

Übungen zur Komplexen Rechnung in der Elektrotechnik

Aufgabe 1

Gegeben ist nebenstehende Schaltung.

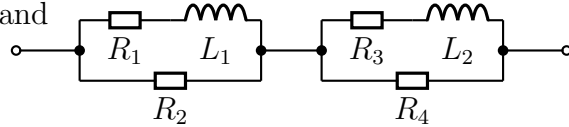
Berechnen Sie den Komplexen Ersatzwiderstand

\underline{Z} der Schaltung sowie seinen Betrag Z und den Phasenverschiebungswinkel φ .

Folgende Werte sind bekannt:

$$R_1 = 100 \Omega \quad R_2 = 200 \Omega \quad R_3 = 200 \Omega$$

$$R_4 = 100 \Omega \quad L_1 = 0,1 \text{ H} \quad L_2 = 0,1 \text{ H} \quad \omega = 1000 \text{ s}^{-1}$$



Aufgabe 2

Gegeben ist nebenstehende Schaltung.

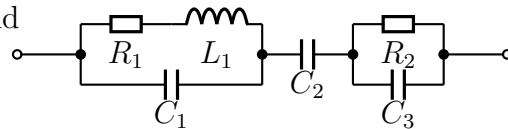
Berechnen Sie den Komplexen Ersatzwiderstand

\underline{Z} der Schaltung sowie seinen Betrag Z und den Phasenverschiebungswinkel φ .

Folgende Werte sind bekannt:

$$R_1 = 100 \Omega \quad R_2 = 200 \Omega \quad L_1 =$$

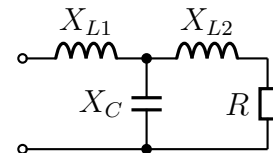
$$200 \text{ mH} \quad C_1 = 2 \mu\text{F} \quad C_2 = 10 \mu\text{F} \quad C_3 = 2 \mu\text{F} \quad \omega = 1000 \text{ s}^{-1}$$



Aufgabe 3

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie die Widerstände X_{L1} und X_C so, dass der Gesamtwiderstand \underline{Z} der Schaltung gleich 10Ω reell wird!

Bekannt sind die Werte $X_{L2} = 8 \Omega$ und $R = 16 \Omega$.

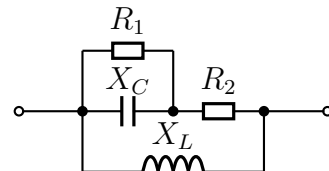


Aufgabe 4

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie den Widerstand R_2 so, dass der Gesamtwiderstand \underline{Z} der Schaltung reell wird! Folgende Werte sind bekannt:

$$X_C = 2 \Omega \quad X_L = 8 \Omega \quad R_1 = 4 \Omega$$

Wie groß wird damit der Ersatzwiderstand Z der Schaltung?

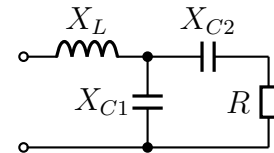


Aufgabe 5

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie den Widerstand X_{C2} so, dass der Gesamtwiderstand Z der Schaltung reell wird! Bekannt sind die Werte:

$$X_{C1} = 50 \Omega \quad X_L = 12,5 \Omega \quad R_1 = 20 \Omega.$$

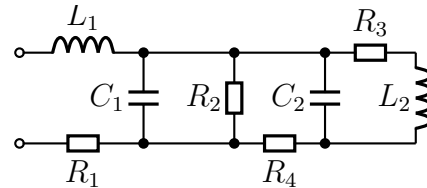
Wie groß wird damit der Ersatzwiderstand Z der Schaltung?



