Polynomdivision

W. Kippels

22. November 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Lösungsprinzip

2.1 Grundmuster einer Polynomdivision

Was ist ein Polynom? Ein Polynom ist ein Term, der sich in folgender Form schreiben lässt:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Dabei wird n **Grad des Polynoms** genannt. **n** ist die **höchste vorkommende Potenz** von x.

Anschaulicher ist vielleicht ein Beispiel. Nachfolgend ist ein **Polynom 3. Grades** dargestellt.

$$2x^3 - 4x^2 + 5x - 3$$

Auch solche Terme lassen sich – wie Zahlen – durcheinander dividieren. Wie bei Zahlen auch geht die Division aber nicht immer ohne „Rest“ auf. Zunächst wollen wir uns aber nur mit Aufgaben beschäftigen, die „glatt“ aufgehen.

Hier ein Beispiel. Wir wollen dividieren:

$$(2x^2 - 14x + 20) : (x - 2) = ?$$

Um das Verfahren zu verstehen, wollen wir uns an die Grundschulzeit erinnern. Wir haben damals die schriftliche Division mit mehrstelligen Zahlen gelernt. Wir sehen uns das an einem Beispiel an. Wir wollen dividieren:

$$288 \quad : \quad 12 \quad = \quad ?$$

Die zugehörige Rechnung läuft folgendermaßen ab: Man dividiert die erste Ziffer der ersten Zahl (des Dividenden, also die 2 von der 288) durch die erste Ziffer der zweiten Zahl (des Divisors, also die 1 von der 12) und schreibt das Ergebnis hinter das Gleichheitszeichen:

$$288 \quad : \quad 12 \quad = \quad 2$$

Dann multipliziert man das Ergebnis mit dem Divisor (der zweiten Zahl) und schreibt das Ergebnis mit einem Minuszeichen davor unter die erste Zahl.

$$\begin{array}{rcccc} 288 & : & 12 & = & 2 \\ -24 & & & & \end{array}$$

Anschließend wird dieses Ergebnis vom Dividenden subtrahiert.

$$\begin{array}{rcccc} 288 & : & 12 & = & 2 \\ -24 & & & & \\ \hline 48 & & & & \end{array}$$

Es ist nach der ersten Division ein „Rest“ von 48 übrig geblieben. Mit diesem wird nun die Division fortgesetzt. Wieder wird die erste Ziffer (hier die 4) durch die erste Ziffer des Dividenden (die 1) geteilt. Das Ergebnis (eine 4) wird hinter das bisherige Ergebnis geschrieben.

$$\begin{array}{rcccc} 288 & : & 12 & = & 24 \\ -24 & & & & \\ \hline 48 & & & & \end{array}$$

Auch diese 4 muss nun mit dem Dividenden multipliziert und unter den Rest geschrieben werden. Man subtrahiert diese Zahl und es bleibt kein Rest, wenn die Division aufgegangen ist.

$$\begin{array}{rcccc} 288 & : & 12 & = & 24 \\ -24 & & & & \\ \hline 48 & & & & \\ -48 & & & & \\ \hline 0 & & & & \end{array}$$

In dieser Form haben wir es damals in der Grundschule gelernt.

Nach dem gleichen Muster läuft auch eine Polynomdivision ab. Der Unterschied liegt lediglich darin, dass im einen Fall mit Zahlen und im anderen mit Buchstaben gerechnet wird.

Damit die eben dargestellte Rechnung besser auf ein Polynom übertragen werden kann, zerlege ich die Zahlen nun in Zehnerpotenzen. Die Ziffern der arabischen Zahlen bedeuten ja, dass sie mit 10^0, 10^1, 10^2, ... multipliziert werden sollen – in Abhängigkeit von der Position der Ziffern in der Zahl. Beispielsweise ist 288 eine abgekürzte Schreibweise für:

$$2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

Mit dieser Schreibweise führe ich die Rechnung der vorstehenden Division erneut vor:

$$\begin{array}{rrrcccccc} (2 \cdot 10^2 & +8 \cdot 10^1 & +8 \cdot 10^0) & : & (1 \cdot 10^1 & +2 \cdot 10^0) & = & 2 \cdot 10^1 & +4 \cdot 10^0 \\ -(2 \cdot 10^2 & +4 \cdot 10^1) & & & & & & & \\ \hline & 4 \cdot 10^1 & +8 \cdot 10^0 & & & & & & \\ & -(4 \cdot 10^1 & +8 \cdot 10^0) & & & & & & \\ \hline & & 0 & & & & & & \end{array}$$

Zugegeben, es sieht jetzt etwas „aufgebläht“ aus, aber der Zusammenhang ist hoffentlich noch erkennbar.

