Lehrsatz des Pythagoras

W. Kippels

11. Februar 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

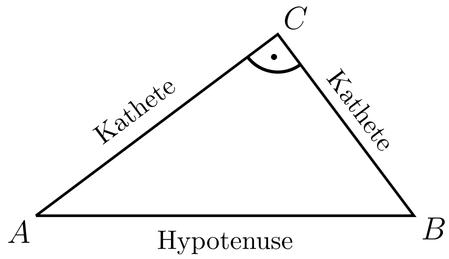
> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Einleitung

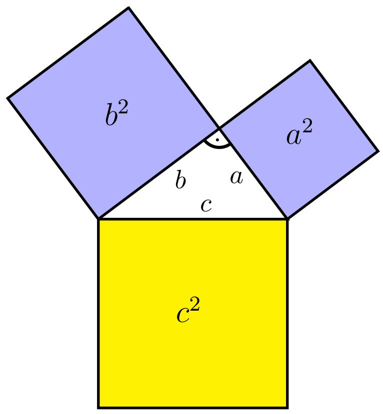
Dieses Dokument soll kein Lehrbuch ersetzen, ich möchte nur die wesentlichen Dinge kurz zusammenfassen, um anschließend mit einigen Beispielen das Ganze anwendungsbezogen verständlich zu machen.



Der Satz des Pythagoras beschäftigt sich mit den drei Seitenlängen eines **Rechtwinkligen** Dreieckes. Die beiden Seiten, die die Schenkel des Rechten Winkels bilden, heißen **Katheten**, die Seite, die dem Rechten Winkel **gegenüber** liegt, nennt man **Hypotenuse**.[1] Die Hypotenuse ist auch die längste Dreieckseite.

3 Der Lehrsatz

Nebenstehend ist der Lehrsatz des Pythagoras mit den drei quadratischen Flächen a^2, b^2 und c^2 abgebildet. Manche Leute merken sich am besten diese bildhafte Form.



Viele merken sich den Satz des Pythagoras gern in der Form einer Formel. Wenn man das tun möchte, dann muss man zunächst die Dreieckseiten mit einem Formelzeichen bezeichnen. Ich lege folgende Bezeichnungen fest:
a : erste Kathete
b : zweite Kathete
c : Hypotenuse
Mit diesen Bezeichnungen kann der Satz des Pythagoras als Formel aufgeschrieben werden. Wichtig ist dabei immer, dass man darauf achtet, dass beim Anwenden dieses Satzes **immer c die Hypotenuse** ist. **Nur dann gilt der Lehrsatz des Pythagoras mit dieser Formel:**

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Der Lehrsatz des Pythagoras kann auch in Textform angegeben werden:

> ***Die Summe der Kathetenquadrate ist gleich dem Hypotenusenquadrat.***

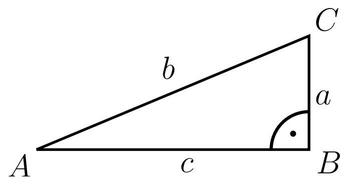
[1] Eine Merkregel zur Rechtschreibung: Sowohl **Kathete** als auch **Hypotenuse** schreibt man mit genau einem **h**.

4 Übungsaufgaben

4.1 Aufgabe 1

In nebenstehendem Rechtwinkligen Dreieck sind folgende Seiten bekannt:

$a = 2{,}5\,\text{cm}$
$c = 6\,\text{cm}$

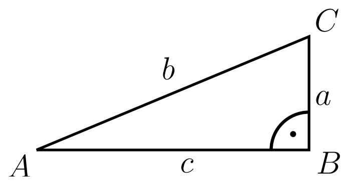


Berechnen Sie die Länge der Seite b!

4.2 Aufgabe 2

In nebenstehendem Rechtwinkligen Dreieck sind folgende Seiten bekannt:

$a = 4\,\text{cm}$
$b = 10{,}4\,\text{cm}$

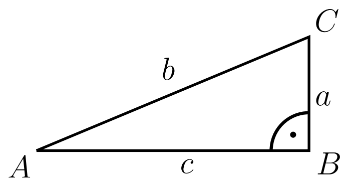


Berechnen Sie die Länge der Seite c!

4.3 Aufgabe 3

In nebenstehendem Rechtwinkligen Dreieck sind folgende Seiten bekannt:

$b = 26\,\text{cm}$
$c = 24\,\text{cm}$



Berechnen Sie die Länge der Seite a!

4.4 Aufgabe 4

Die Ägypter benötigten beim Bau ihrer Pyramiden mit quadratischem Grundriss ein Hilfsmittel, um im Gelände einen Rechten Winkel zu markieren. Dazu verwendeten sie ein Seil, an dem sich in gleichen Abständen hinreichend viele Knoten befanden. Dann legten sie das Seil in Dreieckform auf den Boden, wobei eine Seite drei Knotenlängen, die zweite Seite vier Knotenlängen und die dritte 5 Knotenlängen lang war. Sie waren davon überzeugt, dass sie einen Rechten Winkel erhielten, wenn sie das Seil strammgezogen in Dreieckform auf den Boden legten. Prüfen Sie die Vermutung der Ägypter durch eine Rechnung nach!