Aufgabe 6

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie den Komplexen Ersatzwiderstand Z der Schaltung! Bekannt sind folgende Werte:

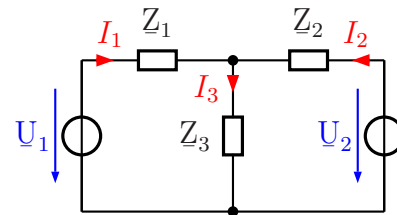
$$\begin{aligned} \omega &= 100 \text{ s}^{-1} & L_1 &= 0,5 \text{ H} & L_2 &= 1 \text{ H} \\ C_1 &= 500 \mu\text{F} & C_2 &= 100 \mu\text{F} & R_1 &= 20 \Omega \\ R_2 &= 50 \Omega & R_3 &= 50 \Omega & R_4 &= 30 \Omega \end{aligned}$$



Aufgabe 7

Die Ströme in nebenstehende Schaltung können durch ein Lineargleichungssystem beschrieben werden. Stellen Sie das Gleichungssystem auf und berechnen Sie die Komplexen Ströme I_1 , I_2 und I_3 . Bekannt sind die Werte:

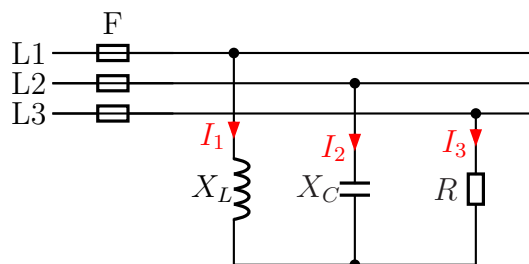
$$\begin{aligned} Z_1 &= 1 \Omega - j3 \Omega; & Z_2 &= 2 \Omega - j4 \Omega; \\ Z_3 &= j2 \Omega; & U_1 &= j4 \text{ V}; & U_2 &= 4 \text{ V} \end{aligned}$$



Aufgabe 8

Bestimmen Sie die Ströme I_1 , I_2 und I_3 in den Außenleitern des nebenstehend dargestellten Dreiphasenwechselstromnetzes mit $U_L = 400 \text{ V}$! Stellen Sie dazu ein Lineargleichungssystem für die drei Komplexen Ströme I_1 , I_2 und I_3 auf und lösen Sie das Gleichungssystem. Berechnen Sie anschließend die gesuchten Beträge der Ströme I_1 , I_2 und I_3 . Bekannt sind die Werte:

$$X_L = 100 \Omega; \quad X_C = 200 \Omega; \quad R = 50 \Omega$$



Aufgabe 9

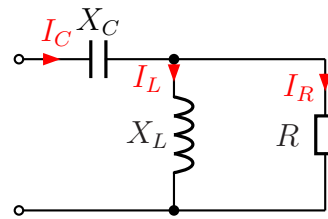
Nebenstehende Schaltung ist an eine Wechselspannung von $U = 100V$ angeschlossen. Die Bauteilwerte sind:

$$X_C = 20 \Omega$$

$$X_L = 25 \Omega$$

$$R = 50 \Omega$$

Gesucht sind die Ströme I_C im Kondensator, I_L in der Spule und I_R im ohmschen Widerstand.



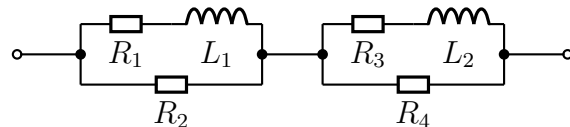
Hier die Lösungen mit Lösungsweg

Aufgabe 1 Gegeben ist nebenstehende Schaltung.

Berechnen Sie den Komplexen Ersatzwiderstand \underline{Z} der Schaltung sowie seinen Betrag Z und den Phasenverschiebungswinkel φ . Folgende Werte sind bekannt:

$$R_1 = 100 \Omega \quad R_2 = 200 \Omega \quad R_3 = 200 \Omega \quad R_4 = 100 \Omega \quad L_1 = 0,1 \text{ H} \quad L_2 = 0,1 \text{ H} \\ \omega = 1000 \text{ s}^{-1}$$

Lösung: Wir bestimmen zunächst aus den gegebenen Daten die komplexen Wirk- und Blindwiderstände.