Ähnlich sieht die Rechnung aus, wenn wir eine **Polynomdivision** durchführen. Auch die Vorgehensweise ist entsprechend. Ich möchte das an dem anfangs vorgestellten Beispiel zeigen. Dividiert werden soll:

$$(2x^2 \quad -14x \quad +20) \quad : \quad (x \quad -2) \quad = \quad ?$$

Man beginnt wie bei der Division mit Zahlen. Man dividiert den ersten Summanden des ersten Polynoms (des Dividenden, also $2x^2$) durch den ersten Summanden des zweiten Polynoms (des Divisors, also x) und schreibt das Ergebnis hinter das Gleichheitszeichen:

$$(2x^2 \quad -14x \quad +20) \quad : \quad (x \quad -2) \quad = \quad 2x$$

Dann multipliziert man das Ergebnis mit dem Divisor (dem zweiten Polynom) und schreibt das Ergebnis mit einem Minuszeichen davor passend unter das erste Polynom, hier : $(x-2)\cdot 2x = 2x^2 - 4x$

$$\begin{array}{rrrcccccc} (2x^2 & -14x & +20) & : & (x & -2) & = & 2x \\ -(2x^2 & -4x) & & & & & & \end{array}$$

Anschließend wird dieses Ergebnis vom Dividenden subtrahiert.

$$\begin{array}{rrrcccccc} (2x^2 & -14x & +20) & : & (x & -2) & = & 2x \\ -(2x^2 & -4x) & & & & & & \\ \hline & -10x & +20 & & & & & \end{array}$$

Es ist nach der ersten Division ein „Rest“ von $(-10x + 20)$ übrig geblieben. Mit diesem wird nun die Division fortgesetzt. Wieder wird der erste Summand (hier: $-10x$) durch den ersten Summanden des Dividenden (hier: x) geteilt. Das Ergebnis (hier: -10) wird hinter das bisherige Ergebnis geschrieben.

$$\begin{array}{rrrccccccc} (2x^2 & -14x & +20) & : & (x & -2) & = & 2x & -10 \\ -(2x^2 & -4x) & & & & & & & \\ \hline & -10x & +20 & & & & & & \end{array}$$

Auch dieser Term -10 muss nun mit dem Dividenden multipliziert und unter den Rest geschrieben werden. Man subtrahiert diesen Term $-10 \cdot (x-2) = -10x + 20$ und es bleibt kein Rest, wenn die Division aufgegangen ist.

$$\begin{array}{rrrccccccc} (2x^2 & -14x & +20) & : & (x & -2) & = & 2x & -10 \\ -(2x^2 & -4x) & & & & & & & \\ \hline & -10x & +20 & & & & & & \\ - & (-10x & +20) & & & & & & \\ \hline & & 0 & & & & & & \end{array}$$

2.2 Spezielle Beispiele, „Fallen“

Das Grundprinzip der Polynomdivision dürfte damit klar sein. Es gibt aber noch ein paar „Fallen“ bei der Rechnung, auf die ich aufmerksam machen möchte. Auch das möchte ich wieder an Beispielen erläutern.

Sehen wir uns nachfolgende Aufgabe an:

$$(10x + 6x^2 - 4) : (3x - 1) = 2x + 4$$

Versuchen wir einmal, die Division zu beginnen.

$$\begin{array}{rrrcrrcl} (10x & +6x^2 & -4) & : & (3x & -1) & = & \frac{10}{3} \\ -(10x & -\frac{10}{3}) & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Das erste Problem entsteht schon dadurch, dass der Bruch $-\frac{10}{3}$ nicht zu dem Term $6x^2$ passt, unter dem er jetzt steht. Wir können diese beiden Terme nicht voneinander subtrahieren. Wir müssen ihn unter die -4 schreiben. Dann sieht das Ganze so aus:

$$\begin{array}{rrrcrrcl} (10x & +6x^2 & -4) & : & (3x & -1) & = & \frac{10}{3} \\ -(10x & & -\frac{10}{3}) & & & & & \\ \hline & 6x^2 & -\frac{2}{3} & & & & & \end{array}$$