5 Ergebnisse der Übungsaufgaben

5.1 Aufgabe 1

$b = 6{,}5\,\mathrm{cm}$

5.2 Aufgabe 2

$c = 9{,}6\,\mathrm{cm}$

5.3 Aufgabe 3

$a = 10\,\mathrm{cm}$

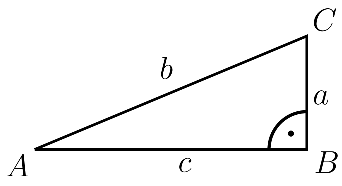
5.4 Aufgabe 4

$3^2 + 4^2 = 5^2$

6 Lösungen der Übungsaufgaben

6.1 Aufgabe 1

In nebenstehendem Rechtwinkligen Dreieck sind folgende Seiten bekannt:



$a = 2{,}5\,\text{cm}$
$c = 6\,\text{cm}$

Berechnen Sie die Länge der Seite b!

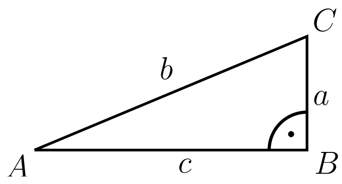
Lösung: Die gesuchte Seite b ist die Hypotenuse. Damit lautet der Satz des Pythagoras wie folgt:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 && |\sqrt{\ } \\ b &= \sqrt{a^2 + c^2} \\ &= \sqrt{(2{,}5\,\text{cm})^2 + (6\,\text{cm})^2} \\ &= \sqrt{42{,}25\,\text{cm}^2} \\ b &= 6{,}5\,\text{cm} \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Seite b ist 6,5 Zentimeter lang.

6.2 Aufgabe 2

In nebenstehendem Rechtwinkligen Dreieck sind folgende Seiten bekannt:



$a = 4\,\text{cm}$
$b = 10{,}4\,\text{cm}$

Berechnen Sie die Länge der Seite c!

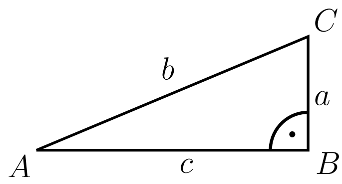
Lösung: Die gegebene Seite b ist die Hypotenuse. Die Formel für den Satz des Pythagoras muss daher noch nach c umgestellt werden.

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 &= b^2 && | - a^2 \\ c^2 &= b^2 - a^2 && |\sqrt{\ } \\ c &= \sqrt{b^2 - a^2} \\ &= \sqrt{(10{,}4\,\text{cm})^2 - (4\,\text{cm})^2} \\ &= \sqrt{92{,}16\,\text{cm}^2} \\ c &= 9{,}6\,\text{cm} \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Seite c ist 9,6 Zentimeter lang.

6.3 Aufgabe 3

In nebenstehendem Rechtwinkligen Dreieck sind folgende Seiten bekannt:



$b = 26\,\text{cm}$
$c = 24\,\text{cm}$

Berechnen Sie die Länge der Seite a!

Lösung: Die gegebene Seite b ist die Hypotenuse. Die Formel für den Satz des Pythagoras muss daher noch nach a umgestellt werden.

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 &= b^2 && |-c^2 \\ a^2 &= b^2 - c^2 && |\sqrt{\ } \\ a &= \sqrt{b^2 - c^2} \\ &= \sqrt{(26\,\text{cm})^2 - (24\,\text{cm})^2} \\ &= \sqrt{100\,\text{cm}^2} \\ a &= 10\,\text{cm} \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Seite a ist 10 Zentimeter lang.

6.4 Aufgabe 4

Die Ägypter benötigten beim Bau ihrer Pyramiden mit quadratischem Grundriss ein Hilfsmittel, um im Gelände einen Rechten Winkel zu markieren. Dazu verwendeten sie ein Seil, an dem sich in gleichen Abständen hinreichend viele Knoten befanden. Dann legten sie das Seil in Dreieckform auf den Boden, wobei eine Seite drei Knotenlängen, die zweite Seite vier Knotenlängen und die dritte 5 Knotenlängen lang war. Sie waren davon überzeugt, dass sie einen Rechten Winkel erhielten, wenn sie das Seil strammgezogen in Dreieckform auf den Boden legten. Prüfen Sie die Vermutung der Ägypter durch eine Rechnung nach!

Lösung: Nennen wir die Dreieckseiten a, b und c. Gerechtet wird in der Einheit „Knotenlänge“.

$$\begin{aligned} a &= 3 \\ b &= 4 \\ c &= 5 \end{aligned}$$

Die Seite c ist die längste und damit die Hypotenuse, falls das Dreieck tatsächlich **rechtwinklig** ist. Dann müsste der Satz des Pythagoras gelten:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &\stackrel{?}{=} c^2 \\ 3^2 + 4^2 &\stackrel{?}{=} 5^2 \\ 9 + 16 &\stackrel{?}{=} 25 \\ 25 &= 25 \end{aligned}$$

Ergebnis: Das Seildreieck hat einen Rechten Winkel zwischen den beiden kürzeren Seilstücken.