x^2$

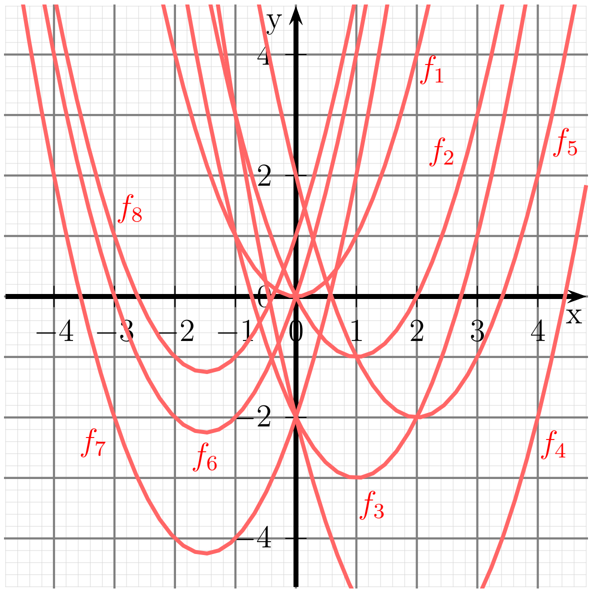



Man kann gut erkennen, dass alle Parabeln eine unterschiedliche Form haben. Der Parameter ***a*** wird deshalb **Formfaktor** genannt, weil er die Form der Parabel bestimmt. Ist ***a*** groß, ist die Parabel schmal, ist ***a*** negativ, ist die Parabel nach unten geöffnet.

[1] Wenn die Parabel nach unten geöffnet ist, ist der Scheitelpunkt der höchste Punkt.

Um zu zeigen, dass tatsächlich nur der Parameter $\boldsymbol{a}$ für die Form der Parabel zuständig ist, sind nebenstehend diverse Funktionen dargestellt. Für alle ist $a = 1$, jedoch haben $b$ und $c$ jeweils unterschiedliche Werte. Die Funktionsgleichungen lauten:

$f_1(x) = x^2$
$f_2(x) = x^2 - 2x$
$f_3(x) = x^2 - 2x - 2$
$f_4(x) = x^2 - 4x - 2$
$f_5(x) = x^2 - 4x + 2$
$f_6(x) = x^2 + 3x$
$f_7(x) = x^2 + 3x - 2$
$f_8(x) = x^2 + 3x + 1$




Trotz allem „Gewusel“ kann man aber doch gut erkennen, dass alle Parabeln die gleiche Form haben. Nur die Lage ist jeweils unterschiedlich.

Kümmern wir uns als nächstes um den Parameter $\boldsymbol{c}$. Hierfür können wir ganz gut die selben hier dargestellten Funktionsgraphen der Funktionen $f_1$ bis $f_8$ verwenden.

Betrachten wir dazu zunächst die Funktionen $f_1$, $f_2$ und $f_6$. Bei allen drei Funktionen ist $c = 0$. Als Gemeinsamkeit der drei Funktionsgraphen sollte auffallen, dass sie alle durch den Koordinatenursprung verlaufen. Hier ist $y = 0$.

Auch die Funktionen $f_3$, $f_4$ und $f_7$ haben alle den selben Parameter $c$, nämlich $c = -2$. Alle zugehörigen Funktionsgraphen schneiden die $y$-Achse an der selben Stelle, bei $y = -2$.

Offensichtlich gibt der Parameter **c** den **Abschnitt auf der y-Achse** an.

Wir können das noch mit $f_5$ und $f_8$ überprüfen. Bei $f_5$ ist $c = 2$, die $y$-Achse wird bei $y = 2$ geschnitten. Bei der Funktion $f_8$ ist $c = 1$, die $y$-Achse wird bei $y = 1$ geschnitten. Es ist also richtig:

Der Parameter **c** gibt den **Abschnitt auf der y-Achse** an.

Anmerkung: Natürlich kann man das auch „richtig“ beweisen. Wenn man den Funktionswert von $f(x) = ax^2 + bx + c$ für $x = 0$ berechnet, dann ist $a \cdot 0^2 = 0$ und $b \cdot 0 = 0$. Es bleibt also nur $c$ übrig.

Leider ist die Rolle des Parameters $b$ nicht ganz so offensichtlich, wie die von $a$ und $c$. Daher wird hierauf erst später eingegangen.

## 2.1 Nullstellen

Unter der **Nullstelle** einer Funktion versteht man die Stelle (den $x$-Wert, genannt $x_0$), an der der Funktionswert (der $y$-Wert) Null wird. Um mögliche Nullstellen zu bestimmen, wird der Funktionsterm gleich Null gesetzt. Am anfangs vorgestellten Beispiel $f(x) = x^2 - 4x + 3$ möchte ich die Vorgehensweise darstellen. Man benötigt dazu die $p$-$q$-Formel.[2]

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2 - 4x + 3 && |\text{ gleich Null setzen}\\
0 &= x_0^2 - 4x_0 + 3 && |\ p\text{-}q\text{-Formel anwenden}\\
x_{01/02} &= -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 3}\\
&= 2 \pm \sqrt{4-3}\\
x_{01/02} &= 2 \pm 1\\
x_{01} = 1 & \qquad x_{02} = 3
\end{aligned}$$

**Ergebnis:** Die Nullstellen liegen bei $x_{01} = 1$ und $x_{02} = 3$.
Man kann das auch so ausdrücken: Die $x$-Achse wird bei $x_{01} = 1$ und $x_{02} = 3$ geschnitten.

## 2.2 Scheitelpunkt

Der Scheitelpunkt liegt genau in der Mitte zwischen den Nullstellen (so weit vorhanden). Aus dieser Tatsache lässt sich eine Formel zur einfachen Scheitelpunktbestimmung herleiten. Ich gehe dazu von der Normalform aus und bestimme zunächst die Nullstellen.

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c && |\text{ Funktionsterm gleich Null setzen}\\
0 &= ax^2 + bx + c && |\ :a\\
0 &= x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} && |\ p\text{-}q\text{-Formel anwenden}\\
x_{01/02} &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}\\
x_{01} &= -\frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}\\
x_{02} &= -\frac{b}{2a} - \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}
\end{aligned}$$

[2] Einzelheiten zur $p$-$q$-Formel siehe hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/quad.pdf

Ich bilde den Mittelwert, um den $x$-Wert $x_s$ des Scheitelpunktes zu erhalten.

$$\begin{aligned}
x_s &= \frac{x_{01}+x_{02}}{2} \\
x_s &= \frac{\left(-\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}\right)+\left(-\frac{b}{2a}-\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}\right)}{2} \\
&= \frac{-2\cdot\frac{b}{2a}}{2} \\
x_s &= -\frac{b}{2a}
\end{aligned}$$

**Ergebnis:** Die $x$-Koordinate $\mathbf{x_s}$ des Scheitelpunktes kann mit Hilfe dieser Formel bestimmt werden:

$$\boxed{x_s = -\frac{b}{2a}}$$

Kommen wir zu unserem Beispiel zurück.

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

Wir bestimmen $x_s$ mit der oben hergeleiteten Formel:

$$\begin{aligned}
x_s &= -\frac{-4}{2\cdot 1} \\
x_s &= 2
\end{aligned}$$

Der zugehörige $y$-Wert $y_s$ kann dadurch bestimmt werden, dass der gefundene Wert für $x_s$ in die Funktionsgleichung eingesetzt wird. In unserem Beispiel sieht das so aus:

$$\begin{aligned}
y_s &= f(x_s) \\
&= x_s^2 - 4x_s + 3 \\
&= 2^2 - 4\cdot 2 + 3 \\
y_s &= -1
\end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt in unserem Beispiel ist damit: $\boxed{S(2|-1)}$

Die Funktionsgleichung kann nicht nur in der Normalform, sondern auch in der Scheitelpunktform angegeben werden:

**Scheitelpunktform:**

$$\boxed{f(x) = a\cdot(x-x_s)^2 + y_s}$$

Hierin sind $\mathbf{x_s}$ und $\mathbf{y_s}$ die Koordinaten des Scheitelpunktes $S(x_s|y_s)$ und **a** der Formfaktor.

Diese Formel möchte ich an dieser Stelle nicht herleiten. Das wäre recht einfach mit der nachfolgenden Formel für eine Verschiebung. Verschiebt man den Graphen einer beliebige Funktion $f(x)$ (nicht nur einer Quadratischen Funktion) um den Wert $x_v$ nach rechts und $y_v$ nach oben, so hat die verschobene Funktion $f_v(x)$ die Funktionsgleichung:

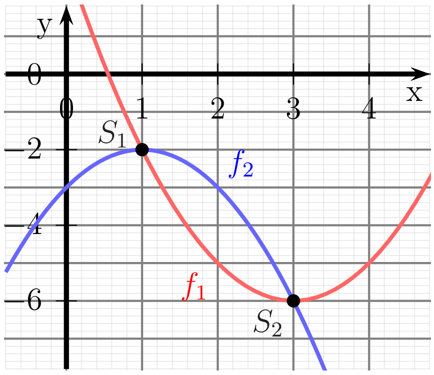
**Verschobene Funktion**

$$\boxed{f_v(x) = f(x - x_v) + y_v}$$

Auch hierzu möchte ich mir den Beweis an dieser Stelle ersparen. Er kann mit einem Hilfs-Koordinatensystem und Koordinatenumrechnung erfolgen.

## 2.3 Schnittpunktbestimmung

Auch Parabeln von Quadratischen Funktionen können Schnittpunkte miteinander haben. Nebenstehend sind die beiden Funktionsgraphen von




$$f_1(x) = x^2 - 6x + 3 \quad \text{und} \quad f_2(x) = -x^2 + 2x - 3$$

dargestellt.

In diesem Fall gibt es zwei Schnittpunkte, $S_1$ und $S_2$. Es ist aber auch möglich, dass die beiden Parabeln so liegen, dass sie sich garnicht treffen. Läge beispielsweise der Funktionsgraph von $f_1$ um 5 Einheiten höher, dann liefen die beiden Funktionsgraphen aneinander vorbei, es gäbe keine Schnittpunkte. Möglich ist es auch, dass die Funktionsgraphen sich „streifen", also nur in einem einzigen Punkt gerade noch berühren.