Aber auch in dieser Form sieht das Ganze nicht gut aus. Führt man nämlich den nächsten Divisionsschritt durch, erhält man folgendes:

$$\begin{array}{rrrcrrcl} (10x & +6x^2 & -4) & : & (3x & -1) & = & \frac{10}{3} + 6x \\ -(10x & & -\frac{10}{3}) & & & & & \\ \hline & 6x^2 & -\frac{2}{3} & & & & & \\ - & (6x^2 & -6x) & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Jetzt haben wir schon wieder Terme untereinander stehen, die nicht zusammenpassen, nämlich $-\frac{2}{3}$ und $-6x$. Außerdem würde beim Subtrahieren wieder ein Term mit x entstehen, der eigentlich im ersten Schritt schon verschwunden war.

Brechen wir die Rechnung an dieser Stelle lieber ab, es führt zu nichts. Aber warum klappt das Schema jetzt nicht?

Hier ist der Dividend – der erste Klammerterm – nicht ordentlich sortiert. **Wenn man das in dieser Reihenfolge belässt, bekommt man große Probleme!** Es ist daher **zwingend erforderlich**, beide Polynome nach dem gleichen Kriterium zu sortieren, was die vorkommenden Potenzen von x angeht. Im Prinzip ist es dabei gleichgültig, ob man nach fallenden oder steigenden Potenzen sortiert. Führen wir das an unserem Beispiel durch und sortieren die höchsten Potenzen nach links, hier also den Term $6x^2$ nach vorn.

$$\begin{array}{rrrcrrcrr} (6x^2 & +10x & -4) & : & (3x & -1) & = & 2x & +4 \\ -(6x^2 & -2x) & & & & & & & \\ \hline & 12x & -4 & & & & & & \\ - & (12x & -4) & & & & & & \\ \hline & & 0 & & & & & & \end{array}$$

Na also, so es geht doch!

Ein anderes Problem tritt auf, wenn im Dividenden (dem ersten Polynom) eine Potenz von x nicht vorkommt. In diesem Fall findet der zu subtrahierende Term eventuell keinen „Partner“ von dem er subtrahiert werden kann. Auch hierzu ein Beispiel. Es soll berechnet werden:

$$(6x^2 - 24) : (2x - 4)$$

Ein Glied mit x (ohne Quadrat) kommt im Dividenden nicht vor. Man lässt dann beim Ansatz der Division einfach etwas Platz frei. Man könnte auch $+0x$ als Platzhalter ergänzen. Wer hinreichend faul ist, lässt es aber einfach weg. Dann sieht das ganze so aus:

$$\begin{array}{rrr}
(6x^2 & {\color{red}+0x} & -24) \\
-(6x^2 & -12x) & \\ \hline
 & 12x & -24 \\
- & (12x & -24) \\ \hline
 & & 0
\end{array}
\quad : \quad (2x \quad -4) \quad = \quad 3x \quad +6$$

Natürlich können die Polynome auch höheren Grades als nur 2 sein. Das Lösungsverfahren ändert sich dadurch nicht. Auch dazu ein Beispiel:

$$(x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 14x + 15) : (x^2 - 3x + 5) = \ldots$$

Wir lösen die Division nach dem gleichen Muster:

$$\begin{array}{rrrrr}
(x^4 & -4x^3 & +11x^2 & -14x & +15) \\
-(x^4 & -3x^3 & +5x^2) & & \\ \hline
 & -x^3 & +6x^2 & -14x & +15 \\
- & (-x^3 & +3x^2 & -5x) & \\ \hline
 & & 3x^2 & -9x & +15 \\
 & - & (3x^2 & -9x & +15) \\ \hline
 & & & & 0
\end{array}
\quad : \quad (x^2 \quad -3x \quad +5) \quad = \quad x^2 \quad -x \quad +3$$

