Übungsaufgaben zu Lineargleichungssystemen 2. Ordnung

W. Kippels

16. November 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Aufgabenstellungen

Lösen Sie die Gleichungssysteme mit einem beliebigen Verfahren![1]

2.1 Aufgabe 1

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 3x+4y & = & 14 \\ (2) & 5x-4y & = & -30 \end{array}$$

2.2 Aufgabe 2

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 8x+y & = & 53 \\ (2) & 4x-3y & = & 37 \end{array}$$

2.3 Aufgabe 3

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 5x-2y & = & 3 \\ (2) & 5x+3y & = & -17 \end{array}$$

2.4 Aufgabe 4

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 2x-6y & = & -6 \\ (2) & 5x-3y & = & -15 \end{array}$$

2.5 Aufgabe 5

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 5x-3y & = & -3 \\ (2) & 2x-4y & = & 10 \end{array}$$

2.6 Aufgabe 6

$$\begin{array}{lrcl} (1) & x+3y & = & 10 \\ (2) & 4y-5x & = & 26 \end{array}$$

2.7 Aufgabe 7

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 4x+7 & = & 3y-12 \\ (2) & 6x+10 & = & 1-2y \end{array}$$

2.8 Aufgabe 8

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 2\cdot(2x+y)-3\cdot(y-4) & = & 20 \\ (2) & 5-3\cdot(x-3)+5\cdot(4x-3y) & = & 5 \end{array}$$

[1] Einzelheiten zu den Verfahren siehe hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/lingl.pdf

3 Lösungswege:

Hier sollen mögliche Lösungswege dargestellt werden. Dabei ist zu beachten, dass es zu **jeder** Aufgabe **mehrere** Lösungswege gibt, die zur richtigen Lösung führen können. Daher bitte ich, die vorgestellten Lösung nur als Beispiel anzusehen.

Manchmal habe ich zwei verschiedene Lösungswege aufgezeigt. Jeder mag für sich selbst entscheiden, welcher Weg dabei der einfachere ist.

3.1 Aufgabe 1

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 3x+4y & = & 14 \\ (2) & 5x-4y & = & -30 \end{array}$$

Hier bietet sich das **Additions-/Subtraktionsverfahren** an, weil die Koeffizienten (die Vorzahlen) von y übereinstimmen. Da die Vorzeichen unterschiedlich sind, muss **addiert** werden.

$$\begin{array}{llllll} (1) & 3x & +4y & = & 14 & | \\ (2) & 5x & -4y & = & -30 & |+ \\ \hline & 8x & & = & -16 & |:8 \\ & x & & = & -2 & \end{array}$$

Das Ergebnis kann in (1) oder in (2) eingesetzt werden, um y zu bestimmen. Willkürlich wähle ich Gleichung (1) für die Lösung.

$$\begin{array}{rcll} 3x+4y & = & 14 & |x\text{-Wert einsetzen} \\ 3\cdot(-2)+4y & = & 14 & \\ -6+4y & = & 14 & |+6 \\ 4y & = & 20 & |:4 \\ y & = & 5 & \end{array}$$

$$\boxed{x=-2 \qquad y=5}$$

3.2 Aufgabe 2

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 8x + y & = & 53 \\ (2) & 4x - 3y & = & 37 \end{array}$$

Hier bietet sich das **Einsetzungsverfahren** an, weil der Koeffizient (die Vorzahl) von y nicht vorhanden bzw. gleich 1 ist. Gleichung (1) kann daher sehr bequem nach y umgestellt werden.

$$\begin{array}{rcll} 8x + y & = & 53 & \mid -8x \\ y & = & 53 - 8x & \end{array}$$

Dieser Term wird in die **andere** Gleichung, also in (2) für y eingesetzt.

$$\begin{array}{rcll} 4x - 3y & = & 37 & \mid \text{Term für } y \text{ einsetzen} \\ 4x - 3 \cdot (53 - 8x) & = & 37 & \\ 4x - 159 + 24x & = & 37 & \\ 28x - 159 & = & 37 & \mid +159 \\ 28x & = & 196 & \mid :28 \\ x & = & 7 & \end{array}$$

Zur Bestimmung von y wird sinnvollerweise die umgestellte Gleichung (1) verwendet.

