Quadratische Gleichungen

Wolfgang Kippels

3. Mai 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Lösungsverfahren

Zunächst muss diese Frage geklärt werden:

Was ist eine Quadratische Gleichung?

Unter einer **Quadratischen Gleichung** versteht man eine Gleichung in der Form eines *Polynomes 2. Grades*[1]. Allgemein hat sie diese Form:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dabei stellt x die zu bestimmende Variable dar, a, b und c sind sogenannte *Parameter*, also Zahlen, die man zwar zunächst nicht kennen muss, die aber feste Werte für eine konkrete Gleichung darstellen. Ein Beispiel:

$$2x^2 - 8x - 10 = 0$$

In diesem Beispiel ist $a = 1$, $b = -4$ und $c = -5$.

2.1 Lösung mit Quadratischer Ergänzung

Gegeben sei diese Quadratische Gleichung:

$$2x^2 - 8x - 10 = 0$$

Als erstes wird man die Gleichung so umformen wollen, dass vor dem x^2 keine Zahl mehr steht (also sozusagen eine unsichtbare 1):

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8x - 10 &= 0 \quad |:2 \\ x^2 - 4x - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Zur weiteren Lösung kann man versuchen, eine geeignete *Binomische Formel*[2] dort „einzubauen“. Dazu schauen wir uns zunächst die ersten beiden Summanden

$$x^2 - 4x$$

genau an. Sie könnten die ersten beiden Summanden aus der Auflösung mit der zweiten Binomischen Formel darstellen. Diese sieht ja bekanntlich so aus:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Dann entspricht das a^2 in der Binomischen Formel dem x^2 und das $-2ab$ dem $-4x$ in der Quadratischen Gleichung. Was würde dann dem b^2 entsprechen?

[1]Einzelheiten zu Polynomen siehe hier: https://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/polynomd.pdf

[2]Einzelheiten zu Binomischen Formeln siehe hier: https://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/binom.pdf

Zusammengefasst könnte man das so schreiben:

$$\underbrace{a^2}_{x^2} - \underbrace{2ab}_{4x} + \underbrace{b^2}_{?} = (a-b)^2$$

Wir können a und b ausrechnen:

$$\begin{aligned} a^2 &= x^2 \quad |\sqrt{} \\ a &= x \end{aligned}$$

Im Folgenden können wir dann das a durch das x ersetzen und damit b ausrechnen:

$$\begin{aligned} 2ab &= 4x \quad |x \text{ durch } a \text{ ersetzen} \\ 2xb &= 4x \quad |:(2x) \\ b &= 2 \end{aligned}$$

Jetzt sind $a = x$ und $b = 2$ bekannt. Es wäre nun wunderschön, wenn der dritte Term aus der Quadratischen Gleichung (die -5) dem dritten Term aus der Binomischen Formel (dem b^2) entsprechen würde. Dann könnte man nämlich die drei Terme in der Quadratischen Gleichung so umschreiben:

$$x^2 - 4x - 5 = (x-2)^2 \quad \textbf{ACHTUNG! FALSCH!}$$

In aller Regel ist das leider nicht der Fall, auch hier nicht. Man kann nachrechnen:

$$b^2 = 2^2 = 4 \neq -5$$

Wenn anstelle der -5 dort eine $+4$ stehen würde, könnte man so umformen. Deswegen wendet man einen Trick an. Man addiert die gewünschte 4 und subtrahiert sie sofort wieder. Das sieht dann so aus:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x - 5 &= 0 \\ x^2 - 4x + 4 - 4 - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Das hat auf den ersten Blick überhaupt nichts gebracht. Tatsächlich kann man aber die ersten drei Terme wie folgt zusammenfassen:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 - 4 - 5 &= 0 \\ (x^2 - 4x + 4) - 4 - 5 &= 0 \\ (x-2)^2 - 4 - 5 &= 0 \\ (x-2)^2 - 9 &= 0 \end{aligned}$$

In dieser Form lässt sich die Gleichung nun einfach lösen.

$$\begin{aligned} (x-2)^2 - 9 &= 0 \quad |+9 \\ (x-2)^2 &= 9 \quad |\sqrt{} \\ x - 2 &= \pm 3 \end{aligned}$$

Beim Wurzelziehen muss man hier aufpassen. Da sowohl eine **positive** als auch eine **negative** Zahl im Quadrat eine **positive** Zahl ergibt, muss man hier beim Aufheben des Quadrates durch die Wurzel auch das **negative** Ergebnis mitberücksichtigen. Wir erhalten daher **zwei** Lösungen!

$$\begin{array}{rclcrcll} x_1 - 2 & = & 3 & \text{oder} & x_2 - 2 & = & -3 & \mid +2 \\ x_1 & = & 5 & \text{oder} & x_2 & = & -1 & \end{array}$$

Als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{-1; 5\}$

Zusammenfassung des Lösungsweges:

- Man wandelt zunächst die gegebene Quadratische Gleichung so um, dass auf einer Seite der Gleichung eine Null steht.
- Falls vor dem Term x^2 noch ein Koeffizient (eine Zahl) steht, dividiert man durch diese Zahl, damit das x^2 alleine steht.
- Mann bildet die **Quadratische Ergänzung**. Das ist ***die Hälfte von dem Koeffizienten (der Vorzahl) von x zum Quadrat***. Diese Quadratische Ergänzung addiert man und subtrahiert sie sofort wieder.
- Man wandelt die beiden Summanden, die x enthalten zusammen mit der addierten Quadratischen Ergänzung gemäß der ersten oder zweiten Binomischen Formel in eine Summe um, die quadriert wird.