Wie bei Linearen Funktionen auch können die Schnittpunkte durch Gleichsetzen der Funktionsterme berechnet werden. Das möchte ich an den gegebenen Beispiel einmal vorrechnen.

$$\begin{aligned}
f_1(x_S) &= f_2(x_S) & \\
x_S^2 - 6x_S + 3 &= -x_S^2 + 2x_S - 3 & \quad | + x_S^2 - 2x_S + 3 \\
2x_S^2 - 8x_S + 6 &= 0 & \quad | : 2 \\
x_S^2 - 4x_S + 3 &= 0 & \quad | \; p\text{-}q\text{-Formel} \\
x_{S1/2} &= -\tfrac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{-4}{2}\right)^2 - 3} & \\
&= 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} & \\
&= 2 \pm 1 &
\end{aligned}$$

$$x_{S1} = 2 - 1 = 1 \qquad x_{S2} = 2 + 1 = 3$$

Die zugehörigen $y$-Werte erhält man durch Einsetzen der gefundene $x$-Werte in eine (beliebige) der beiden Funktionsgleichungen. Willkürlich wähle ich hier $f_1$.

$$y_{S1} = f_1(x_{S1}) = x_{S1}^2 - 6x_{S1} + 3 = 1^2 - 6 \cdot 1 + 3 = -2$$

$$y_{S2} = f_1(x_{S2}) = x_{S2}^2 - 6x_{S2} + 3 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 3 = -6$$

Damit erhalten wir die beiden Schnittpunkte: $\boxed{S_1(1|-2)}$ und $\boxed{S_2(3|-6)}$

# 3 Aufgaben

## 3.1 Aufgabe 1:

Geben Sie Quadratische Funktion $f(x)$ mit dem Formfaktor 1 an, deren Scheitelpunkt $S(4|-7)$ lautet!

## 3.2 Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion $f_1(x) = 2x^2 - 4x + 3$. Geben Sie die Funktion $f_2(x)$ an, die gegenüber der Funktion $f_1(x)$ um 3 Einheiten nach rechts und 2 Einheiten nach unten verschoben ist!

## 3.3 Aufgabe 3:

Die Quadratische Funktion hat den Scheitelpunkt $S(4|1)$. Der Graph schneidet die $y$-Achse bei $y_0 = -7$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

## 3.4 Aufgabe 4:

Bestimmen Sie den Scheitelpunkt, die Nullstellen und den Wertebereich der Quadratischen Funktion $f(x) = 3x^2 - 12x + 15$!

## 3.5 Aufgabe 5:

Bestimmen Sie den Scheitelpunkt, die Nullstellen und den Wertebereich der Quadratischen Funktion $f(x) = -16x^2 - 16x + 5$!

## 3.6 Aufgabe 6:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Parabel mit $f_1(x) = 4x^2 - 9x + 1$ und der Geraden mit $f_2(x) = 3x + 17$!

## 3.7 Aufgabe 7:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Parabel mit $f_1(x) = 9x^2 + 12x - 4$ und der Geraden mit $f_2(x) = -12x + 5$!

## 3.8 Aufgabe 8:

Gegeben ist die Quadratische Funktion $f(x) = -2x^2 + 5x - 3$. Geben Sie den Scheitelpunkt an und bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$. Welchen Definitionsbereich hat die Umkehrfunktion?

## 3.9 Aufgabe 9:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der beiden Parabeln mit den Funktionsgleichungen $f_1(x) = 4x^2 + 3x - 8$ und $f_2(x) = 7x^2 + 9x + 7$.

## 3.10 Aufgabe 10:

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Quadratischen Funktion, deren Graph durch die Punkte $P_1(-1|8)$, $P_2(2|-1)$ und $P_3(4|3)$ verläuft.

## 3.11 Aufgabe 11:

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Linearen Funktion $f_2(x)$, deren Graph die Parabel der Quadratischen Funktion $f_1(x) = x^2 - 4x + 4$ bei $x_b = 4$ als Tangente berührt.

## 3.12 Aufgabe 12:

Der Graph der Quadratischen Funktion $f(x)$ hat den Scheitelpunkt $S(3|2)$ und verläuft durch den Punkt $P(5|10)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von $f(x)$!

## 3.13 Aufgabe 13:

Bestimmen Sie die Nullstellen und den Scheitelpunkt der Quadratischen Funktion (soweit vorhanden):

$$f(x) = -16x^2 + 24x - 25$$

## 3.14 Aufgabe 14:

Die Quadratische Funktion $f(x)$ hat den Scheitelpunkt $S(4|3)$ und verläuft durch den Punkt $P(6|11)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von $f(x)$!

## 3.15 Aufgabe 15:

Die Quadratische Funktion $f(x)$ verläuft durch die drei Punkte $P_1(-3|32)$, $P_2(-1|10)$ und $P_3(2|7)$. Geben Sie die Funktionsgleichung an!

## 3.16 Aufgabe 16:

Eine verschobene Normalparabel (Formfaktor $a = 1$) verläuft durch die Punkte $P_1(-1|-2)$ und $P_2(0|1)$. Geben Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ an!

## 3.17 Aufgabe 17:

Eine Parabel (Quadratische Funktion) verläuft durch die drei Punkte $P_1(0|8)$, $P_2(1|3)$ und $P_3(2|0)$. Geben Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ an!

## 3.18 Aufgabe 18:

Eine Parabel (Quadratische Funktion) hat den Scheitelpunkt $S(-2|0)$ und verläuft durch den Punkt $P(-1|-2)$. Geben Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ an!

## 3.19 Aufgabe 19:

Verschieben Sie die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 1$ so nach **oben**, dass die neue Parabel durch den Punkt $P(2|3)$ verläuft. Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung $f_2(x)$ an!

## 3.20 Aufgabe 20:

Verschieben Sie die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 7$ so nach **links**, dass die neue Parabel durch den Punkt $P(0|\frac{7}{2})$ verläuft. Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung $f_2(x)$ an! (Geben Sie **alle** Lösungen an!)

## 3.21 Aufgabe 21:

Wie ist die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 7$ zu verändern, damit bei **gleichem Scheitelpunkt** der Punkt $P(3|-6)$ zur neuen Parabel gehört. Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung $f_2(x)$ an!

## 3.22 Aufgabe 22:

Die Parabel der Quadratischen Funktion $f_1(x)$ schneidet die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = x - 2$ bei $x_1 = -4$ und $x_2 = 1$. Die Parabel schneidet die $y$-Achse bei $y_0 = 2$. Geben Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ an!

## 3.23 Aufgabe 23:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte – falls vorhanden – der beiden Parabeln mit den Funktionsgleichungen $f_1(x) = x^2 - 2x + 3$ und $f_2(x) = 2x^2 - 8x + 12$.

# 4 Lösungen

## 4.1 Aufgabe 1:

Geben Sie Quadratische Funktion $f(x)$ mit dem Formfaktor 1 an, deren Scheitelpunkt $S(4|-7)$ lautet!

**Lösung:** Es bietet sich an, die Scheitelpunktform der Funktionsgleichung zu verwenden.

$$f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$

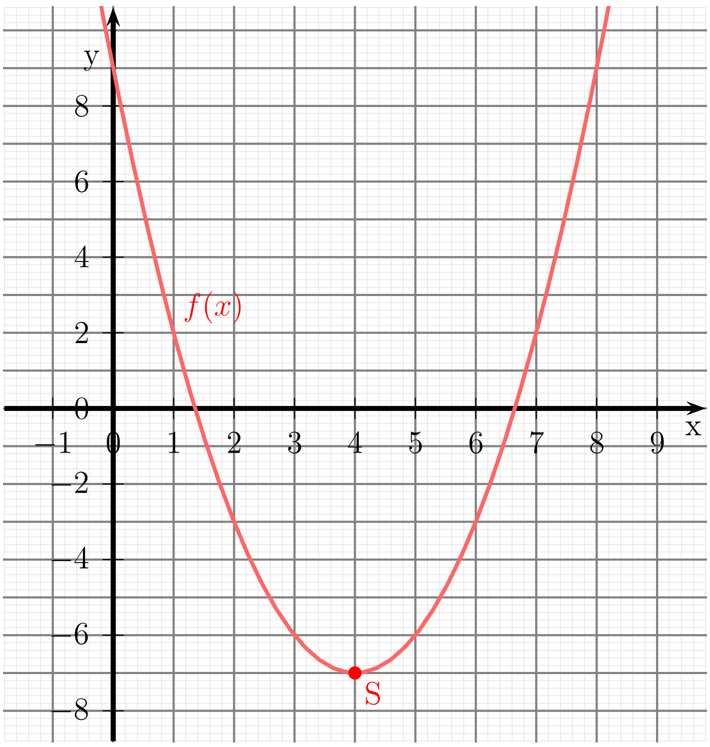
Setzt man die bekannten Koordinaten und den ebenfalls bekannten Formfaktor ein, ist man schon fertig.

$$f(x) = 1 \cdot (x - 4)^2 - 7$$

Wenn man möchte, kann man die Klammer noch auflösen, um die Gleichung in die Normalform zu bringen.

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \cdot (x-4)^2 - 7 \\ &= x^2 - 8x + 16 - 7 \\ f(x) &= x^2 - 8x + 9 \end{aligned}$$

Nachfolgend ist der Verlauf des Funktionsgraphen dargestellt.



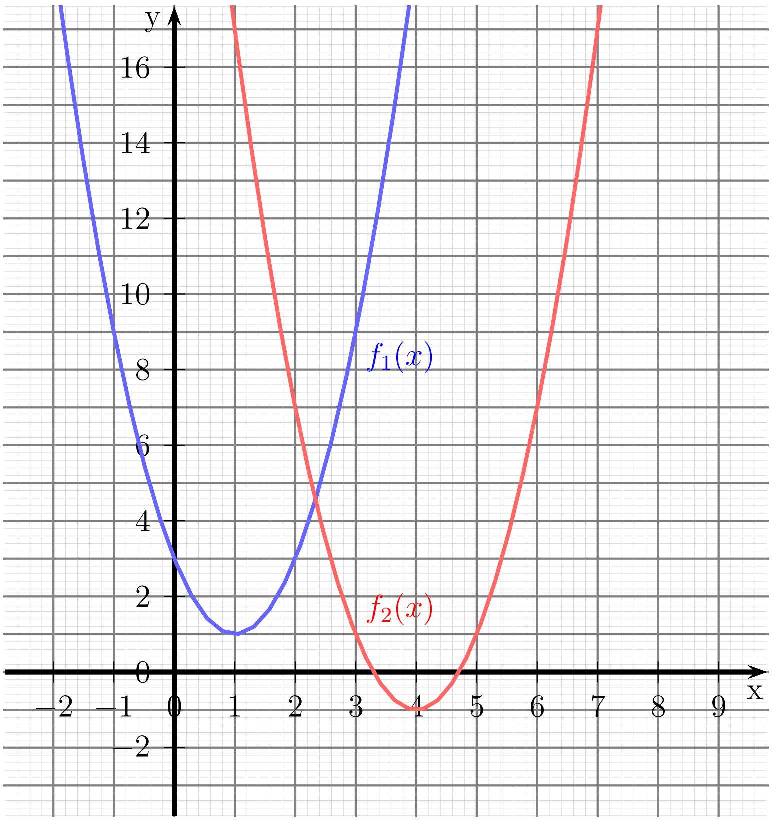
## 4.2 Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion $f_1(x) = 2x^2 - 4x + 3$. Geben Sie die Funktion $f_2(x)$ an, die gegenüber der Funktion $f_1(x)$ um 3 Einheiten nach rechts und 2 Einheiten nach unten verschoben ist!