$$\begin{array}{rcll} y & = & 53 - 8x & \mid 7 \text{ für } x \text{ einsetzen} \\ & = & 53 - 8 \cdot 7 & \\ & = & 53 - 56 & \\ y & = & -3 & \end{array}$$

$$\boxed{x = 7 \qquad y = -3}$$

3.3 Aufgabe 3

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 5x-2y & = & 3 \\ (2) & 5x+3y & = & -17 \end{array}$$

Es fällt auf, dass die Koeffizienten von x übereinstimmen. Daher bietet sich sofort das **Additions-/Subtraktionsverfahren** an. Weil die Vorzeichen **gleich** sind, muss **subtrahiert** werden.

$$\begin{array}{lrrcll} (1) & 5x & -2y & = & 3 & | \\ (2) & 5x & +3y & = & -17 & |- \\ \hline & & -5y & = & 20 & |:(-5) \\ & & y & = & -4 & \end{array}$$

Dieses Ergebnis kann in (1) oder in (2) eingesetzt werden, um x zu bestimmen. Weil in (1) die Zahlen etwas kleiner sind, wähle ich diese Gleichung.

$$\begin{array}{rcll} 5x-2y & = & 3 & |y\text{-Wert einsetzen} \\ 5x-2\cdot(-4) & = & 3 & \\ 5x+8 & = & 3 & |-8 \\ 5x & = & -5 & |:5 \\ x & = & -1 & \end{array}$$

$$\boxed{x=-1 \qquad y=-4}$$

3.4 Aufgabe 4

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 2x-6y & = & -6 \\ (2) & 5x-3y & = & -15 \end{array}$$

Hier gibt es keine Übereinstimmung zwischen irgendwelchen Koeffizienten. Auch ist keiner gleich 1. Damit bietet sich kein Verfahren zwingend an. Deswegen stelle ich hier zwei Lösungswege vor.

Lösung mit Einsetzungsverfahren: Gleichung (1) lässt sich relativ bequem nach x umstellen, da alle Koeffizienten in (1) durch 2 (dem Keffizienten von x) teilbar sind.

$$\begin{array}{rcll} 2x-6y & = & -6 & |+6y \\ 2x & = & -6+6y & |:2 \\ x & = & -3+3y & \end{array}$$

Dieser Term wird in die **andere** Gleichung, also in (2) für x eingesetzt.

$$\begin{array}{rcll} 5x-3y & = & -15 & \\ 5\cdot(-3+3y)-3y & = & -15 & \\ -15+15y-3y & = & -15 & \\ -15+12y & = & -15 & |+15 \\ 12y & = & 0 & |:12 \\ y & = & 0 & \end{array}$$

Dieses Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (1) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl} x & = & -3+3y \\ & = & -3+3\cdot 0 \\ x & = & -3+0 \\ x & = & -3 \end{array}$$

Lösung mit Additions-/Subtraktionsverfahren: Wenn man dieses Verfahren verwenden möchte, dann müssen bei x oder bei y die Koeffizienten gleichgemacht werden. Hier bietet es sich an, die Koeffizienten von y gleich zu machen, weil einer genau das Doppelte des anderen ist.

$$\begin{array}{lrrcll} (1) & 2x & -6y & = & -6 & \\ (2) & 5x & -3y & = & -15 & |\cdot 2 \\ \hline (1) & 2x & -6y & = & -6 & | \\ (2) & 10x & -6y & = & -30 & |- \\ \hline & -8x & & = & 24 & |:(-8) \\ & x & & = & -3 & \end{array}$$

Das Ergebnis kann beispielsweise in (1) eingesetzt werden, um y zu bestimmen.

$$\begin{array}{rcll} 2x-6y & = & -6 & \\ 2\cdot(-3)-6y & = & -6 & \\ -6-6y & = & -6 & |+6 \\ -6y & = & 0 & |:(-6) \\ y & = & 0 & \end{array}$$

$$\boxed{x=-3 \qquad y=0}$$

3.5 Aufgabe 5

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 5x-3y & = & -3 \\ (2) & 2x-4y & = & 10 \end{array}$$

Auch hier bietet sich kein Verfahren zwingend an. Daher zeige ich wieder zwei verschiedene Lösungswege auf.