Das Ganze möchte ich noch einmal am Stück an einem Beispiel zeigen.

$$\begin{array}{rcll} 3x^2 + 12x + 9 & = & 0 & \mid :3 \\ x^2 + 4x + 3 & = & 0 & \mid \text{Quadratische Ergänzung addieren/subtrahieren} \\ \underbrace{x^2 + 4x + 2^2}_{\text{Quadr. Term}} - 2^2 + 3 & = & 0 & \\ (x+2)^2 - 4 + 3 & = & 0 & \\ (x+2)^2 - 1 & = & 0 & \mid +1 \\ (x+2)^2 & = & 1 & \mid \sqrt{\ } \\ x_{1/2} + 2 & = & \pm 1 & \mid -2 \\ x_{1/2} & = & -2 \pm 1 & \\ x_1 = -1 & \vee & x_2 = -3 & \\ L & = & \{-1; -3\} & \end{array}$$

2.2 Lösung mit p-q-Formel

Führt man diese Lösungsmethode ein einziges mal an der allgemeinen Form der Gleichung

$$\boxed{x^2 + px + q = 0}$$

durch, dann erhält man die Standardmethode für das Lösen von Quadratischen Gleichungen mit der *Lösungsformel*, die auch als **p-q-Formel** bekannt ist.

$$\boxed{x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Man sieht an der Formel, dass es meist zwei Lösungen gibt, nämlich x_1 und x_2. Die Werte für p und q entnimmt man der gegebenen Gleichung, die allerdings gegebenenfalls zuvor in die Normalform gebracht wurde.

2.2.1 Beispiel 1:

Gesucht ist die Lösungsmenge nachfolgender Gleichung.

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

Wir vergleichen mit der Normalform, um die Werte für p und q zu bestimmen. p ist die Zahl, die vor dem x steht, also die 4. q ist die Zahl, die ohne x allein steht, also die 3. Wir halten fest:

$$p = 4 \qquad q = 3$$

Diese Werte setzen wir in die p-q-Formel ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
x_{1/2} &= -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 3} \\
&= -2 \pm \sqrt{4 - 3} \\
&= -2 \pm 1 \\
x_1 &= -2 + 1 = -1 \\
x_2 &= -2 - 1 = -3 \\
L &= \{-1; -3\}
\end{aligned}$$

War das noch einfach? Es folgt auf der nächsten Seite ein anderes Beispiel.

2.2.2 Beispiel 2:

Die zu lösende Gleichung lautet:

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

Wir suchen zunächst wieder p und q. Aber aufgepasst: Es heißt $-6x$, in der Normalform steht aber $+px$, wir haben also unterschiedliche Vorzeichen! Demnach gehört das Minuszeichen bei $-6x$ **als fester Bestandteil zum p!** Schreiben wir es ganz deutlich:

$$p = -6 \qquad q = +5$$

Damit können wir die Werte in die Formel einsetzen und lösen:

$$\begin{aligned}
x_{1/2} &= -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 5} \\
&= -(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 5} \\
&= 3 \pm \sqrt{9 - 5} \\
&= 3 \pm \sqrt{4} \\
&= 3 \pm 2 \\
x_1 &= 3 + 2 = 5 \\
x_2 &= 3 - 2 = 1 \\
L &= \{1; 5\}
\end{aligned}$$

Beide Werte, sowohl p als auch q können negativ sein. Auch dazu ein Beispiel:

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

Die Werte für p und q lauten:

$$p = -4 \qquad q = -5$$

Wir setzen die Werte in die Lösungsformel ein und bestimmen die Lösung:

$$\begin{aligned}
x_{1/2} &= -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - (-5)} \\
&= -(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 + 5} \\
&= 2 \pm \sqrt{4 + 5} \\
&= 2 \pm \sqrt{9} \\
&= 2 \pm 3 \\
x_1 &= 2 + 3 = 5 \\
x_2 &= 2 - 3 = -1 \\
L &= \{-1; 5\}
\end{aligned}$$

Wenn die Quadratische Gleichung nicht in der Normalform angegeben ist, dann muss man sie zuerst umformen.

Nur in der Normalform lässt sich die p-q-Formel anwenden!