**Lösung:** Für dieses Problem bietet sich die Verschiebeformel an. 2 Einheiten nach unten entsprechen dabei $-2$ Einheiten nach oben.

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= f_1(x-3) + (-2) \\
&= 2 \cdot (x-3)^2 - 4 \cdot (x-3) + 3 - 2 \\
&= 2 \cdot (x^2 - 6x + 9) - 4x + 12 + 1 \\
&= 2x^2 - 12x + 18 - 4x + 13 \\
f_2(x) &= 2x^2 - 16x + 31
\end{aligned}$$

Nachfolgend ist der Verlauf der Funktionsgraphen dargestellt.



## 4.3 Aufgabe 3:

Die Quadratische Funktion hat den Scheitelpunkt $S(4|1)$. Der Graph schneidet die $y$-Achse bei $y_0 = -7$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

**Lösung:** Da der Scheitelpunkt bekannt ist, bietet sich die Scheitelpunktform an. Es muss dann nur noch $a$ berechnet werden.

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot (x - x_s)^2 + y_s \\ f(x) &= a \cdot (x - 4)^2 + 1 \end{aligned}$$

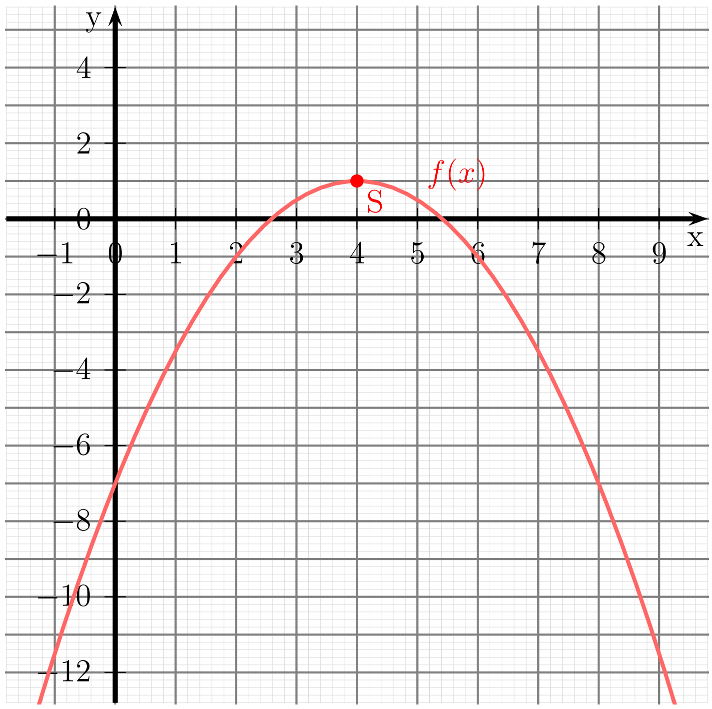
Der Schnittpunkt mit der $y$-Achse bedeutet: $f(0) = y_s$. Das setzen wir ein.

$$\begin{aligned} -7 &= a \cdot (0 - 4)^2 + 1 \\ -7 &= a \cdot 16 + 1 \quad | - 1 \\ -8 &= 16a \quad | : 16 \\ a &= -\frac{8}{16} \\ a &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Mit diesem Wert für $a$ erhalten wir die gesuchte Funktion:

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x - 4)^2 + 1 = -\frac{1}{2} \cdot (x^2 - 8x + 16) + 1 = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 7$$

Nachfolgend ist der Verlauf des Funktionsgraphen dargestellt.



## 4.4 Aufgabe 4:

Bestimmen Sie den Scheitelpunkt, die Nullstellen und den Wertebereich der Quadratischen Funktion $f(x) = 3x^2 - 12x + 15$!

**Lösung:** An einer Nullstelle ist der Funktionswert = 0. Daher lautet der Ansatz zur Nullstellenbestimmung: $f(x_0) = 0$.

$$\begin{aligned} 3x_0^2 - 12x_0 + 15 &= 0 \quad | : 3 \\ x_0^2 - 4x_0 + 5 &= 0 \\ x_{01/2} &= 2 \pm \sqrt{4-5} \\ x_{01/2} &= 2 \pm \sqrt{-1} \end{aligned}$$

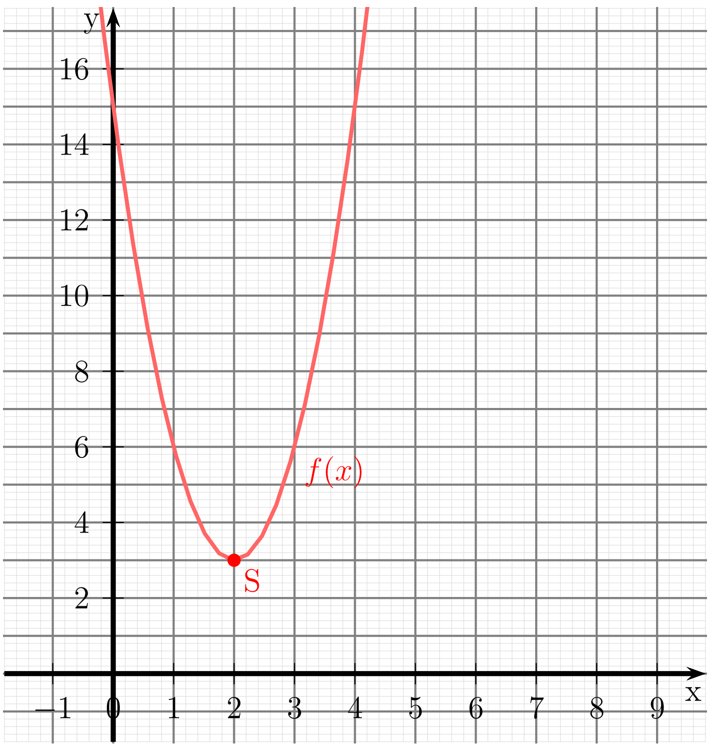
Da es für die Wurzel keine reelle Lösung gibt, gibt es keine Nullstellen. Andererseits kann man an dieser Gleichung schon den $x$-Wert des Scheitelpunktes ablesen. Es ist immer die Zahl, die vor der Wurzel steht, also $x_s = 2$. Den zugehörigen $y$-Wert $y_s$ bekommt man durch Einsetzen von $x_s$ in die Funktionsgleichung.

$$\begin{aligned} y_s &= f(x_s) \\ &= 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 15 \\ y_s &= 3 \end{aligned}$$

Der Formfaktor ist mit $a = 3$ positiv, darum ist die Parabel nach oben geöffnet. Das wiederum bedeutet, dass der Scheitelpunkt der tiefste Punkt der Kurve ist. Also lautet der Wertebereich:

$$W = \{y | y \geq 3\}$$

Nachfolgend ist der Verlauf des Funktionsgraphen dargestellt.


y
16
14
12
10
8
6
4
2
f(x)
S
x
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

## 4.5 Aufgabe 5:

Bestimmen Sie den Scheitelpunkt, die Nullstellen und den Wertebereich der Quadratischen Funktion $f(x) = -16x^2 - 16x + 5$!

**Lösung:** An einer Nullstelle ist der Funktionswert = 0. Daher lautet der Ansatz zur Nullstellenbestimmung: $f(x_0) = 0$.

$$\begin{aligned}
-16x_0^2 - 16x_0 + 5 &= 0 \quad | : (-16) \\
x_0^2 + x_0 - \frac{5}{16} &= 0 \\
x_{01/2} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{5}{16}} \\
x_{01/2} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4}{16} + \frac{5}{16}} \\
x_{01/2} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} \\
x_{01/2} &= -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{4} \\
x_{01/2} &= -\frac{2}{4} \pm \frac{3}{4} \\
x_{01} &= \frac{1}{4} \\
x_{02} &= -\frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Wie schon bei Aufgabe 4 können wir daraus auch den $x$-Wert des Scheitelpunktes als die Zahl vor der Wurzel ablesen, also:

$$x_s = -\frac{1}{2}$$

Den zugehörigen $y$-Wert $y_s$ finden wir wieder durch Einsetzen in die Funktionsgleichung:

$$y_s = f(x_s) = -16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 5 = 9$$

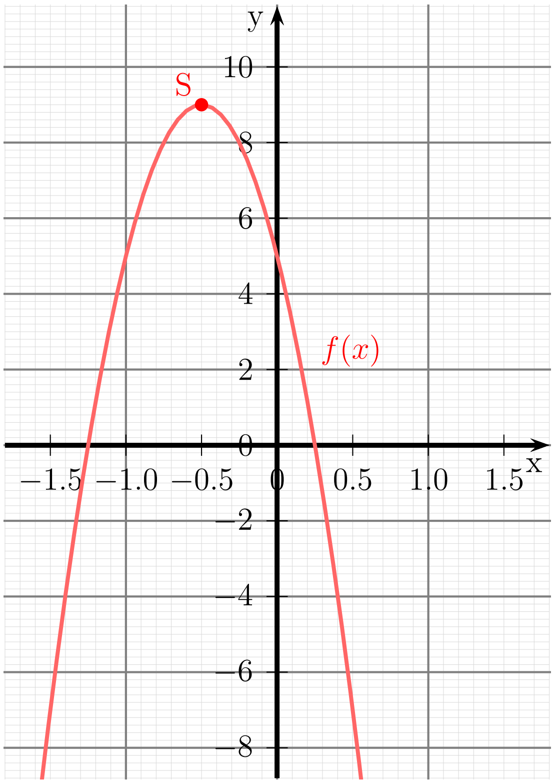
Der Scheitelpunkt lautet demnach:

$$S\left(-\tfrac{1}{2}|9\right)$$

Da der Formfaktor mit $-16$ negativ ist, ist die Parabel nach unten geöffnet. Der Wertebereich liegt also **unterhalb** des Scheitelpunktes:

$$W = \{x | x \leq 9\}$$

Nachfolgend ist der Verlauf des Funktionsgraphen dargestellt.