3 Übungsaufgaben

3.1 Aufgabe 1

$$(x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = \ldots$$

3.2 Aufgabe 2

$$(2x^2 - 18x + 40) : (2x - 10) = \ldots$$

3.3 Aufgabe 3

$$(-6x^2 + 17x - 5) : (-2x + 5) = \ldots$$

3.4 Aufgabe 4

$$(4x^3 + 4x^2 - 33x + 7) : (2x + 7) = \ldots$$

3.5 Aufgabe 5

$$(3x^3 - 18x^2 - 78x + 9) : (x^2 - 9x + 1) = \ldots$$

3.6 Aufgabe 6

$$(8x^4 - 12x^3 - 18x^2 + 27x) : (9x - 4x^3) = \ldots$$

3.7 Aufgabe 7

$$(6x^4 - 48x^2 + 96) : (2x^2 - 8) = \ldots$$

3.8 Aufgabe 8

$$(5x^4 - 80) : (x^2 - 4) = \ldots$$

3.9 Aufgabe 9

$$(2x^6 - 5x^5 - x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 18x - 8) : (x^3 - 2x^2 - 3x + 4) = \ldots$$

3.10 Aufgabe 10

$$(6x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 6x + 3) : (2x^2 - 3) = \ldots$$

3.11 Aufgabe 11

$$(16x^4 - 72x^2 + 81) : (2x + 3) = \ldots$$

4 Ergebnisse der Übungsaufgaben

4.1 Aufgabe 1

$$(x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = x - 3$$

4.2 Aufgabe 2

$$(2x^2 - 18x + 40) : (2x - 10) = x - 4$$

4.3 Aufgabe 3

$$(-6x^2 + 17x - 5) : (-2x + 5) = 3x - 1$$

4.4 Aufgabe 4

$$(4x^3 + 4x^2 - 33x + 7) : (2x + 7) = 2x^2 - 5x + 1$$

4.5 Aufgabe 5

$$(3x^3 - 18x^2 - 78x + 9) : (x^2 - 9x + 1) = 3x + 9$$

4.6 Aufgabe 6

$$(8x^4 - 12x^3 - 18x^2 + 27x) : (9x - 4x^3) = -2x + 3$$

4.7 Aufgabe 7

$$(6x^4 - 48x^2 + 96) : (2x^2 - 8) = 3x^2 - 12$$

4.8 Aufgabe 8

$$(5x^4 - 80) : (x^2 - 4) = 5x^2 + 20$$

4.9 Aufgabe 9

$$(2x^6 - 5x^5 - x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 18x - 8) : (x^3 - 2x^2 - 3x + 4) = 2x^3 - x^2 + 3x - 2$$

4.10 Aufgabe 10

$$(6x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 6x + 3) : (2x^2 - 3) = 3x^2 + 2x - 1$$

4.11 Aufgabe 11

$$(16x^4 - 72x^2 + 81) : (2x + 3) = 8x^3 - 12x^2 - 18x + 27$$

5 Komplette Lösungen der Übungsaufgaben

5.1 Aufgabe 1:

$$\begin{array}{rrr}
(x^2 & -5x & +6) \\
-(x^2 & -3x) & \\
\hline
 & -2x & +6 \\
- & (-2x & +6) \\
\hline
 & & 0
\end{array} \quad : \quad (x-2) \quad = \quad x-3$$

5.2 Aufgabe 2

$$\begin{array}{rrr}
(2x^2 & -18x & +40) \\
-(2x^2 & -10x) & \\
\hline
 & -8x & +40 \\
- & (-8x & +40) \\
\hline
 & & 0
\end{array} \quad : \quad (2x-10) \quad = \quad x-4$$

5.3 Aufgabe 3

$$\begin{array}{rrr}
(-6x^2 & +17x & -5) \\
-(-6x^2 & +15x) & \\
\hline
 & 2x & -5 \\
 & -(2x & -5) \\
\hline
 & & 0
\end{array} \quad : \quad (-2x+5) \quad = \quad 3x-1$$