Lösung mit Einsetzungsverfahren: Ich stelle Gleichung (2) nach x um, weil ich dann nur durch 2 dividieren muss.

$$\begin{array}{rcll} 2x-4y & = & 10 & \mid +4y \\ 2x & = & 10+4y & \mid :2 \\ x & = & 5+2y & \end{array}$$

Dieser Term wird in die **andere** Gleichung, also in (1) für x eingesetzt.

$$\begin{array}{rcll} 5x-3y & = & -3 & \\ 5\cdot(5+2y)-3y & = & -3 & \\ 25+10y-3y & = & -3 & \\ 25+7y & = & -3 & \mid -25 \\ 7y & = & -28 & \mid :7 \\ y & = & -4 & \end{array}$$

Das Ergebnis wird in der umgestellten Gleichung (2) für y eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl} x & = & 5+2y \\ & = & 5+2\cdot(-4) \\ & = & 5-8 \\ x & = & -3 \end{array}$$

Lösung mit Additions-/Subtraktionsverfahren: Eine bestimmte Variable zum Eliminieren bietet sich nicht an. Willkürlich wähle ich dafür x aus. Dazu muss ich beide Gleichungen mit dem jeweils anderen Koeffizienten multiplizieren.

$$\begin{array}{lrrcll} (1) & 5x & -3y & = & -3 & \mid \cdot 2 \\ (2) & 2x & -4y & = & 10 & \mid \cdot 5 \\ \hline (1) & 10x & -6y & = & -6 & \mid \\ (2) & 10x & -20y & = & 50 & \mid - \\ \hline & & 14y & = & -56 & \mid :14 \\ & & y & = & -4 & \end{array}$$

Das Ergebnis wird beispielsweise in Gleichung (1) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcll} 5x-3y & = & -3 & \\ 5x-3\cdot(-4) & = & -3 & \\ 5x+12 & = & -3 & \mid -12 \\ 5x & = & -15 & \mid :5 \\ x & = & -3 & \end{array}$$

$$\boxed{x=-3 \qquad y=-4}$$

3.6 Aufgabe 6

$$\begin{array}{lrcl} (1) & x + 3y & = & 10 \\ (2) & 4y - 5x & = & 26 \end{array}$$

Zunächst einmal gilt es aufzupassen, weil die Variablen in den beiden Gleichungen unterschiedlich sortiert sind!

Hier bietet sich ganz klar das Einsetzungsverfahren an, weil vor dem x in (1) keine Zahl steht, der Koeffizient von x somit 1 ist. Lösen wir also Gleichung (1) nach x auf.

$$\begin{array}{rcll} x + 3y & = & 10 & \quad | - 3y \\ x & = & 10 - 3y & \end{array}$$

Dieser Term wird in die **andere** Gleichung, also in (2) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcll} 4y - 5x & = & 26 & \\ 4x - 5 \cdot (10 - 3y) & = & 26 & \\ 4x - 50 + 15y & = & 26 & \\ 19y - 50 & = & 26 & | + 50 \\ 19y & = & 76 & | : 19 \\ y & = & 4 & \end{array}$$

Dieses Ergebnis wird in die **umgestellte** Gleichung (1) eingesetzt, um x zu bestimmen.

$$\begin{array}{rcl} x & = & 10 - 3y \\ & = & 10 - 3 \cdot 4 \\ & = & 10 - 12 \\ x & = & -2 \end{array}$$

$$\boxed{x = -2 \qquad y = 4}$$

3.7 Aufgabe 7

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 4x+7 & = & 3y-12 \\ (2) & 6x+10 & = & 1-2y \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem sollte zunächst in die **Normalform** gebracht werden.

$$\begin{array}{lrcll} (1) & 4x+7 & = & 3y-12 & |-7-3y \\ (2) & 6x+10 & = & 1-2y & |-10+2y \\ \hline (1) & 4x-3y & = & -19 & \\ (2) & 6x+2y & = & -9 & \end{array}$$

Ein bestimmtes Lösungsverfahren bietet sich hier nicht bevorzugt an. Deshalb möchte ich auch hier wieder beide Lösungsverfahren vorstellen.