2.2.3 Beispiel 3:

$$2x^2 - 20x = -42$$

Aus mehreren Gründen ist die Gleichung noch nicht in der Normalform:

- Es stehen nicht alle Terme auf der gleichen Seite des Gleichheitszeichens.
- Vor dem x^2 steht noch eine Zahl, hier eine 2.

Also formen wir erst um, bevor die Lösungsformel angewendet wird.

$$\begin{array}{rcll}
2x^2 - 20x & = & -42 & \mid +42 \\
2x^2 - 20x + 42 & = & 0 & \mid :2 \\
x^2 - 10x + 21 & = & 0 & \mid p\text{-}q\text{-Formel: } p = -10,\ q = 21 \\
x_{1/2} & = & -\frac{-10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-10}{2}\right)^2 - 21} & \\
& = & 5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 21} & \\
& = & 5 \pm \sqrt{25 - 21} & \\
& = & 5 \pm \sqrt{4} & \\
& = & 5 \pm 2 & \\
x_1 & = & 5 + 2 = 7 & \\
x_2 & = & 5 - 2 = 3 & \\
L & = & \{3; 7\} &
\end{array}$$

2.2.4 Beispiel 4:

$$x^2 - 4x = 0$$

In diesem Beispiel scheint q zu fehlen. Das bedeutet ganz einfach, dass $q = 0$ ist. Damit können wir die Lösung bilden. Es ist $p = -4$.

$$\begin{array}{rcl}
x_{1/2} & = & -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 0} \\
& = & 2 \pm \sqrt{(-2)^2} \\
& = & 2 \pm 2 \\
x_1 & = & 2 + 2 = 4 \\
x_2 & = & 2 - 2 = 0 \\
L & = & \{0; 4\}
\end{array}$$

Wenn während der Lösung keine ganzen Zahlen bestehen bleiben, dann ist es zweckmäßig, mit Brüchen und nicht mit Dezimalzahlen weiter zu rechnen. Auch hierzu folgen Beispiele.

2.2.5 Beispiel 5:

$$
\begin{aligned}
x^2 - 7x + 10 &= 0 && \mid p\text{-}q\text{-Formel} \\
x_{1/2} &= -\frac{-7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-7}{2}\right)^2 - 10} \\
&= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} \\
&= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{40}{4}} \\
&= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49-40}{4}} \\
&= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \\
&= \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2} \\
x_1 &= \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\
x_2 &= \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\
L &= \{2; 5\}
\end{aligned}
$$

2.2.6 Beispiel 6:

$$
\begin{aligned}
3x^2 - 8x - 3 &= 0 && |:3 \text{ (wg. Normalform)}\\
x^2 - \frac{8}{3}x - 1 &= 0 && |\ p\text{-}q\text{-Formel}\\
x_{1/2} &= -\frac{-\frac{8}{3}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-\frac{8}{3}}{2}\right)^2 - (-1)}\\
&= \frac{4}{3} \pm \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 1}\\
&= \frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{9}{9}}\\
&= \frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9}}\\
&= \frac{4}{3} \pm \frac{5}{3}\\
x_1 &= \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{9}{3} = 3\\
x_2 &= \frac{4}{3} - \frac{5}{3} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}\\
L &= \left\{-\frac{1}{3}; 3\right\}
\end{aligned}
$$

Es ist nicht unbedingt zweckmäßig, unnötig viele Schritte aufzuschreiben. Das ist letztlich unnötige Arbeit. Sinnvoll und auch gut machbar sind folgende Zusammenfassungen.

- Man kann das Ergebnis für $-\frac{p}{2}$ sofort ausrechnen, bevor man es hinschreibt.
- Da man das Ergebnis für $\frac{p}{2}$ vor der Wurzel schon schon ausgerechnet hat, kann man auch unter der Wurzel das Ergebnis für $(\frac{p}{2})^2$ sofort ausrechnen. Dabei darf man sogar ein eventuell vorhandenes Minuszeichen unter den Tisch fallen lassen, weil es beim Quadrieren ja sowieso wegfallen würde.
- Hat man für das Ergebnis von $(\frac{p}{2})^2$ einen Bruch erhalten, dann kann man q unter der Wurzel gleich beim ersten Hinschreiben schon in einen Bruch verwandeln und auf den gleichen Nenner bringen.

Mit diesen Zusammenfassungen sähe die Lösung des vorangegangenen Beispiels so aus:

2.2.7 Beispiel 6:

$$
\begin{aligned}
3x^2 - 8x - 3 &= 0 && \mid :3 \text{ (wg. Normalform)} \\
x^2 - \frac{8}{3}x - 1 &= 0 && \mid p\text{-}q\text{-Formel} \\
x_{1/2} &= \frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{9}{9}} \\
&= \frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9}} \\
&= \frac{4}{3} \pm \frac{5}{3} \\
x_1 &= \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{9}{3} = 3 \\
x_2 &= \frac{4}{3} - \frac{5}{3} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3} \\
L &= \left\{ -\frac{1}{3}; 3 \right\}
\end{aligned}
$$

Hierdurch erspart man sich doch eine Menge Schreibarbeit, ohne dass die Lösung dadurch schwieriger wird.