$$R_1 = 100 \Omega \Rightarrow \underline{R}_1 = 100 \Omega$$

$$R_2 = 200 \Omega \Rightarrow \underline{R}_2 = 200 \Omega$$

$$R_3 = 200 \Omega \Rightarrow \underline{R}_3 = 200 \Omega$$

$$R_4 = 100 \Omega \Rightarrow \underline{R}_4 = 100 \Omega$$

$$X_{L1} = 1000 \text{ s}^{-1} \cdot 0,1 \text{ H} = 100 \Omega \Rightarrow \underline{X}_{L1} = j100 \Omega$$

$$X_{L2} = 1000 \text{ s}^{-1} \cdot 0,1 \text{ H} = 100 \Omega \Rightarrow \underline{X}_{L2} = j100 \Omega$$

Ich fasse R_1 und X_{L1} mit der Formel für die Reihenschaltung als Z_1 zusammen.

$$\underline{Z}_1 = \underline{R}_1 + \underline{X}_{L1} = 100 \Omega + j100 \Omega$$

Ich fasse Z_1 mit R_2 zu Z_2 zusammen. Dazu verwende ich die Formel für die Parallelschaltung.

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{R}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{R}_2} = \frac{(100 \Omega + j100 \Omega) \cdot 200 \Omega}{100 \Omega + j100 \Omega + 200 \Omega} = \frac{20000 \Omega^2 + j20000 \Omega^2}{300 \Omega + j100 \Omega}$$

Damit die Zahlen und die Einheiten nicht so groß werden, klammere ich im Zähler und im Nenner 100Ω aus und kürze dadurch.

$$\underline{Z}_2 = \frac{100 \Omega \cdot (200 \Omega + j200 \Omega)}{100 \Omega \cdot (3 + j1)} = \frac{200 \Omega + j200 \Omega}{3 + j1}$$

Das muss ich jetzt aufteilen können in Real- und Imaginärteil. Dazu muss ich den Bruch **Konjugiert Komplex erweitern**.

$$\underline{Z}_2 = \frac{200 \Omega + j200 \Omega}{3 + j1} \cdot \frac{3 - j1}{3 - j1} = \frac{600 \Omega - j200 \Omega + j600 \Omega + 200 \Omega}{3^2 + 1^2} = \frac{800 \Omega + j400 \Omega}{10} \\ \underline{Z}_2 = 80 \Omega + j40 \Omega$$

Ähnlich müssen wir auch die rechte Teilschaltung zusammenfassen. Die Reihenschaltung aus R_3 und X_{L2} bekommt den Namen Z_3 . Die Parallelschaltung von Z_3 mit R_4 nenne ich dann Z_4 .

$$\begin{aligned} \underline{Z}_3 &= \underline{R}_3 + \underline{X}_{L2} = 200 \Omega + j100 \Omega \\ \underline{Z}_4 &= \frac{\underline{Z}_3 \cdot \underline{R}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{R}_4} = \frac{(200 \Omega + j100 \Omega) \cdot 100 \Omega}{200 \Omega + j100 \Omega + 100 \Omega} = \frac{20000 \Omega^2 + j10000 \Omega^2}{300 \Omega + j100 \Omega} \\ &= \frac{100 \Omega \cdot (200 \Omega + j100 \Omega)}{100 \Omega \cdot (3 + j1)} = \frac{200 \Omega + j100 \Omega}{3 + j1} \\ &= \frac{(200 \Omega + j100 \Omega) \cdot (3 - j1)}{(3 + j1) \cdot (3 - j1)} = \frac{600 \Omega - j200 \Omega + j300 \Omega + 100 \Omega}{3^2 + 1^2} = \frac{700 \Omega + j100 \Omega}{10} \\ \underline{Z}_4 &= 70 \Omega + j10 \Omega \end{aligned}$$

Um den Gesamtwiderstand \underline{Z} zu bestimmen, muss ich nun noch \underline{Z}_2 und \underline{Z}_4 addieren.

$$\underline{Z} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_4 = 80 \Omega + j40 \Omega + 70 \Omega + j10 \Omega = 150 \Omega + j50 \Omega$$

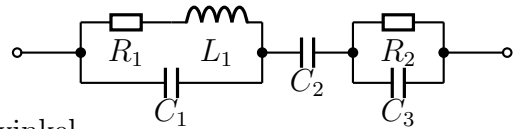
Mit den entsprechenden Formeln kann ich dann den Betrag Z und den Phasenverschiebungswinkel φ von \underline{Z} berechnen.