Lösung mit Einsetzungsverfahren: Weil der Koeffizient von y in der zweiten Gleichung mit 2 der kleinste ist und man zudem durch 2 auch gut dividieren kann, stelle ich Gleichung (2) nach y um. In diesem Fall muss man nicht mit Brüchen arbeiten, das Dividieren durch 2 ergibt ungerundete Dezimalzahlen. Vielen ist das angenehmer, als die Verwendung von Brüchen.

$$\begin{array}{rcll} 6x+2y & = & -9 & |-6x \\ 2y & = & -9-6x & |:2 \\ y & = & -4{,}5-3x & \end{array}$$

Dieser Term wird nun in die **andere** Gleichung eingesetzt, also in (1).

$$\begin{array}{rcll} 4x-3y & = & -19 & \\ 4x-3\cdot(-4{,}5-3x) & = & -19 & \\ 4x+13{,}5+9x & = & -19 & \\ 13x+13{,}5 & = & -19 & |-13{,}5 \\ 13x & = & -32{,}5 & |:13 \\ x & = & -2{,}5 & \end{array}$$

Dieses Ergebnis wird in die **umgestellte** Gleichung (2) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl} y & = & -4{,}5-3x \\ & = & -4{,}5-3\cdot(-2{,}5) \\ & = & -4{,}5+7{,}5 \\ y & = & 3 \end{array}$$

Lösung mit Additions-/Subtraktionsverfahren: Weil die Koeffizienten von y die kleineren Zahlen darstellen, möchte ich diese gleich machen. Deshalb multipliziere ich jede Gleichung mit dem jeweils anderen Koeffizienten. Weil die Vorzeichen der Koeffizienten von y **verschieden** sind, werden anschließend die Gleichungen **addiert**.

$$\begin{array}{rrrcll}
(1) & 4x & -3y & = & -19 & |\cdot 2 \\
(2) & 6x & +2y & = & -9 & |\cdot 3 \\
\hline
(1) & 8x & -6y & = & -38 & | \\
(2) & 18x & +6y & = & -27 & |+ \\
\hline
 & 26x & & = & -65 & |:26 \\
 & x & & = & -2{,}5 &
\end{array}$$

Dieses Egebnis setze ich in eine beliebige Gleichung ein. Weil in (2) die Zahlen etwas kleiner sind, nehme ich diese.

$$\begin{array}{rcll}
6x+2y & = & -27 & \\
6\cdot(-2{,}5)+2y & = & -27 & \\
-15+2y & = & -27 & |+15 \\
2y & = & 6 & |:2 \\
y & = & 3 &
\end{array}$$

$$\boxed{x=-2{,}5 \qquad y=3}$$

3.8 Aufgabe 8

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 2\cdot(2x+y)-3\cdot(y-4) & = & 20 \\ (2) & 5-3\cdot(x-3)+5\cdot(4x-3y) & = & 5 \end{array}$$

Auch dieses Gleichungssystem ist nicht in **Normalform** gegeben und muss daher zunächst in diese umgeformt werden.

$$\begin{array}{lrcll} (1) & 2\cdot(2x+y)-3\cdot(y-4) & = & 20 & \\ (2) & 5-3\cdot(x-3)+5\cdot(4x-3y) & = & 5 & \\ \hline (1) & 4x+2y-3y+12 & = & 20 & \\ (2) & 5-3x+9+20x-15y & = & 5 & \\ \hline (1) & 4x-y+12 & = & 20 & \mid -12 \\ (2) & 14+17x-15y & = & 5 & \mid -14 \\ \hline (1) & 4x-y & = & 8 & \\ (2) & 17x-15y & = & -9 & \\ \hline \end{array}$$

Hier haben wir wieder den Fall, dass eine Variable (y in der ersten Gleichung) keinen Koeffizienten, bzw. den Koeffizienten 1 hat. Das bedeutet, dass das **Einsetzungsverfahren** hier günstig ist. Gleichung (1) wird nach y aufgelöst.

$$\begin{array}{rcll} 4x-y & = & 8 & \mid -4x \\ -y & = & 8-4x & \mid \cdot(-1) \\ y & = & -8+4x & \end{array}$$

Dieser Term wird nun die **andere** Gleichung, also in (2) für y eingesetzt.

$$\begin{array}{rcll} 17x-15y & = & -9 & \\ 17x-15\cdot(-8+4x) & = & -9 & \\ 17x+120-60x & = & -9 & \\ -43x+120 & = & -9 & \mid -120 \\ -43x & = & -129 & \mid :(-43) \\ x & = & 3 & \end{array}$$

Dieses Ergebnis wird in die **umgestellte** Gleichung (1) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl} y & = & -8+4x \\ & = & -8+4\cdot 3 \\ & = & -8+12 \\ y & = & 4 \end{array}$$

$$\boxed{x=3 \qquad y=4}$$