Die häufigsten Fehler, die beim Lösen von Quadratischen Gleichungen gemacht werden, sind folgende:

1. Die Gleichung wurde vor dem Anwenden der Lösungsformel nicht in die Normalform gebracht.

2. Wenn p und/oder q negativ sind, werden beim Einsetzen die Minuszeichen vergessen.

3. Beim Anwenden der Formel wird das Minuszeichen ganz vorn bei $-\frac{p}{2}$ oder unter der Wurzel bei $-q$ vergessen.

Daher empfehle ich, diese Fehlermöglichkeiten ins Regelheft zu schreiben und nach erfolgter Lösung den Rechenweg daraufhin zu überprüfen.

Es kann vorkommen, dass der Wert unter der Wurzel 0 oder sogar negativ wird. Dann gibt es nur eine oder gar keine Lösung. Auch dazu zwei Beispiele:

2.2.8 Beispiel 7:

$$\begin{aligned}
2x^2 - 8x + 8 &= 0 && \mid :2 \\
x^2 - 4x + 4 &= 0 && \mid p\text{-}q\text{-Formel} \\
x_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{4-4} \\
&= 2 \pm \sqrt{0} \\
&= 2 \pm 0 \\
x &= 2 \\
L &= \{2\}
\end{aligned}$$

Es gibt nur eine einzige Lösung, da $x_1 = 2 + 0$ und $x_2 = 2 - 0$ beide $x = 2$ ergeben.

Beispiel 8:

$$\begin{aligned}
5x^2 - 10x &= -10 && \mid +10 \\
5x^2 - 10x + 10 &= 0 && \mid :5 \\
x^2 - 2x + 2 &= 0 && \mid p\text{-}q\text{-Formel} \\
x_{1/2} &= 1 \pm \sqrt{1-2} \\
&= 2 \pm \sqrt{-1} && \mid \text{keine reelle Lösung!} \\
L &= \{\ \}
\end{aligned}$$

Da für die Wurzel keine (reelle) Lösung existiert, gibt es keine einzige Lösung! Die Lösungsmenge ist die leere Menge.

2.3 Lösung mit „Mitternachtsformel“

Anmerkung: Die Formel wird gern als *Mitternachtsformel* bezeichnet, weil „Schüler sie aufsagen können sollen, selbst wenn man sie um Mitternacht weckt und sie nach der Formel fragt.“

Möchte man eine Quadratische Gleichung lösen, die in der Normalform angegeben ist, bietet sich diese Formel an. Die Normalform sieht so aus:

$$\text{Normalform: } \boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

Ich löse diese Gleichung mit der p-q-Formel und erhalte dadurch die Mitternachtsformel.

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 && \mid : a \\
x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} &= 0 \\
x_{1/2} &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \\
&= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}} \\
x_{1/2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Damit haben wir die **Mitternachtsformel** als Lösung der Normalform erhalten:

$$\boxed{x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Anmerkung: Mit dieser Formel haben wir eine weitere Möglichkeit für die Lösung einer Quadratischen Gleichung in die Hand bekommen. Welche man verwendet, ist eher eine Frage des persönlichen Geschmacks. Nachfolgend möchte ich an einem Beispiel die Lösung mit beiden Formeln zeigen, damit sich jeder davon ein Bild machen kann.

Beispielaufgabe

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

Lösung mit der p-q-Formel:

$$\begin{aligned}
3x^2 - 5x - 2 &= 0 \qquad\qquad\qquad | : 3 \\
x^2 - \frac{5}{3} \cdot x - \frac{2}{3} &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{5}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{2}{3}} \\
&= \frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} + \frac{24}{36}} \\
&= \frac{5}{6} \pm \frac{7}{6}
\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{5}{6} + \frac{7}{6} = 2 \qquad x_2 = \frac{5}{6} - \frac{7}{6} = -\frac{1}{3}$$

Lösung mit der Mitternachtsformel:

$$\begin{aligned}
3x^2 - 5x - 2 &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} \\
&= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} \\
&= \frac{5 \pm 7}{6}
\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{5+7}{6} = 2 \qquad x_2 = \frac{5-7}{6} = -\frac{1}{3}$$

Welchen Lösungsweg man als einfacher empfindet, ist letztlich Geschmacksache. Ich persönlich bevorzuge die p-q-Formel, weil ich mir die leichter merken kann. Nachteilig ist daran nur, dass man daran denken muss, dass man im ersten Schritt den eventuell vorhandenen Koeffizienten vor x^2 verschwinden lassen muss (bzw. zu 1 machen muss).