## 4.6 Aufgabe 6:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Parabel mit $f_1(x) = 4x^2 - 9x + 1$ und der Geraden mit $f_2(x) = 3x + 17$!

**Lösung:** Die Schnittpunkte sind ja genau die Punkte beider Kurven, bei denen $x$- und $y$-Wert übereinstimmen. Ich kann also zur Schnittpunktbestimmung die Funktionsgleichungen gleichsetzen.

$$\begin{aligned}
f_1(x_s) &= f_2(x_s) \\
4x_s^2 - 9x_s + 1 &= 3x_s + 17 \quad | - 3x_s - 17 \\
4x_s^2 - 12x_s - 16 &= 0 \quad | : 4 \\
x_s^2 - 3x_s - 4 &= 0 \\
x_{s1/2} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} \\
&= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \\
&= \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \\
x_{s1} &= \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4 \\
x_{s2} &= \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -1
\end{aligned}$$

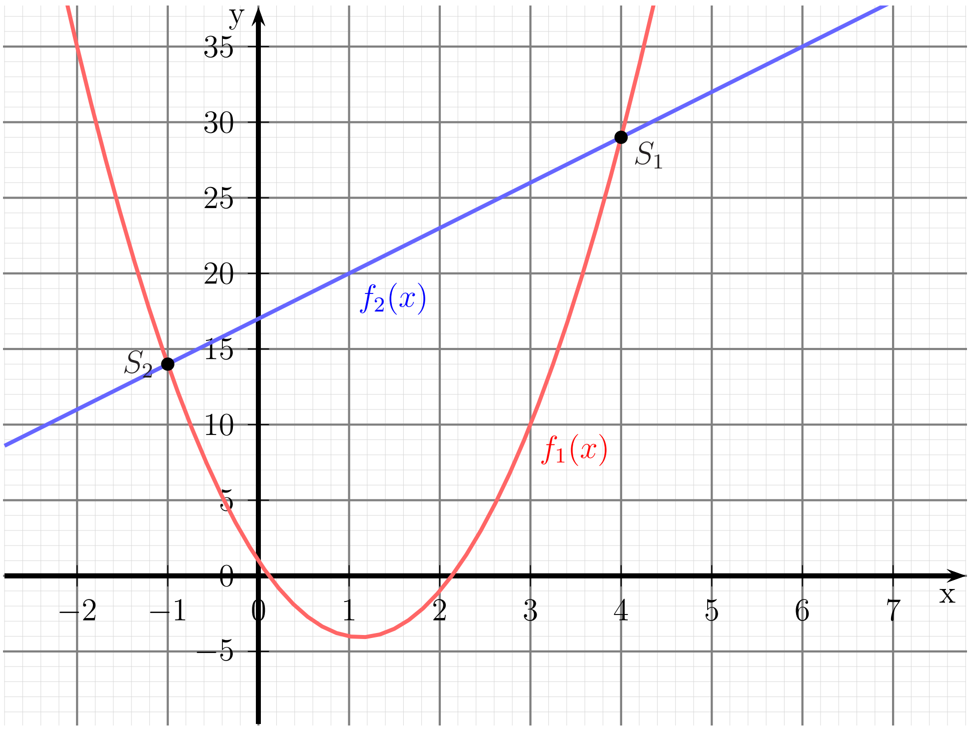
Die zugehörigen $y$-Werte bekommt man durch Einsetzen in eine der beiden Funktionsgleichungen. Ich wähle dafür $f_2$ aus, da sie etwas einfacher ist.

$$\begin{aligned}
y_s &= f_2(x_s) \\
y_{s1} &= 3x_{s1} + 17 = 3 \cdot 4 + 17 = 29 \\
y_{s2} &= 3x_{s2} + 17 = 3 \cdot (-1) + 17 = 14
\end{aligned}$$

Damit lauten die Schnittpunkte:

$$S_1(4|29) \text{ und } S_2(-1|14)$$

Nachfolgend ist der Verlauf der Funktionsgraphen dargestellt.



## 4.7 Aufgabe 7:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Parabel mit $f_1(x) = 9x^2 + 12x - 4$ und der Geraden mit $f_2(x) = -12x + 5$!

**Lösung:** Die Schnittpunkte sind ja genau die Punkte beider Kurven, bei denen $x$- und $y$-Wert übereinstimmen. Ich kann also zur Schnittpunktbestimmung die Funktionsgleichungen gleichsetzen.

$$\begin{aligned}
f_1(x_s) &= f_2(x_s) \\
9x_s^2 + 12x_s - 4 &= -12x_s + 5 \quad | + 12x_s - 5 \\
9x_s^2 + 24x_s - 9 &= 0 \quad | : 9 \\
x_s^2 + \frac{8}{3}x_s - 1 &= 0 \\
x_{s1/2} &= -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{9}{9}} \\
&= -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9}} \\
&= -\frac{4}{3} \pm \frac{5}{3} \\
x_{s1} &= -\frac{4}{3} - \frac{5}{3} = -3 \\
x_{s2} &= -\frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

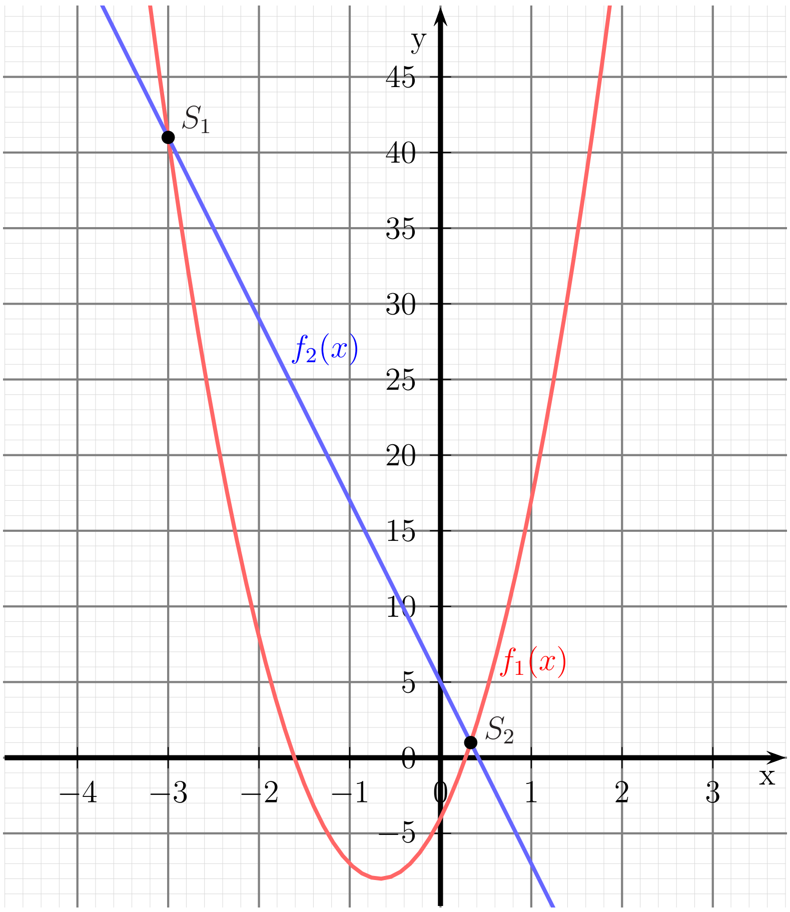
Die zugehörigen $y$-Werte bekommt man durch Einsetzen in eine der beiden Funktionsgleichungen. Ich wähle dafür $f_2$ aus, da sie etwas einfacher ist.

$$\begin{aligned}
y_s &= f_2(x_s) \\
y_{s1} &= -12x_{s1} + 5 = -12 \cdot (-3) + 5 = 41 \\
y_{s2} &= -12x_{s2} + 5 = -12 \cdot \frac{1}{3} + 5 = 1
\end{aligned}$$

Damit lauten die Schnittpunkte:

$$S_1(-3|41) \text{ und } S_2\left(\tfrac{1}{3}|1\right)$$

Nachfolgend ist der Verlauf der Funktionsgraphen dargestellt.



## 4.8 Aufgabe 8:

Gegeben ist die Quadratische Funktion $f(x) = -2x^2 + 5x - 3$. Geben Sie den Scheitelpunkt an und bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$. Welchen Definitionsbereich hat die Umkehrfunktion?

**Lösung:** Den Scheitelpunkt bekommt man zweckmäßigerweise mit der Scheitelpunktformel.

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2\cdot(-2)} = \frac{5}{4}$$

$$y_s = f(x_s) = -2x_s^2 + 5x_s - 3 = -2\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 5\cdot\frac{5}{4} - 3 = \frac{1}{8}$$

$$S\left(\tfrac{5}{4}\middle|\tfrac{1}{8}\right)$$

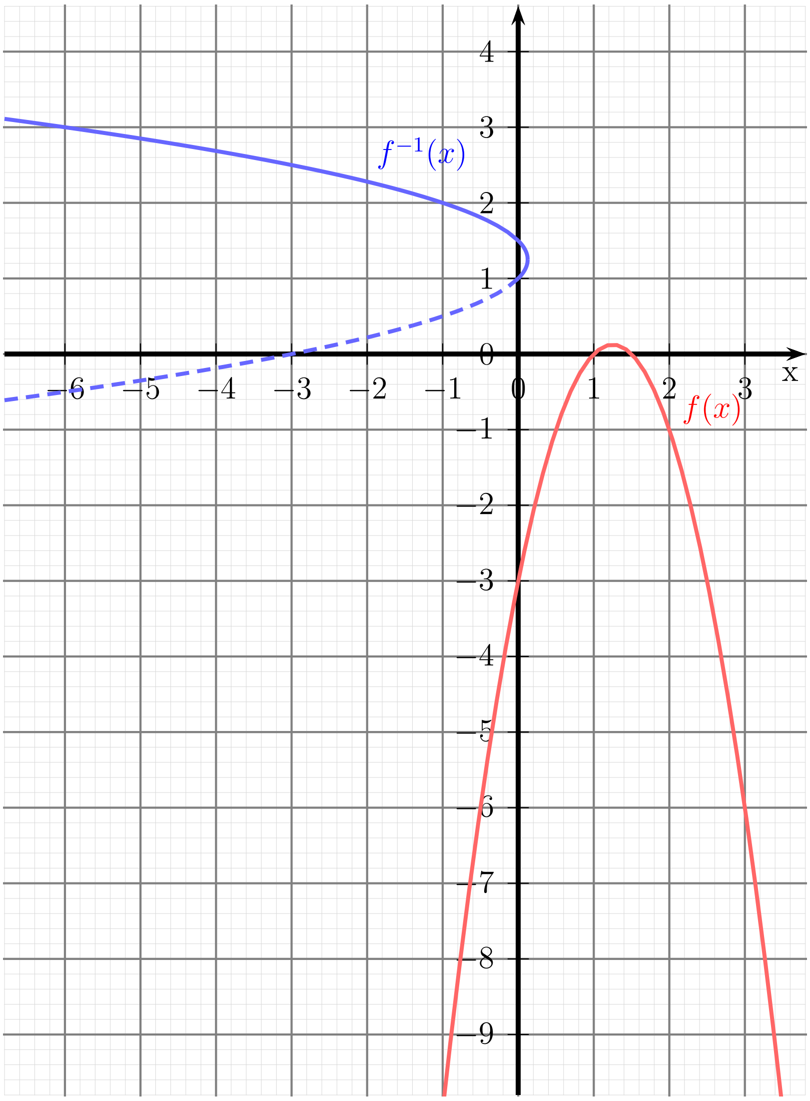
Die Umkehrfunktion wird bestimmt, indem man die Rollen von $x$ und $y$ tauscht und die dadurch entstandene Gleichung wieder nach $y$ auflöst.