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{(\operatorname{Re}\underline{Z})^2 + (\operatorname{Im}\underline{Z})^2} = \sqrt{(150 \Omega)^2 + (50 \Omega)^2} \approx 158 \Omega \\ \varphi &= \arctan \frac{\operatorname{Im}\underline{Z}}{\operatorname{Re}\underline{Z}} = \arctan \frac{50 \Omega}{150 \Omega} \approx 18,43^\circ \end{aligned}$$

$$Z \approx 158 \Omega$$

$$\varphi \approx 18,43^\circ$$

Aufgabe 2 Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Berechnen Sie den Komplexen Ersatzwiderstand \underline{Z} der Schaltung sowie seinen Betrag Z und den Phasenverschiebungswinkel φ . Folgende Werte sind bekannt:



$R_1 = 100 \Omega$ $R_2 = 200 \Omega$ $L_1 = 200 \text{ mH}$ $C_1 = 2 \mu\text{F}$ $C_2 = 10 \mu\text{F}$ $C_3 = 2 \mu\text{F}$

$\omega = 1000 \text{ s}^{-1}$

Lösung: Wie schon bei Aufgabe 1 bestimmen wir zunächst aus den gegebenen Daten die komplexen Wirk- und Blindwiderstände.

$$R_1 = 100 \Omega \Rightarrow \underline{R}_1 = 100 \Omega$$

$$R_2 = 200 \Omega \Rightarrow \underline{R}_2 = 200 \Omega$$

$$X_L = \omega \cdot L = 1000 \text{ s}^{-1} \cdot 200 \text{ mH} = 200 \Omega \Rightarrow \underline{X}_L = j200 \Omega$$

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega \cdot C_1} = \frac{1}{1000 \text{ s}^{-1} \cdot 2 \mu\text{F}} = 500 \Omega \Rightarrow \underline{X}_{C1} = -j500 \Omega$$

$$X_{C2} = \frac{1}{\omega \cdot C_2} = \frac{1}{1000 \text{ s}^{-1} \cdot 10 \mu\text{F}} = 100 \Omega \Rightarrow \underline{X}_{C2} = -j100 \Omega$$

$$X_{C3} = \frac{1}{\omega \cdot C_3} = \frac{1}{1000 \text{ s}^{-1} \cdot 2 \mu\text{F}} = 500 \Omega \Rightarrow \underline{X}_{C3} = -j500 \Omega$$

Als nächstes werden R_1 und X_L mit Hilfe der Formel für die Reihenschaltung zu Z_1 zusammengefasst.

$$\underline{Z}_1 = \underline{R}_1 + \underline{X}_{L1} = 100 \Omega + j200 \Omega$$

Nun kann man mit Hilfe der Formel für die Parallelschaltung Z_1 und X_{C1} zu Z_2 zusammengefasst werden. Nachdem die Werte eingesetzt und zusammengefasst sind, wird ausgeklammert, gekürzt und Konjugiert Komplex erweitert, um \underline{Z}_2 in Realteil und Imaginärteil aufspalten zu können.

$$\begin{aligned} \underline{Z}_2 &= \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{X}_{C1}}{\underline{Z}_1 + \underline{X}_{C1}} = \frac{(100 \Omega + j200 \Omega) \cdot (-j500 \Omega)}{100 \Omega + j200 \Omega + (-j500 \Omega)} = \frac{-j50000 \Omega^2 + 100000 \Omega^2}{100 \Omega - j300 \Omega} \\ &= \frac{100 \Omega \cdot (-j500 \Omega + 1000 \Omega)}{100 \Omega \cdot (1 - j3)} = \frac{-j500 \Omega + 1000 \Omega}{1 - j3} = \frac{(-j500 \Omega + 1000 \Omega) \cdot (1 + j3)}{(1 - j3) \cdot (1 + j3)} \\ &= \frac{-j500 \Omega + 1500 \Omega + 1000 \Omega + j3000 \Omega}{1^2 + 3^2} = \frac{2500 \Omega + j2500 \Omega}{10} = 250 \Omega + j250 \Omega \end{aligned}$$

Die Parallelschaltung aus R_2 und X_{C3} nenne ich Z_3 und berechne sie mit der Parallelschaltungsformel. Anschließend wird wieder zusammengefasst, ausgeklammert, gekürzt und Konjugiert Komplex erweitert.