2.4 Lösung mit dem Satz von Vieta

Gehen wir zunächst einmal davon aus, dass eine Quadratische Gleichung in der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

die beiden Lösungen x_1 und x_2 hat. Dann gelten folgende Beziehungen zwischen p, q, x_1 und x_2.

$$\boxed{x_1 + x_2 = -p \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = q}$$

Mit der Kenntnis dieser Zusammenhänge kann man bei relativ einfachen Quadratischen Gleichungen durch „scharfes Hinsehen" auf die Lösung kommen. Das klappt aber nur bei ganzzahligen Lösungen. Ein Beispiel dazu:

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

Man schaut zuerst auf q und fragt sich, in welche Faktoren es zerlegt werden kann. Hier sind es z. B. die 3 und die 5. (Alternativ auch -3 und -5 und natürlich auch 1 und 15 bzw. -1 und -15.) Dann schaut man, ob die Summe $-p$ ergibt. Wenn es passt, hat man schon die beiden Lösungen. Hier wäre $3 + 5 = 8 = -p$, also schon der Treffer mit den Lösungen $x_1 = 3$ und $x_2 = 5$.

Wenn q **positiv** ist, haben beide Lösungen das gleiche Vorzeichen, ist es **negativ**, sind die Vorzeichen verschieden. Auch hierzu ein Beispiel:

$$x^2 - 5x - 14 = 0$$

Die Zahl 14 läst sich zerlegen in z. B. $2 \cdot 7$. Weil q negativ ist, kommen als Lösungen hiermit also $+2$ und -7 oder -2 und $+7$ infrage. Addiert man die vermuteten Lösungen, so erhält man:

$$+2 - 7 = -5$$

Das Ergebnis ist p, nicht $-p$. Also sind die vorzeichenmäßig entgegengesetzten Werte $x_1 = -2$ und $x_2 = 7$ die Lösungen.

Ein weiteres Beispiel:

$$2x^2 + 14x - 16 = 0$$

Diese Gleichung liegt **nicht** in Normalform vor. Wir haben vor dem x^2 eine 2. Die Gleichung muss also erst durch 2 dividiert werden. Wer hinreichend pfiffig ist, weiß hier auch schon ohne Hinschreiben, dass dann $p = 7$ und $q = -8$ ist. Teiler von 8 sind die Zahlen 1, 2, 4 und 8 sowie die zugehörigen negativen Werte. Weil q negativ ist, müssen x_1 und x_2 unterschiedliche Vorzeichen haben. Als Paarungen kommen damit zunächst in Frage:

$$\{1; -8\} \quad \{-1; 8\} \quad \{2; -4\} \quad \{-2; 4\}$$

Man muss also nur noch maximal 4 Additionen im Kopf durchführen, bis man zur Lösungsmenge $L = \{1; -8\}$ kommt.

Es folgen Übungsaufgaben und nachfolgend die zugehörigen Lösungen. Hier wird die Lösung mit dem Satz von Vieta nicht explizit dargestellt, ist aber vielfach anwendbar.

3 Übungsaufgaben zu Quadratische Gleichungen

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der nachfolgenden Quadratischen Gleichungen!