$$\begin{aligned}
y &= -2x^2 + 5x - 3 \quad |\ x \text{ und } y \text{ tauschen} \\
x &= -2y^2 + 5y - 3 \quad |+2y^2 - 5y + 3 \\
2y^2 - 5y + 3 + x &= 0 \quad |:2 \\
y^2 - \frac{5}{2}y + \frac{3}{2} + \frac{x}{2} &= 0 \quad |\ \text{p-q-Formel} \\
y_{1/2} &= \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{24}{16} - \frac{8x}{16}} \\
&= \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{1-8x}{16}} \\
&= \frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{1-8x}}{4} \\
f^{-1}(x) &= \frac{5}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{1-8x}
\end{aligned}$$

Der Definitionsbereich wird dadurch eingeschränkt, dass der Wurzelinhalt (Radikand) nicht kleiner als Null weden darf.

$$\begin{aligned}
1 - 8x &\geq 0 \quad |-1 \\
-8x &\geq -1 \quad |:(-8) \\
x &\leq \frac{1}{8} \\
D &= \left\{x | x \leq \frac{1}{8}\right\}
\end{aligned}$$

Nachfolgend ist der Verlauf der Funktionsgraphen dargestellt.



### 4.9 Aufgabe 9:

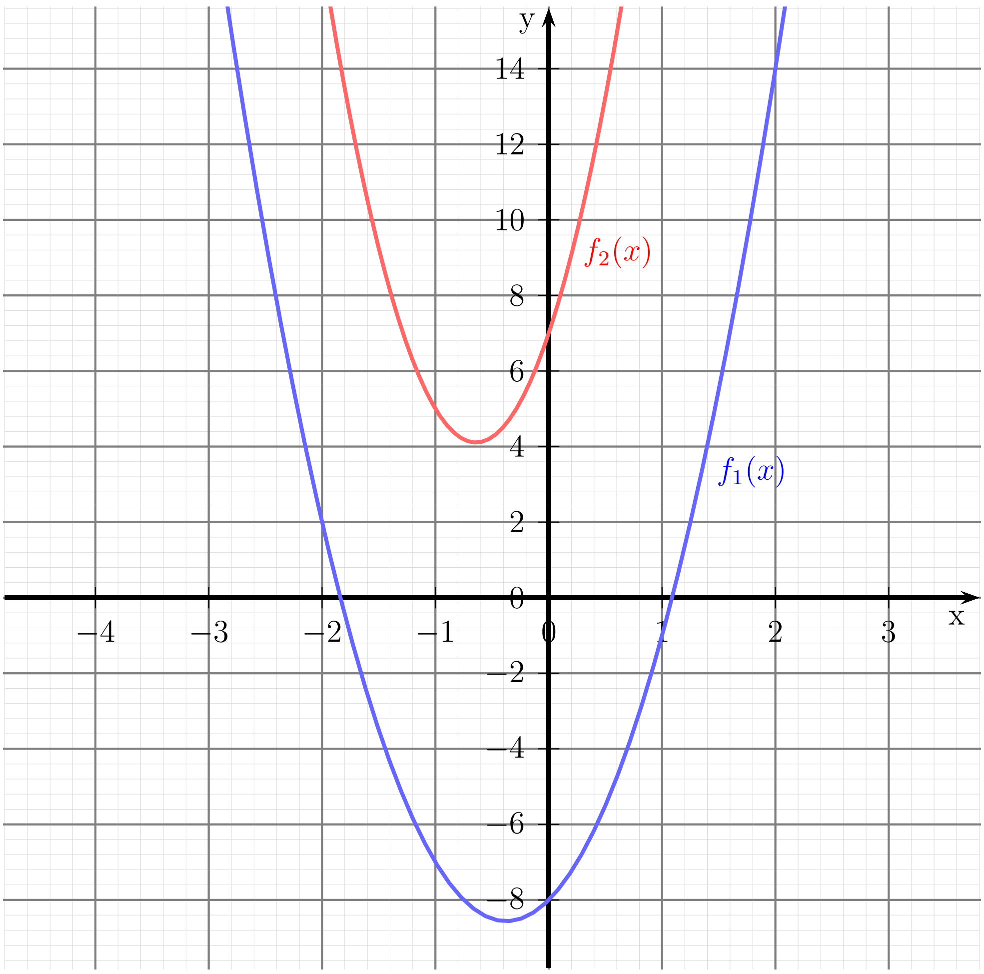
Bestimmen Sie die Schnittpunkte der beiden Parabeln mit den Funktionsgleichungen $f_1(x) = 4x^2 + 3x - 8$ und $f_2(x) = 7x^2 + 9x + 7$.

**Lösung:** Die Schnittpunkte sind ja genau die Punkte beider Kurven, bei denen $x$- und $y$-Wert übereinstimmen. Ich kann also zur Schnittpunktbestimmung die Funktionsgleichungen gleichsetzen.

$$\begin{aligned}
4x_s^2 + 3x_s - 8 &= 7x_s^2 + 9x_s + 7 \quad | - 7x_s^2 - 9x_s - 7 \\
-3x_s^2 - 6x_s - 15 &= 0 \quad | : (-3) \\
x_s^2 + 2x_s + 5 &= 0 \\
x_{s1/2} &= -1 \pm \sqrt{1-5} \\
x_{s1/2} &= -1 \pm \sqrt{-4}
\end{aligned}$$

Da diese Wurzel nicht reell zu lösen ist, gibt es **keine Schnittpunkte**.

Nachfolgend ist der Verlauf der Funktionsgraphen dargestellt.



## 4.10 Aufgabe 10:

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Quadratischen Funktion, deren Graph durch die Punkte $P_1(-1|8)$, $P_2(2|-1)$ und $P_3(4|3)$ verläuft.

**Lösung:** Zur Lösung gehen wir von der Normalform der Quadratischen Funktion aus. Wenn wir jeweils die Koordinaten eines Punktes einsetzen, dann erhalten wir drei Gleichungen als Lineargleichungssystem, aus denen wir die Parameter $a$, $b$ und $c$ berechnen können. Die Normalform lautet:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Wir setzen die Koordinaten der drei Punkte ein.

$$\begin{array}{rclcrcl} f(-1) & = & 8 & \Rightarrow & a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c & = & 8 \\ f(2) & = & -1 & \Rightarrow & a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c & = & -1 \\ f(4) & = & 3 & \Rightarrow & a\cdot 4^2 + b\cdot 4 + c & = & 3 \end{array}$$

Wenn wir das rechts stehende Lineargleichungssystem zusammenfassen, erhalten wir:

$$\begin{array}{rrrcr} a & -b & +c & = & 8 \\ 4a & +2b & +c & = & -1 \\ 16a & +4b & +c & = & 3 \end{array}$$

Dieses Lineargleichungssystem kann nun mit einem beliebigen Verfahren gelöst werden, also beispielsweise mit dem Einsetzungsverfahren, dem Additions-/Subtraktionsverfahren, der Cramerschen Regel oder dem Gauß-Jordan-Verfahren. Ich verwende hier als Beispiel die Cramersche Regel. Ich bestimme zunächst $a$:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{16-3-4-6-32-1}{2-16+16-32-4+4} = \frac{-30}{-30} = 1$$

Mit der nun bekannten Nennerdeterminante ist auch $b$ schnell bestimmt:

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 16 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-30} = \frac{-1+128+12+16-3-32}{-30} = \frac{120}{-30} = -4$$

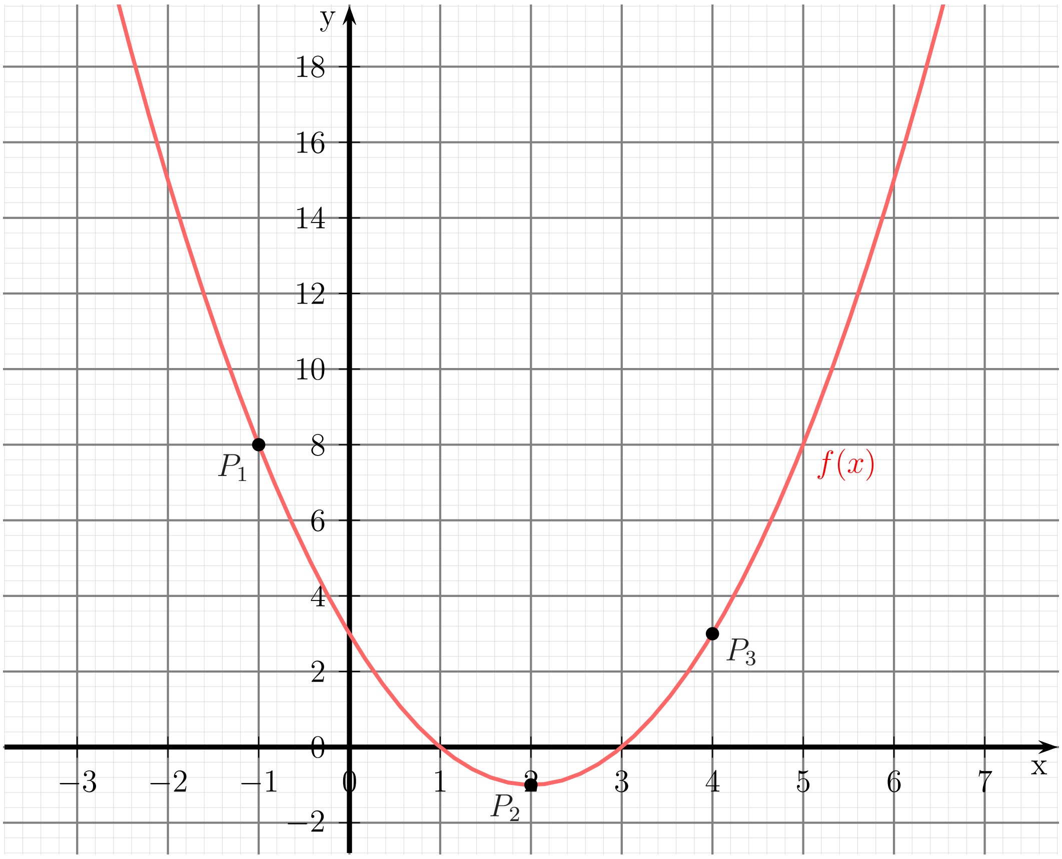
Den Parameter $c$ bestimmt man nun am einfachsten durch Einsetzen der bereits bekannten Parameter in eine der drei Gleichungen. Ich nehme dazu die erste.

