Nullstellen von Polynomen

W. Kippels

6. August 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Was ist ein Polynom? Ein Polynom ist ein Term, der sich in dieser Form schreiben lässt:

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

Hierbei sind die Werte $a_0 \ldots a_n$ sogenannte **Parameter**, x ist die **Variable**. Die Zahl n als Exponent der höchsten vorkommenden Potenz gibt den **Grad** des Polynoms an. Hier ein Beispiel für ein Polynom:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2$$

Es handelt sich um ein Polynom 3. Grades, denn 3 ist die höchste vorkommende Potenz von x. In diesem Fall ist $a_3 = 1$, $a_2 = -2$, $a_1 = -1$ und $a_0 = 2$.

Was ist eine Nullstelle? Unter *Nullstelle eines Polynoms* versteht man einen Wert, den man für x einsetzen kann, damit das Polynom den Wert 0 ergibt.

Ein Poynom n-ten Grades kann bis zu n Nullstellen haben.

2 Nullstellenbestimmung eines Polynoms

Das Grundprinzip ist ganz einfach. Man setzt das Polynom gleich Null und löst die Gleichung nach x auf. Für unser Beispielpolynom sieht der Ansatz demnach so aus:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

Die Probleme treten erst zutage, wenn man versucht, die Gleichung nach x aufzulösen.

2.1 Nullstellenbestimmung für Polynome 1. und 2. Grades

Ganz einfach ist es für ein Polynom ersten Grades. Man erhält eine Lineare Gleichung, die man mit einfachen Methoden [1] umstellen kann. Bei einem Polynom zweiten Grades wird es schon etwas komplizierter. Aber auch das ist analytisch lösbar. Beispielsweise hilft die p-q-Formel [2] weiter.

2.2 Nullstellenbestimmung für Polynome ab 3. Grades

Hier gibt es leider kein analytisches Verfahren. Man kann jedoch versuchen, durch „planvolles Raten“ zumindest eine Nullstelle zu ermitteln. Als Hilfe dient nachfolgender Lehrsatz:

[1] Einzelheiten dazu siehe hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/gleich00.pdf
[2] Einzelheiten dazu siehe hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/quad.pdf

Falls es eine **ganzzahlige** Nullstelle gibt, dann ist sie **Teiler des absoluten Gliedes.**

Was bedeutet das? Am besten sehen wir uns dazu unser Beispielpolynom an.

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

Das „absolute Glied“ ist der Parameter ohne x. Das ist in diesem Beispiel die 2. Als Teiler kommen in Frage: ± 1 und ± 2 – mit 3 oder 5 braucht man es daher garnicht erst zu versuchen. Nach maximal vier Versuchen hat man in diesem Beispiel eine ganzzahlige Lösung gefunden – falls es überhaupt eine gibt. Das gilt leider immer als Einschränkung.

Versuchen wir es zunächst mit $x = 1$. Wir erhalten:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 + 2 = 1 - 21 - 1 + 2 = 0$$

Der erste Versuch war gleich ein Treffer! Mit $\boxed{x_{01} = 1}$ haben wir die erste Nullstelle gefunden.

Wie geht es jetzt weiter? Im Prinzip könnte man mit dem gleichen Verfahren nach weiteren Nullstellen suchen. Zwei Probleme lassen das jedoch nicht als sinnvoll erscheinen.

1. Bei einem Polynom 3. Grades gibt es **bis zu** 3 Nullstellen. Das bedeutet nun keineswegs, dass es tatsächlich 3 geben **muss**. Eventuell gibt es wirklich nur eine Nullstelle.
2. Niemand sagt uns, ob die eventuell noch vorhandenen Nullstellen ebenfalls **ganzzahlig** sind. Auch dann hilft die Probiermethode nicht weiter.

Es gibt einen Lehrsatz, der besagt:

Hat ein Polynom die Nullstelle x_0, dann kann man den Term $(x - x_0)$ aus dem Polynom ausklammern.

Daher ist es an dieser Stelle zweckmäßig, eine Polynomdivision mit dem Term $(x - x_0)$ durchzuführen. Ich führe das an dem Beispiel vor.

$$\begin{array}{rrrrl}
(x^3 & -2x^2 & -x & +2) & : \ (x-1) \ = \ x^2 - x - 2 \\
-(x^3 & -x^2) & & & \\
\hline
 & -x^2 & -x & +2 & \\
- & (-x^2 & +x) & & \\
\hline
 & & -2x & +2 & \\
 & - & (-2x & +2) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

Mit diesem Ergebnis lässt sich das Polynom also so schreiben:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1) \cdot (x^2 - x - 2)$$

Es gibt einen Lehrsatz, der besagt:

Ein Produkt ist dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist.

Nach diesem Lehrsatz dürfen in unserem umgewandelten Polynom beide Faktoren einzeln auf Nullstellen untersucht werden. Zum ersten Faktor gehört die bereits bekannte Nullstelle. Der zweite liefert also die übrigen Nullstellen. Zur Lösung kann die p-q-Formel verwendet werden. Auch das führen wir an unserem Beispiel durch.

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 \\ x_{02/3} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2} \\ &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \\ x_{02} = -1 &\qquad x_{03} = 2 \end{aligned}$$

In unserem Beispiel gibt es also drei Nullstellen.

$$\boxed{x_{01} = 1} \qquad \boxed{x_{02} = -1} \qquad \boxed{x_{03} = 2}$$

2.3 Sonderfälle für Polynome ab 3. Grades

Wie wir gesehen haben, kann sich die Nullstellenbestimmung ziemlich knifflig gestalten. Es gibt jedoch Fälle, da hat das Polynom eine bestimmte Form, die die Nullstellenbestimmung erleichtern. Zwei dieser Sonderfälle sollen hier explizit vorgestellt werden.