3.1 Aufgabe 1

$x^2 - 6x + 8 = 0$

3.2 Aufgabe 2

$x^2 + 5x - 6 = 0$

3.3 Aufgabe 3

$x^2 + 7x + 10 = 0$

3.4 Aufgabe 4

$x^2 - 6x = 0$

3.5 Aufgabe 5

$x^2 - x - 6 = 0$

3.6 Aufgabe 6

$x^2 + 10 = 11x$

3.7 Aufgabe 7

$7x^2 + 42x + 63 = 0$

3.8 Aufgabe 8

$14x - x^2 = 24$

3.9 Aufgabe 9

$-x^2 + 6x - 13 = 0$

3.10 Aufgabe 10

$x^2 = -2x + 8$

3.11 Aufgabe 11

$12x^2 - 7x = -1$

3.12 Aufgabe 12

$2x - x^2 = 15$

3.13 Aufgabe 13

$16x^2 + 3 = 16x$

3.14 Aufgabe 14

$9x^2 = 6x - 1$

3.15 Aufgabe 15

$2x - x^2 = -15$

3.16 Aufgabe 16

$(x - 6) \cdot x = -5$

3.17 Aufgabe 17

$\frac{1}{2}x^2 + 20 - 7x = 0$

3.18 Aufgabe 18

$x + 4 - \frac{5}{x} = 0$

3.19 Aufgabe 19

$(2x - 6) \cdot (x + 4) = 0$

3.20 Aufgabe 20

$(x + 2)^2 = 9$

3.21 Aufgabe 21

$\frac{20-2x}{3} + \frac{10}{x+3} = 3$

4 Ergebnisse der Übungsaufgaben

4.1 Aufgabe 1

$L = \{2; 4\}$

4.2 Aufgabe 2

$L = \{-6; 1\}$

4.3 Aufgabe 3

$L = \{-5; -2\}$

4.4 Aufgabe 4

$L = \{0; 6\}$

4.5 Aufgabe 5

$L = \{-2; 3\}$

4.6 Aufgabe 6

$L = \{1; 10\}$

4.7 Aufgabe 7

$L = \{-3\}$

4.8 Aufgabe 8

$L = \{2; 12\}$

4.9 Aufgabe 9

$L = \{\ \}$

4.10 Aufgabe 10

$L = \{-4; 2\}$

4.11 Aufgabe 11

$L = \{\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\}$

4.12 Aufgabe 12

$L = \{\ \}$

4.13 Aufgabe 13

$L = \{\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\}$

4.14 Aufgabe 14

$L = \{\frac{1}{3}\}$

4.15 Aufgabe 15

$L = \{-3; 5\}$

4.16 Aufgabe 16

$L = \{1; 5\}$

4.17 Aufgabe 17

$L = \{4; 10\}$

4.18 Aufgabe 18

$L = \{-5; 1\}$

4.19 Aufgabe 19

$L = \{-4; 3\}$

4.20 Aufgabe 20

$L = \{-5; 1\}$

4.21 Aufgabe 21

$L = \{-4{,}5|7\}$

5 Lösungen der Übungsaufgaben mit Lösungsweg

5.1 Aufgabe 1

$$\begin{aligned}
x^2 - 6x + 8 &= 0 \\
x_{1/2} &= 3 \pm \sqrt{9-8} \\
&= 3 \pm 1 \\
x_1 &= 2 \\
x_2 &= 4 \\
L &= \{2; 4\}
\end{aligned}$$

5.2 Aufgabe 2

$$\begin{aligned}
x^2 + 5x - 6 &= 0 \\
x_{1/2} &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{24}{4}} \\
&= -\frac{5}{2} \pm \frac{7}{2} \\
x_1 &= -\frac{5}{2} - \frac{7}{2} = -\frac{12}{2} = -6 \\
x_2 &= -\frac{5}{2} + \frac{7}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\
L &= \{-6; 1\}
\end{aligned}$$

5.3 Aufgabe 3

$$\begin{aligned}
x^2 + 7x + 10 &= 0 \\
x_{1/2} &= -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{40}{4}} \\
&= -\frac{7}{2} \pm \frac{3}{2} \\
x_1 &= -\frac{7}{2} + \frac{3}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \\
x_2 &= -\frac{7}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{10}{2} = -5 \\
L &= \{-5; -2\}
\end{aligned}$$

5.4 Aufgabe 4

$$\begin{aligned}
x^2 - 6x &= 0 \\
x_{1/2} &= 3 \pm \sqrt{9-0} \\
x_{1/2} &= 3 \pm 3 \\
x_1 &= 3+3=6 \\
x_2 &= 3-3=0 \\
L &= \{0;6\}
\end{aligned}$$

5.5 Aufgabe 5

$$\begin{aligned}
x^2 - x - 6 &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} \\
&= \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \\
x_1 &= \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\
x_2 &= \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \\
L &= \{-2;3\}
\end{aligned}$$

5.6 Aufgabe 6

$$\begin{aligned}
x^2 + 10 &= 11x && | - 11x \\
x^2 - 11x + 10 &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} - \frac{40}{4}} \\
&= \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}} \\
&= \frac{11}{2} \pm \frac{9}{2} \\
x_1 &= \frac{11}{2} + \frac{9}{2} = \frac{20}{2} = 10 \\
x_2 &= \frac{11}{2} - \frac{9}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\
L &= \{1;10\}
\end{aligned}$$

5.7 Aufgabe 7

$$\begin{aligned}
7x^2 + 42x + 63 &= 0 && |:7\\
x^2 + 6x + 9 &= 0\\
x_{1/2} &= -3 \pm \sqrt{9-9}\\
x &= -3\\
L &= \{-3\}
\end{aligned}$$

5.8 Aufgabe 8

$$\begin{aligned}
14x - x^2 &= 24 && |-24 \text{ (und umsortieren)}\\
-x^2 + 14x - 24 &= 0 && |\cdot(-1)\\
x^2 - 14x + 24 &= 0\\
x_{1/2} &= 7 \pm \sqrt{49-24}\\
&= 7 \pm \sqrt{25}\\
&= 7 \pm 5\\
x_1 &= 7 + 5 = 12\\
x_2 &= 7 - 5 = 2\\
L &= \{2; 12\}
\end{aligned}$$

5.9 Aufgabe 9

$$\begin{aligned}
-x^2 + 6x - 13 &= 0 && |\cdot(-1)\\
x^2 - 6x + 13 &= 0\\
x_{1/2} &= 3 \pm \sqrt{9-13}\\
x_{1/2} &= 3 \pm \sqrt{-4} && |\text{ keine reelle Lösung!}\\
L &= \{\ \}
\end{aligned}$$