$$\begin{array}{rcll} a - b + c & = & 8 & \\ 1 - (-4) + c & = & 8 & \\ 5 + c & = & 8 & |-5 \\ c & = & 3 & \end{array}$$

Setzen wir die Werte in die Ausgangsform ein, erhalten wir die gesuchte Funktionsgleichung.

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

Nachfolgend ist der Verlauf des Funktionsgraphen dargestellt.



## 4.11 Aufgabe 11:

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Linearen Funktion $f_2(x)$, deren Graph die Parabel der Quadratischen Funktion $f_1(x) = x^2 - 4x + 4$ bei $x_b = 4$ als Tangente berührt.

**Lösung:** Zunächst einmal können wir von der Normalform der Linearen Funktion ausgehen. Die gesuchte Funktion hat also diese Form:

$$f_2(x) = mx + b$$

Wir müssen nur die beiden Parameter $m$ und $b$ bestimmen. Aus dem $x$-Wert des Berührpunktes kann der dazugehörige $y$-Wert mit $y_b = f_1(x_b)$ berechnet werden.

$$y_b = x_b^2 - 4x_b + 4 = 4^2 - 4 \cdot 4 + 4 = 4$$

Damit können wir die erste von zwei notwendigen Gleichungen aufstellen.

$$f_2(x_b) = y_b \quad \Rightarrow \quad m \cdot 4 + b = 4 \tag{1}$$

Die beiden Graphen *berühren* sich, sie *schneiden* sich nicht. Das bedeutet, es gibt nur genau *einen einzigen* gemeinsamen Punkt. Daraus können wir eine weitere Gleichung gewinnen. Wie das geht?
Setzen wir zunächst die beiden Funktionsgleichungen wie zur Schnittpunktbestimmung gleich.

$$\begin{aligned}
f_1(x_b) &= f_2(x_b) \\
x_b^2 - 4x_b + 4 &= mx_b + b \quad | - mx_b - b \\
x_b^2 - 4x_b - mx_b + 4 - b &= 0 \quad | \; x_b \text{ ausklammern} \\
x_b^2 - (4+m)x_b + (4-b) &= 0 \quad | \text{ p-q-Formel} \\
x_{b1/2} &= \frac{4+m}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4+m}{2}\right)^2 - (4-b)}
\end{aligned}$$

Wann gibt es *genau einen* Schnittpunkt? Das kann doch nur dann der Fall sein, wenn der Wert der Wurzel $= 0$ ist. Der „Rest" vor der Wurzel muss demnach unser $x_b = 4$ sein. Das ergibt dann unsere zweite Gleichung.

$$\frac{4+m}{2} = 4 \tag{2}$$

Aus dieser Gleichung kann ich sofort m berechnen.

$$\begin{aligned}
\frac{4+m}{2} &= 4 \quad | \cdot 2 \\
4+m &= 8 \quad | - 4 \\
m &= 4
\end{aligned}$$

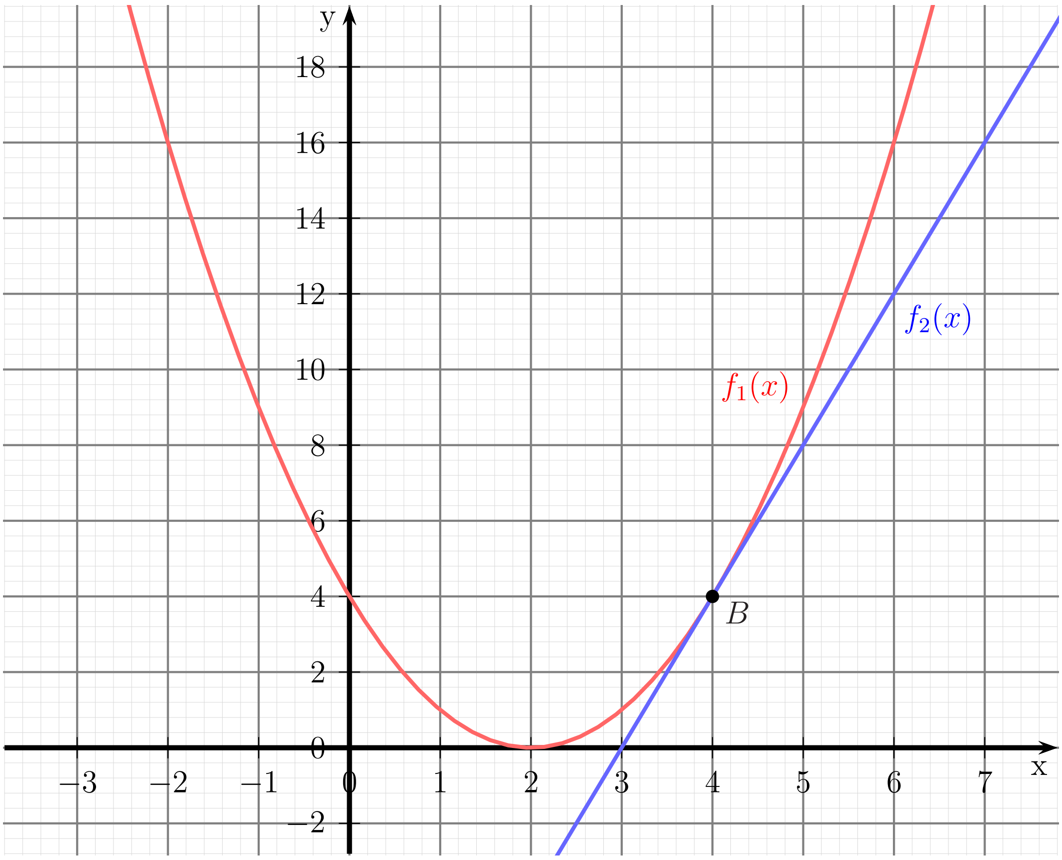
Das setzen wir in Gleichung (1) ein.

$$\begin{aligned}
4m + b &= 4 \quad | \text{ 4 für } m \text{ einsetzen} \\
4 \cdot 4 + b &= 4 \\
16 + b &= 4 \quad | - 16 \\
b &= -12
\end{aligned}$$

Die gesuchte Gleichung lautet also:

$$f_2(x) = 4x - 12$$

Nachfolgend ist der Verlauf der Funktionsgraphen dargestellt.



## 4.12 Aufgabe 12:

Der Graph der Quadratischen Funktion $f(x)$ hat den Scheitelpunkt $S(3|2)$ und verläuft durch den Punkt $P(5|10)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von $f(x)$!

**Lösung:** Da der Scheitelpunkt bekannt ist, bietet sich die Scheitelpunktform an. Es muss dann nur noch $a$ berechnet werden.

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot (x - x_s)^2 + y_s \\ f(x) &= a \cdot (x - 3)^2 + 2 \end{aligned}$$

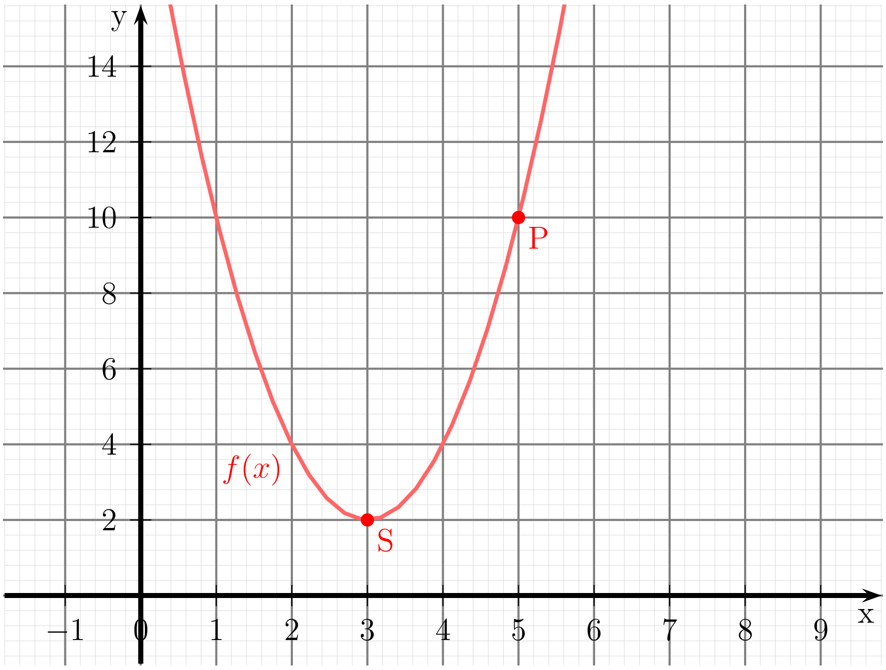
Neben $S$ ist auch noch der Punkt $P$ auf dem Graphen bekannt. Seine Koordinaten müssen auch die Funktionsgleichung erfüllen.