2.3.1 Polynome ohne Absolutes Glied

Das Absolute Glied eines Polynoms ist der Parameter ohne x, also a_0 in der Normalform des Polynoms. Gibt es kein Absolutes Glied, kann man auch sagen, das Absolute Glied ist gleich Null. Ein Beispiel dazu:

$$x^3 + 2x^2 - 15x$$

Zur Nullstellenbestimmung wird also folgender Ansatz gemacht.

$$x^3 + 2x^2 - 15x = 0$$

Ein sehr oft gemachter Fehler ist es, die Gleichung jetzt durch x zu dividieren. Aber wieso ist das ein Fehler? Man erhält dann doch eine einfache Quadratische Gleichung, die man lösen kann. Man erhält Ergebnisse, mit denen auch die Probe gelingt. Wieso ist das also ein Fehler?

Man darf durch jede Zahl dividieren, außer durch Null. Wenn wir durch x dividieren, kann es daher sein, dass wir – falls $x = 0$ ist – durch Null dividieren, ohne es zu bemerken. Tatsächlich geht hierbei die Lösung $x_{01} = 0$ verloren. Mathematisch „sauber“ ist daher eine andere Vorgehensweise: **Man klammert x aus.** Das sieht dann in unserem Beispiel so aus:

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - 15x &= 0 \\ x \cdot (x^2 + 2x - 15) &= 0 \end{aligned}$$

Jetzt greift der bereits angesprochene Lehrsatz:

Ein Produkt ist dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist.

Der erste Faktor bringt uns die Lösung $x_{01} = 0$. Die weiteren Nullstellen werden dann aus dem anderen Faktor bestimmt. Mit der p-q-Formel ist das kein Problem. Für das Beispiel führe ich das noch vor.

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 15 &= 0 \\ x_{02/3} &= -1 \pm \sqrt{1+15} \\ &= -1 \pm 4 \\ x_{02} = -5 \quad & \quad x_{03} = 3 \end{aligned}$$

In unserem Beispiel gibt es also drei Nullstellen.

$$\boxed{x_{01} = 0} \qquad \boxed{x_{02} = -5} \qquad \boxed{x_{03} = 3}$$

Anmerkung: Es kann sein, dass man nicht nur x sondern sogar x^2 oder x^3 ausklammern kann. Man schaut dann einfach, wie groß die **niedrigste vorkommende Potenz** von x ist. Die kann ausgeklammert werden. Beispiel:

$$8x^5 - 2x^3$$

Hier kann x^3 ausgeklammert werden. Dieses Beispiel möchte ich aber nicht explizit vorrechnen.

2.3.2 Polynome in Biquadratischen Form

Ein **Biquadratisches Polynom** ist ein Polynom, das sich in dieser Form schreiben lässt:

$$a \cdot x^{2n} + b \cdot x^n + c$$

Mit Worten ausgedrückt: Wir haben ein Polynom, das **genau zwei** Potenzen von x enthält, wobei der eine Exponent **genau doppelt** so groß, wie der andere ist. Hier ein Beispiel:

$$x^4 - 3x^2 - 4$$

Für die Nullstellensuche wird daraus eine „Biquadratische Gleichung“.

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

Zur Lösung verwendet man einen einfachen „Trick“:

$$\boxed{\text{Man ersetzt (substituiert) die niedrigere Potenz durch einen anderen Variablennamen.}}$$

Das führen wir nun für das Beispiel durch. Die niedrigere Potenz ist x^2, also ersetze (substituiere) ich x^2 durch beispielsweise z.

$$x^2 = z$$

Mit z statt x^2 wird dann die Gleichung zu:

$$z^2 - 3z - 4 = 0$$

Dies ist eine einfache Quadratische Gleichung, die man mit der p-q-Formel lösen kann.

$$\begin{aligned}
z^2 - 3z - 4 &= 0 \\
z_{1/2} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} \\
z_{1/2} &= \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \\
z_1 = 4 &\qquad z_2 = -1
\end{aligned}$$

Nun muss man die Substitution wieder rückgängig machen. Dabei entstehen jeweils zwei Lösungen, also:

$$\begin{array}{rclcrcl}
x_{1/2}^2 & = & z_1 & \qquad & x_{3/4}^2 & = & z_2 \\
x_{1/2}^2 & = & 4 & \qquad & x_{3/4}^2 & = & -1
\end{array}$$

Man zieht jeweils die positive und negative Wurzel und erhält im Prinzip 4 Lösungen.

$$\begin{array}{rclcrcl}
x_1 & = & +2 & \qquad & x_3 & = & +\sqrt{-1} \\
x_2 & = & -2 & \qquad & x_4 & = & -\sqrt{-1}
\end{array}$$

In diesem Beispiel müssen allerdings die Lösungen x_3 und x_4 entfallen, weil der Radikant negativ ist. Es bleiben also nur die beiden Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$ als Lösungen der ursprünglichen Gleichung.

Das gleiche Prinzip ist natürlich auch möglich, wenn die vorkommenden Exponenten nicht 2 und 4 sondern andere Vielfache von 1 und 2 sind, also beispielsweise 3 und 6 oder 4 und 8 oder auch 0,5 und 1. Beispiele:

$$\begin{array}{rclcrcl}
x^6 - 7x^3 - 8 & = & 0 & \Rightarrow & \text{Substitution mit } z & = & x^3 \\
x^8 - 82x^4 + 81 & = & 0 & \Rightarrow & \text{Substitution mit } z & = & x^4 \\
x - 5\sqrt{x} - 6 & = & 0 & \Rightarrow & \text{Substitution mit } z & = & \sqrt{x}
\end{array}$$

Diese Beispiele möchte ich allerdings nicht mehr vorrechnen.