5.10 Aufgabe 10

$$\begin{aligned}
x^2 &= -2x + 8 && |+2x-8\\
x^2 + 2x - 8 &= 0\\
x_{1/2} &= -1 \pm \sqrt{1+8}\\
&= -1 \pm \sqrt{9}\\
&= -1 \pm 3\\
x_1 &= -1 + 3 = 2\\
x_2 &= -1 - 3 = -4\\
L &= \{-4; 2\}
\end{aligned}$$

5.11 Aufgabe 11

$$\begin{aligned}
12x^2 - 7x &= -1 && \mid +1 \\
12x^2 - 7x + 1 &= 0 && \mid :12 \\
x^2 - \frac{7}{12}x + \frac{1}{12} &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{7}{24} \pm \sqrt{\frac{49}{576} - \frac{48}{576}} \\
&= \frac{7}{24} \pm \sqrt{\frac{1}{576}} \\
&= \frac{7}{24} \pm \frac{1}{24} \\
x_1 &= \frac{7}{24} + \frac{1}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3} \\
x_2 &= \frac{7}{24} - \frac{1}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} \\
L &= \left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right\}
\end{aligned}$$

5.12 Aufgabe 12

$$\begin{aligned}
2x - x^2 &= 15 && \mid -15 \text{ (und umsortieren)} \\
-x^2 + 2x - 15 &= 0 && \mid \cdot (-1) \\
x^2 - 2x + 15 &= 0 \\
x_{1/2} &= 1 \pm \sqrt{1 - 15} \\
&= 1 \pm \sqrt{-14} && \mid \text{Wurzel nicht reell zu bestimmen!} \\
L &= \{\ \}
\end{aligned}$$

5.13 Aufgabe 13

$$\begin{aligned}
16x^2+3 &= 16x && \mid -16x\\
16x^2-16x+3 &= 0 && \mid :16\\
x^2-x+\frac{3}{16} &= 0\\
x_{1/2} &= \frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{3}{16}}\\
&= \frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{4}{16}-\frac{3}{16}}\\
&= \frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{16}}\\
&= \frac{1}{2}\pm\frac{1}{4}\\
&= \frac{2}{4}\pm\frac{1}{4}\\
x_1 &= \frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\\
x_2 &= \frac{2}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\\
L &= \left\{\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right\}
\end{aligned}$$

5.14 Aufgabe 14

$$\begin{aligned}
9x^2 &= 6x-1 && \mid -6x+1\\
9x^2-6x+1 &= 0 && \mid :9\\
x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9} &= 0\\
x_{1/2} &= \frac{1}{3}\pm\sqrt{\frac{1}{9}-\frac{1}{9}}\\
x &= \frac{1}{3}\\
L &= \left\{\frac{1}{3}\right\}
\end{aligned}$$

5.15 Aufgabe 15

$$\begin{aligned}
2x - x^2 &= -15 && | +15 \text{ (und umsortieren)} \\
-x^2 + 2x + 15 &= 0 && | \cdot (-1) \\
x^2 - 2x - 15 &= 0 \\
x_{1/2} &= 1 \pm \sqrt{1+15} \\
&= 1 \pm \sqrt{16} \\
&= 1 \pm 4 \\
x_1 &= 1 + 4 = 5 \\
x_2 &= 1 - 4 = -3 \\
L &= \{-3; 5\}
\end{aligned}$$

5.16 Aufgabe 16

$$\begin{aligned}
(x-6) \cdot x &= -5 && | +5 \text{ (und Klammer auflösen)} \\
x^2 - 6x + 5 &= 0 \\
x_{1/2} &= 3 \pm \sqrt{9-5} \\
&= 3 \pm \sqrt{4} \\
&= 3 \pm 2 \\
x_1 &= 3 + 2 = 5 \\
x_2 &= 3 - 2 = 1 \\
L &= \{1; 5\}
\end{aligned}$$

5.17 Aufgabe 17

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}x^2 + 20 - 7x &= 0 && | \cdot 2 \\
x^2 + 40 - 14x &= 0 && | \text{ umsortieren} \\
x^2 - 14x + 40 &= 0 \\
x_{1/2} &= 7 \pm \sqrt{49-40} \\
&= 7 \pm \sqrt{9} \\
&= 7 \pm 3 \\
x_1 &= 7 + 3 = 10 \\
x_2 &= 7 - 3 = 4 \\
L &= \{4; 10\}
\end{aligned}$$

5.18 Aufgabe 18

$$\begin{aligned}
x+4-\frac{5}{x} &= 0 && \mid \cdot x\\
x^2+4x-5 &= 0\\
x_{1/2} &= -2\pm\sqrt{4+5}\\
&= -2\pm\sqrt{9}\\
&= -2\pm 3\\
x_1 &= -2+3=1\\
x_2 &= -2-3=-5\\
L &= \{-5;1\}
\end{aligned}$$