$$\begin{aligned} f(x_p) &= y_p \\ a \cdot (x_p - 3)^2 + 2 &= y_p \\ a \cdot (5 - 3)^2 + 2 &= 10 \\ a \cdot 2^2 + 2 &= 10 \quad | - 2 \\ a \cdot 4 &= 8 \quad | : 4 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Diesen Wert für $a$ setze ich ein und erhalte die gesuchte Funktionsgleichung.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \cdot (x - 3)^2 + 2 \\ &= 2 \cdot (x^2 - 6x + 9) + 2 \\ &= 2x^2 - 12x + 18 + 2 \\ f(x) &= 2x^2 - 12x + 20 \end{aligned}$$

Nachfolgend ist der Verlauf des Funktionsgraphen dargestellt.



y
14
12
10
8
6
4
2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
x
$f(x)$
S
P

## 4.13 Aufgabe 13:

Bestimmen Sie die Nullstellen und den Scheitelpunkt der Quadratischen Funktion (soweit vorhanden):

$$f(x) = -16x^2 + 24x - 25$$

**Lösung:** An einer Nullstelle ist der Funktionswert = 0. Daher lautet der Ansatz zur Nullstellenbestimmung: $f(x_0) = 0$.

$$\begin{aligned}
-16x_0^2 + 24x_0 - 25 &= 0 \qquad\qquad \mid : (-16) \\
x_0^2 - \frac{3}{2}x_0 + \frac{25}{16} &= 0 \\
x_{01/02} &= \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{25}{16}} \\
x_{01/02} &= \frac{3}{4} \pm \sqrt{-1}
\end{aligned}$$

Da es für die Wurzel keine reelle Lösung gibt, gibt es **keine** Nullstellen. Andererseits kann man an dieser Gleichung schon den $x$-Wert des Scheitelpunktes ablesen. Es ist immer die Zahl, die vor der Wurzel steht, also $x_s = \frac{3}{4}$. Den zugehörigen $y$-Wert $y_s$ bekommt man durch Einsetzen von $x_s$ in die Funktionsgleichung.

$$\begin{aligned}
y_s &= f(x_s) \\
&= -16x_s^2 + 24x_s - 25 \\
&= -16 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 24 \cdot \frac{3}{4} - 25 \\
&= -9 + 18 - 25 \\
y_s &= 16
\end{aligned}$$

Ergebnis: $\boxed{\text{Scheitelpunkt } S\left(\frac{3}{4}|16\right)}$

## 4.14 Aufgabe 14:

Die Quadratische Funktion $f(x)$ hat den Scheitelpunkt $S(4|3)$ und verläuft durch den Punkt $P(6|11)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von $f(x)$!

**Lösung:** Zur Lösung bietet sich die **Scheitelpunktform** der Quadratischen Funktion an.

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot (x - x_s)^2 + y_s \\ f(x) &= a \cdot (x - 4)^2 + 3 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Parameters $a$ werden die Koordinaten des Punktes $P$ in die Funktion eingesetzt.

$$\begin{aligned} f(x_P) &= y_P & \\ a \cdot (6-4)^2 + 3 &= 11 & \\ a \cdot 4 + 3 &= 11 & |-3 \\ 4a &= 8 & |:4 \\ a &= 2 & \end{aligned}$$

Wer mag, kann die Funktion noch aus der Scheitelpunktform in die Normalform umwandeln.

$$f(x) = 2 \cdot (x-4)^2 + 3 = 2 \cdot (x^2 - 8x + 16) + 3 = 2x^2 - 16x + 32 + 3 = 2x^2 - 16x + 35$$

Die gesuchte Funktion lautet damit: $\boxed{f(x) = 2 \cdot (x-4)^2 + 3 = 2x^2 - 16x + 35}$

## 4.15 Aufgabe 15:

Die Quadratische Funktion $f(x)$ verläuft durch die drei Punkte $P_1(-3|32)$, $P_2(-1|10)$ und $P_3(2|7)$. Geben Sie die Funktionsgleichung an!

**Lösung:**

$$\begin{array}{lrcllrcl}
(1) & f(-3) & = & 32 & \Rightarrow & a\cdot(-3)^2+b\cdot(-3)+c & = & 32\\
(2) & f(-1) & = & 10 & \Rightarrow & a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c & = & 10\\
(3) & f(2) & = & 7 & \Rightarrow & a\cdot 2^2+b\cdot 2+c & = & 7
\end{array}$$

Wenn wir das rechts stehende Lineargleichungssystem zusammenfassen, erhalten wir:

$$\begin{array}{lrrrcl}
(1) & 9a & -3b & +c & = & 32\\
(2) & a & -b & +c & = & 10\\
(3) & 4a & +2b & +c & = & 7
\end{array}$$

Dieses Lineargleichungssystem kann nun mit einem beliebigen Verfahren gelöst werden, also beispielsweise mit dem Einsetzungsverfahren, dem Additions-/Subtraktionsverfahren, der Cramerschen Regel oder dem Gauß-Jordan-Verfahren. Ich verwende hier als Beispiel die Cramersche Regel. Ich bestimme zunächst $a$:

$$a=\frac{\begin{vmatrix}32 & -3 & 1\\ 10 & -1 & 1\\ 7 & 2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}9 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{-32-21+20+7-64+30}{-9-12+2+4-18+3}=\frac{-60}{-30}=2$$

Mit der mittlerweile bereits bekannten Nennerdeterminante ist auch $b$ schnell bestimmt:

$$b=\frac{\begin{vmatrix}9 & 32 & 1\\ 1 & 10 & 1\\ 4 & 7 & 1\end{vmatrix}}{-30}=\frac{90+128+7-40-63-32}{-30}=\frac{90}{-30}=-3$$

Den Parameter $c$ bestimmt man nun am einfachsten durch Einsetzen der bereits bekannten Parameter in eine der drei Gleichungen. Ich nehme dazu Gleichung (2).

$$\begin{array}{rcll}
a-b+c & = & 10 & \\
2+3+c & = & 10 & |-5\\
c & = & 5 &
\end{array}$$

Die gesuchte Funktion lautet damit: $\boxed{f(x)=2x^2-3x+5}$

## 4.16 Aufgabe 16:

Eine verschobene Normalparabel (Formfaktor $a = 1$) verläuft durch die Punkte $P_1(-1|-2)$ und $P_2(0|1)$. Geben Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ an!

**Lösung:** Mit dem bekannten Formfaktor lautet die Funktionsgleichung in Normalform:

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

Die bekannten Punkte können eingesetzt werden.

$$\begin{array}{lrcll} (1) & f(-1) & = & -2 & \Rightarrow & (-1)^2 + b \cdot (-1) + c & = & -2 \\ (2) & f(0) & = & 1 & \Rightarrow & 0^2 + b \cdot 0 + c & = & 1 \end{array}$$

Aus Gleichung (2) erhält man sofort:

$$c = 1$$

Das wird in (1) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcll} (-1)^2 + b \cdot (-1) + 1 & = & -2 & \\ 1 - b + 1 & = & -2 & | - 2 \\ -b & = & -4 & | \cdot (-1) \\ b & = & 4 & \end{array}$$

Die gesuchte Funktion lautet damit: $\boxed{f(x) = x^2 + 4x + 1}$

## 4.17 Aufgabe 17:

Eine Parabel (Quadratische Funktion) verläuft durch die drei Punkte $P_1(0|8)$, $P_2(1|3)$ und $P_3(2|0)$. Geben Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ an!

**Lösung:**

$$\begin{array}{lrcccrcl} (1) & f(0) & = & 8 & \Rightarrow & a\cdot 0^2+b\cdot 0+c & = & 8 \\ (2) & f(1) & = & 3 & \Rightarrow & a\cdot 1^2+b\cdot 1+c & = & 3 \\ (3) & f(2) & = & 0 & \Rightarrow & a\cdot 2^2+b\cdot 2+c & = & 0 \end{array}$$

Wenn wir das rechts stehende Lineargleichungssystem zusammenfassen, erhalten wir:

$$\begin{array}{lrrrcl} (1) & & & c & = & 8 \\ (2) & a & +b & +c & = & 3 \\ (3) & 4a & +2b & +c & = & 0 \end{array}$$

Dieses Lineargleichungssystem kann nun mit einem beliebigen Verfahren gelöst werden, also beispielsweise mit dem Einsetzungsverfahren, dem Additions-/Subtraktionsverfahren, der Cramerschen Regel oder dem Gauß-Jordan-Verfahren. Es sollte aber auffallen, dass aus (1) bereits der erste Parameter $c = 8$ bekannt ist. Dieser Wert wird in (2) und (3) eingesetzt, die Gleichungen werden vereinfacht.

$$\begin{array}{lrcll} (2) & a+b+8 & = & 3 & |-8 \\ (2) & a+b & = & -5 & \\ (3) & 4a+2b+8 & = & 0 & |-8 \\ (3) & 4a+2b & = & -8 & \end{array}$$

Zusammengfasst bleibt ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung übrig:

$$\boxed{\begin{array}{lrrcr} (2) & a & +b & = & -5 \\ (3) & 4a & +2b & = & -8 \end{array}}$$

Gleichung (2) lässt sich bequem für die Anwendung des Einsetzungsverfahrens nach $a$ oder $b$ umstellen. Ich stelle sie nach $a$ um.

$$\begin{array}{rcll} a+b & = & -5 & |-b \\ a & = & -5-b & \end{array}$$

Einsetzen in (3):

$$\begin{array}{rcll} 4a+2b & = & -8 & \\ 4\cdot(-5-b)+2b & = & -8 & \\ -20-4b+2b & = & -8 & |+20 \\ -2b & = & 12 & |:(-2) \\ b & = & -6 & \end{array}$$

Mit der umgestellten Gleichung (2) erhalten wir sofort $a$.

$$a = -5-b = -5-(-6) = -5+6 = 1$$

Mit diesen Ergebnissen lautet die gesuchte Funktion: $\boxed{f(x) = x^2-6x+8}$

## 4.18 Aufgabe 18:

Eine Parabel (Quadratische Funktion) hat den Scheitelpunkt $S(-2|0)$ und verläuft durch den Punkt $P(-1|-2)$. Geben Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ an!

**Lösung:** Da der Scheitelpunkt bekannt ist, bietet sich die Scheitelpunktform an. Es muss dann nur noch $a$ berechnet werden.