5.4 Aufgabe 4

$$\begin{array}{rrrr}
(4x^3 & +4x^2 & -33x & +7) \\
-(4x^3 & +14x^2) & & \\
\hline
 & -10x^2 & -33x & +7 \\
- & (-10x^2 & -35x) & \\
\hline
 & & 2x & +7 \\
 & & -(2x & +7) \\
\hline
 & & & 0
\end{array} \quad : \quad (2x+7) \quad = \quad 2x^2-5x+1$$

5.5 Aufgabe 5

$$
\begin{array}{rrrrcccc}
(3x^3 & -18x^2 & -78x & +9) & : & (x^2-9x+1) & = & 3x+9 \\
-(3x^3 & -27x^2 & +3x) & & & & & \\
\hline
 & 9x^2 & -81x & +9 & & & & \\
 & -(9x^2 & -81x & +9) & & & & \\
\hline
 & & & 0 & & & &
\end{array}
$$

5.6 Aufgabe 6

$$(8x^4 - 12x^3 - 18x^2 + 27x) : (9x - 4x^3) = \dots$$

Hier muss noch der Divisor nach fallender Potenz von x sortiert werden, bevor die Polynomdivision vorgenommen werden kann.

$$
\begin{array}{rrrrcccc}
(8x^4 & -12x^3 & -18x^2 & +27x) & : & (-4x^3+9x) & = & -2x+3 \\
-(8x^4 & & -18x^2) & & & & & \\
\hline
 & -12x^3 & & +27x & & & & \\
 & -(-12x^3 & & +27x) & & & & \\
\hline
 & & & 0 & & & &
\end{array}
$$

5.7 Aufgabe 7

$$
\begin{array}{rrrcccc}
(6x^4 & -48x^2 & +96) & : & (2x^2-8) & = & 3x^2-12 \\
-(6x^4 & -24x^2) & & & & & \\
\hline
 & -24x^2 & +96 & & & & \\
- & (-24x^2 & +96) & & & & \\
\hline
 & & 0 & & & &
\end{array}
$$

5.8 Aufgabe 8

$$
\begin{array}{rrrcccc}
(5x^4 & & -80) & : & (x^2-4) & = & 5x^2+20 \\
-(5x^4 & -20x^2) & & & & & \\
\hline
 & 20x^2 & -80 & & & & \\
- & (20x^2 & -80) & & & & \\
\hline
 & & 0 & & & &
\end{array}
$$

5.9 Aufgabe 9

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
(2x^6 & -5x^5 & -x^4 & +3x^3 & -9x^2 & +18x & -8) & : \ (x^3-2x^2-3x+4) \ = \ 2x^3-x^2+3x-2 \\
-(2x^6 & -4x^5 & -6x^4 & +8x^3) & & & & \\
\hline
 & -x^5 & +5x^4 & -5x^3 & -9x^2 & +18x & -8 & \\
- & (-x^5 & +2x^4 & +3x^3 & -4x^2) & & & \\
\hline
 & & 3x^4 & -8x^3 & -5x^2 & +18x & -8 & \\
 & - & (3x^4 & -6x^3 & -9x^2 & +12x) & & \\
\hline
 & & & -2x^3 & +4x^2 & +6x & -8 & \\
 & & - & (-2x^3 & +4x^2 & +6x & -8) & \\
\hline
 & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

5.10 Aufgabe 10

$$
\begin{array}{rrrrrl}
(6x^4 & +4x^3 & -11x^2 & -6x & +3) & : \ (2x^2-3) \ = \ 3x^2+2x-1 \\
-(6x^4 & & -9x^2) & & & \\
\hline
 & 4x^3 & -2x^2 & -6x & +3 & \\
- & (4x^3 & & -6x) & & \\
\hline
 & & -2x^2 & & +3 & \\
 & - & (-2x^2 & & +3) & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

5.11 Aufgabe 11

$$
\begin{array}{rrrrrl}
(16x^4 & & -72x^2 & & +81) & : \ (2x+3) \ = \ 8x^3-12x^2-18x+27 \\
-(16x^4 & +24x^3 & & & & \\
\hline
 & -24x^3 & -72x^2 & & +81 & \\
- & (-24x^3 & -36x^2) & & & \\
\hline
 & & -36x^2 & & +81 & \\
 & - & (-36x^2 & -54x) & & \\
\hline
 & & & 54x & +81 & \\
 & & - & (54x & +81) & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}
$$