5.19 Aufgabe 19

$$\begin{aligned}
(2x-6)\cdot(x+4) &= 0 && \mid \text{Klammern ausmultiplizieren}\\
2x^2+8x-6x-24 &= 0 && \mid \text{zusammenfassen}\\
2x^2+2x-24 &= 0 && \mid :2\\
x^2+x-12 &= 0\\
x_{1/2} &= -\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{48}{4}}\\
&= -\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}}\\
&= -\frac{1}{2}\pm\frac{7}{2}\\
x_1 &= -\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=\frac{6}{2}=3\\
x_1 &= -\frac{1}{2}-\frac{7}{2}=-\frac{8}{2}=-4\\
L &= \{-4;3\}
\end{aligned}$$

5.20 Aufgabe 20

$$\begin{aligned}
(x+2)^2 &= 9 && \mid \text{Klammer auflösen (Binomische Formel)} \\
x^2+4x+4 &= 9 && \mid -9 \\
x^2+4x-5 &= 0 \\
x_{1/2} &= -2 \pm \sqrt{4+5} \\
&= -2 \pm \sqrt{9} \\
&= -2 \pm 3 \\
x_1 &= -2+3 = 1 \\
x_2 &= -2-3 = -5 \\
L &= \{-5; 1\}
\end{aligned}$$

5.21 Aufgabe 21

$$\frac{4}{7x-8}+\frac{x}{15}=3$$

In dieser Gleichung haben wir Brüche. Für solche Fälle hilft immer das Standardrezept:

Man multipliziert die Gleichung mit dem Hauptnenner.

Die Frage ist nur: Wie heißt der Hauptnenner[3]? Wenn man das nicht weiß, kann man auch einzeln mit **jedem** Nenner multiplizieren. In dieser Aufgabe ist der Hauptnenner tatsächlich das Produkt der beiden Nenner.

$$\begin{aligned}
\frac{20-2x}{3}+\frac{10}{x+3} &= 3 && \mid\cdot 3\cdot(x+3)\\
\frac{20-2x}{3}\cdot 3\cdot(x+3)+\frac{10}{x+3}\cdot 3\cdot(x+3) &= 3\cdot 3\cdot(x+3)\\
(20-2x)\cdot(x+3)+10\cdot 3 &= 9\cdot(x+3)\\
20x+60-2x^2-6x+30 &= 9x+27\\
-2x^2+14x+90 &= 9x+27 && \mid -9x-27\\
-2x^2+5x+63 &= 0 && \mid :(-2)\\
x^2-\frac{5}{2}x-\frac{63}{2} &= 0 && \mid p\text{-}q\text{-Formel}\\
x_{1/2} &= \frac{5}{4}\pm\sqrt{\frac{25}{16}+\frac{504}{16}}\\
&= \frac{5}{4}\pm\sqrt{\frac{529}{16}}\\
&= \frac{5}{4}\pm\frac{23}{4}\\
x_1 &= \frac{5}{4}+\frac{23}{4}=\frac{28}{4}=7\\
x_2 &= \frac{5}{4}-\frac{23}{4}=-\frac{18}{4}=-4{,}5\\
L &= \{-4{,}5|7\}
\end{aligned}$$

[3]Einzelheiten zur Hauptnennersuche siehe hier in Kapitel 2.3: https://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/bruch.pdf

6 Spezielle Lösungswege zu bestimmten Aufgaben

Wer etwas pfiffig ist, dem wird nicht entgangen sein, dass einige Aufgaben auch etwas einfacher zu lösen sind. Dies betrifft die Aufgaben 4 und 20. Die alternativen Lösungen will ich hier vorstellen.

6.1 Aufgabe 4

$$\begin{aligned} x^2 - 6x &= 0 \qquad | \; x \text{ ausklammern} \\ x \cdot (x - 6) &= 0 \end{aligned}$$

Ein Produkt ist (bekanntlich) genau dann $= 0$, wenn einer der Faktoren $= 0$ ist. Es ist also entweder $x = 0$ oder $x - 6 = 0$. Damit erhalten wir sofort die Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = 6$.

Achtung! Ein oft gemachter Fehler ist der, dass man die Gleichung sofort durch x dividiert. Dabei geht dann die Lösung $x = 0$ verloren, denn man dividiert in dem Fall durch Null, ohne es zu merken.

6.2 Aufgabe 20

$$\begin{aligned} (x + 2)^2 &= 9 \qquad | \sqrt{} \\ x + 2 &= \pm 3 \qquad | - 2 \\ x_{1/2} &= -2 \pm 3 \end{aligned}$$

Achtung! Ein oft gemachter Fehler ist der, dass man beim Wurzelziehen vergisst, dass es ja zwei Lösungen gibt, eine mit $+$, eine mit $-$.

Welchen Lösungsweg man verwendet, entscheidet natürlich jeder selbst. Wem das elegante pfiffige Verfahren nicht einfällt, der findet natürlich mit dem Standardverfahren auch immer die Lösung.