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot (x - x_s)^2 + y_s \\ f(x) &= a \cdot (x + 2)^2 + 0 \end{aligned}$$

Neben $S$ ist auch noch der Punkt $P$ auf dem Graphen bekannt. Seine Koordinaten müssen auch die Funktionsgleichung erfüllen.

$$\begin{aligned} f(x_p) &= y_p \\ a \cdot (x_p + 2)^2 &= y_p \\ a \cdot (-1 + 2)^2 &= -2 \\ a \cdot 1^2 &= -2 \\ a &= -2 \end{aligned}$$

Diesen Wert für $a$ setze ich ein und erhalte die gesuchte Funktionsgleichung.

$$f(x) = -2 \cdot (x + 2)^2$$

Wer mag, kann die Funktionsgleichung noch in die Normalform umwandeln.

$$f(x) = -2x^2 - 8x - 8$$

Die gesuchte Funktion lautet: $\boxed{f(x) = -2 \cdot (x + 2)^2}$ oder $\boxed{f(x) = -2x^2 - 8x - 8}$

## 4.19 Aufgabe 19:

Verschieben Sie die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 1$ so nach **oben**, dass die neue Parabel durch den Punkt $P(2|3)$ verläuft. Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung $f_2(x)$ an!

**Lösung:** Für eine vertikale Verschiebung muss lediglich ein Parameter (ich nenne ihn $k$) addiert werden.

$$f_2(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 1 + k$$

Damit der Punkt $P$ auf der Parabel liegt, müssen seine Koordinaten die Funktionsgleichung erfüllen.

$$\begin{aligned}
f_2(x_P) &= y_P \\
f_2(2) &= 3 \\
\frac{1}{2}\cdot(2-4)^2 - 1 + k &= 3 \\
\frac{1}{2}\cdot(-2)^2 - 1 + k &= 3 \\
\frac{1}{2}\cdot 4 - 1 + k &= 3 \\
2 - 1 + k &= 3 \quad | -1 \\
k &= 2
\end{aligned}$$

Der Wert wird kür $k$ eingesetzt.

$$f_2(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 1 + 2 = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 1$$

Wer mag, kann die Funktionsgleichung noch in die Normalform umwandeln:

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= = \tfrac{1}{2}(x-4)^2 + 1 \\
&= \frac{1}{2}\cdot(x^2 - 8x + 16) + 1 \\
&= \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 + 1 \\
f_2(x) &= \frac{1}{2}x^2 - 4x + 9
\end{aligned}$$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet:

$\boxed{f_2(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 1}$ oder: $\boxed{f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 9}$

### 4.20 Aufgabe 20:

Verschieben Sie die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 7$ so nach **links**, dass die neue Parabel durch den Punkt $P(0|\frac{7}{2})$ verläuft. Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung $f_2(x)$ an! (Geben Sie **alle** Lösungen an!)

**Lösung:** Eine **Rechts**verschiebung um $k$ bedeutet, dass anstelle der Variablen $x$ ein $(x - k)$ eingesetzt wird. Entsprechend bedeutet ein im Ergebnis **negatives** $k$ dann eine **Links**verschiebung. Wünscht man ein **positives** $k$, dann kann auch $(x + k)$ für eine **Links**verschiebung eingesetzt werden. Ich verwende in meiner Musterlösung die erste Möglichkeit.

$$\begin{aligned} f_2(x) &= f_1(x-k) \\ f_2(x) &= \frac{1}{2} \cdot (x-k)^2 - 4(x-k) + 7 \end{aligned}$$

Jetzt werden für $x$ und $y$ die Koordinaten des Punktes $P$ eingesetzt. Damit kann $k$ bestimmt werden.

$$\begin{aligned} f_2(0) &= \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \cdot (0-k)^2 - 4 \cdot (0-k) + 7 &= \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \cdot k^2 + 4k + 7 &= \frac{7}{2} & &| \cdot 2 \\ k^2 + 8k + 14 &= 7 & &| -7 \\ k^2 + 8k + 7 &= 0 \\ k_{1/2} &= -4 \pm \sqrt{4^2 - 7} \\ k_{1/2} &= -4 \pm 3 \\ k_1 = -1 & \qquad k_2 = -7 \end{aligned}$$

Da beide Werte **negativ** sind, handelt es sich in beiden Fällen um eine **Links**verschiebung. Beide Lösungen sind also gültig. Die Werte werden für $k$ eingesetzt.

$$\begin{aligned} f_{21} &= \frac{1}{2} \cdot (x+1)^2 - 4 \cdot (x+1) + 7 & f_{22} &= \frac{1}{2} \cdot (x+7)^2 - 4 \cdot (x+7) + 7 \\ f_{21} &= \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 2x + 1) - 4x - 4 + 7 & f_{22} &= \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 14x + 49) - 4x - 28 + 7 \\ f_{21} &= \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} - 4x + 3 & f_{22} &= \frac{1}{2}x^2 + 7x + \frac{49}{2} - 4x - 21 \\ f_{21} &= \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{7}{2} & f_{22} &= \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Ergebnis: $\boxed{f_{21} = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{7}{2}}$ oder: $\boxed{f_{22} = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{7}{2}}$

## 4.21 Aufgabe 21:

Wie ist die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 7$ zu verändern, damit bei **gleichem Scheitelpunkt** der Punkt $P(3|-6)$ zur neuen Parabel gehört. Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung $f_2(x)$ an!

**Lösung:** Zunächst muss der Scheitelpunkt bestimmt werden. Dies kann entweder mit der Mitte zwischen den Nullstellen oder einfacher mit dieser Formel geschehen.

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \Rightarrow \qquad x_S = -\frac{b}{2a}}$$

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 4$$

$$y_S = f(x_S) = \frac{1}{2} \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 + 7 = -1$$

Mit bekanntem Scheitelpunkt kann die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform aufgestellt werden.

$$f_2(x) = a \cdot (x-4)^2 - 1$$

Zur Bestimmung des Parameters $a$ werden die Koordinaten des Punktes $P$ in die Funktionsgleichung eingesetzt.

$$\begin{array}{rcll} f_2(3) & = & -6 & \\ a \cdot (3-4)^2 - 1 & = & -6 & \\ a \cdot (-1)^2 - 1 & = & -6 & \\ a - 1 & = & -6 & | +1 \\ a & = & -5 & \end{array}$$

Die Funktionsgleichung kann angegeben werden:

$$\boxed{f_2(x) = -5 \cdot (x-4)^2 - 1}$$

## 4.22 Aufgabe 22:

Die Parabel der Quadratischen Funktion $f_1(x)$ schneidet die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = x - 2$ bei $x_1 = -4$ und $x_2 = 1$. Die Parabel schneidet die $y$-Achse bei $y_0 = 2$. Geben Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ an!

**Lösung:** Zunächst werden die $y$-Werte der Schnittpunkte $P_1$ und $P_2$ bestimmt. Dazu werden die $x$-Werte in $f_2$ eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl} y_1 &=& f_2(x_1) \\ y_1 &=& -4-2 \\ y_1 &=& -6 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} y_2 &=& f_2(x_2) \\ y_2 &=& 1-2 \\ y_2 &=& -1 \end{array}$$

Damit lauten die Schnittpunkte $P_1(-4|-6)$ und $P_2(1|-1)$. Der Schnittpunkt mit der $y$-Achse liegt bei $x = 0$, damit heist dieser Punkt $P_3(0|2)$. Mit drei bekannten Punkten kann ein Lineargleichungssystem aufgestellt werden, wenn man von der Normalform der Quadratischen Funktion ausgeht:

$$f_2(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{array}{lrcll} (1) & f(-4) &=& -6 & \Rightarrow & a\cdot(-4)^2 + b\cdot(-4) + c &=& -6 \\ (2) & f(1) &=& -1 & \Rightarrow & a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c &=& -1 \\ (3) & f(0) &=& 2 & \Rightarrow & a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c &=& 2 \end{array}$$

Wenn wir das rechts stehende Lineargleichungssystem zusammenfassen, erhalten wir:

$$\boxed{\begin{array}{lrrrcl} (1) & 16a & -4b & +c &=& -6 \\ (2) & a & +b & +c &=& -1 \\ (3) & & & c &=& 2 \end{array}}$$

Da aus (3) sofort das Ergebnis für $c$ bekannt ist, kann der Wert in beide anderen Gleichungen eingesetzt werden. Übrig bleibt ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung.

$$\begin{array}{lrcll} (1) & 16a - 4b + 2 &=& -6 & |-2 \\ (2) & a + b + 2 &=& -1 & |-2 \\ \hline (1) & 16a - 4b &=& -8 & \\ (2) & a + b &=& -3 & \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem kann mit einem beliebigen Verfahren gelöst werden. Beispielsweise kann zum Einsetzungsverfahren (2) nach $a$ aufgelöst und in (1) eingesetzt werden.

$$\begin{array}{rcll} a + b &=& -3 & |-b \\ a &=& -3 - b & \end{array}$$

Einsetzen in (1):

$$
\begin{array}{rcll}
16a - 4b & = & -8 & \\
16 \cdot (-3 - b) - 4b & = & -8 & \\
-48 - 16b - 4b & = & -8 & | + 48 \\
-20b & = & 40 & | : (-20) \\
b & = & -2 &
\end{array}
$$

Dieses Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (1) eingesetzt.

$$a = -3 - b = -3 - (-2) = -1$$

Jetzt sind alle Parameter bekannt. Die Funktionsgleichung kann angegeben werden.

$$\boxed{f_2(x) = -x^2 - 2x + 2}$$

## 4.23 Aufgabe 23:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte – falls vorhanden – der beiden Parabeln mit den Funktionsgleichungen $f_1(x) = x^2 - 2x + 3$ und $f_2(x) = 2x^2 - 8x + 12$.

**Lösung:** Zur Schnittpunktbestimmung werden die Funktionsterme gleichgesetzt.

$$\begin{array}{rcll}
f_1(x_S) & = & f_2(x_S) & \\
x_S^2 - 2x_S + 3 & = & 2x_S^2 - 8x_S + 12 & | - 2x_S^2 + 8x_S - 12 \\
-x_S^2 + 6x_S - 9 & = & 0 & | \cdot (-1) \\
x_S^2 - 6x_S + 9 & = & 0 & \\
x_{S1/2} & = & 3 \pm \sqrt{9-9} & \\
x_S & = & 3 &
\end{array}$$

Es gibt nur ein Ergebnis, also auch nur einen einzigen Schnittpunkt. Zur Bestimmung des $y$-Wertes wird dieser $x_S$-Wert in $f_1$ oder in $f_2$ eingesetzt. Ich wähle dazu $f_1$, weil die Zahlen etwas kleiner sind.

$$\begin{array}{rcl}
y_S & = & f_1(x_S) \\
 & = & x_S^2 - 2x_S + 3 \\
 & = & 3^2 - 2 \cdot 3 + 3 \\
y_S & = & 6
\end{array}$$

Hiermit kann der Schnittpunkt angegeben werden: $\boxed{S(3|6)}$