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_3 &= \frac{\underline{R}_2 \cdot \underline{X}_{C3}}{\underline{R}_2 + \underline{X}_{C3}} = \frac{200 \Omega \cdot (-j500 \Omega)}{200 \Omega + (-j500 \Omega)} = \frac{-j100000 \Omega^2}{200 \Omega - j500 \Omega} = \frac{100 \Omega \cdot (-j1000 \Omega)}{100 \Omega \cdot (2 - j5)} \\
&= \frac{-j1000 \Omega}{2 - j5} = \frac{(-j1000 \Omega) \cdot (2 + j5)}{(2 - j5) \cdot (2 + j5)} = \frac{-j2000 \Omega + 5000 \Omega}{2^2 + 5^2} = \frac{-j2000 \Omega + 5000 \Omega}{29} \\
&\approx -j68,97 \Omega + 172,41 \Omega
\end{aligned}$$

Die drei Widerstände Z_2 , X_{C2} und Z_3 sind in Reihe geschaltet. Ich kann also den Gesamt-Scheinwiderstand Z mit der Reihenschaltungsformel berechnen und zusammenfassen.

$$\underline{Z} = \underline{Z}_2 + \underline{X}_{C2} + \underline{Z}_3 = 250 \Omega + j250 \Omega - j100 \Omega - j68,97 \Omega + 172,41 \Omega = 422,41 \Omega + j81,03 \Omega$$

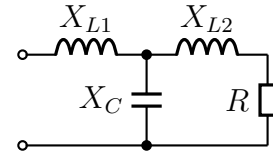
Der Betrag und der Phasenwinkel dieses Widerstandes kann wieder mit Hilfe der Grundformeln berechnet werden.

$$\begin{aligned}
Z &= \sqrt{(\operatorname{Re}\underline{Z})^2 + (\operatorname{Im}\underline{Z})^2} = \sqrt{(422,41 \Omega)^2 + (81,03 \Omega)^2} \approx 430,11 \Omega \\
\varphi &= \arctan \frac{\operatorname{Im}\underline{Z}}{\operatorname{Re}\underline{Z}} = \arctan \frac{81,03 \Omega}{422,41 \Omega} \approx 10,86^\circ
\end{aligned}$$

$$Z \approx 430,11 \Omega$$

$$\varphi \approx 10,86^\circ$$

Aufgabe 3 Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie die Widerstände X_{L1} und X_C so, dass der Gesamtwiderstand \underline{Z} der Schaltung gleich $10\ \Omega$ reell wird! Bekannt sind die Werte $X_{L2} = 8\ \Omega$ und $R = 16\ \Omega$.



Lösung: Um das Problem lösen zu können, stelle ich die Formel auf, mit deren Hilfe \underline{Z} aus den Blind- und Wirkwiderständen bestimmt wird. Dabei setze ich die unbekannt GröÙen \underline{X}_{L1} und \underline{X}_C an mit:

$$\underline{X}_{L1} = jX_L \quad \text{und} \quad \underline{X}_C = -jX_C$$

Mit diesem Ansatz erreiche ich, dass ich nur zwei **reelle** GröÙen, nämlich X_L und X_C , bestimmen muss. Die Liste der verwendeten GröÙe sieht demnach also so aus:

$$\begin{aligned} R = 16\ \Omega &\Rightarrow \underline{R} = 16\ \Omega \\ X_{L2} = 8\ \Omega &\Rightarrow \underline{X}_{L2} = j8\ \Omega \\ X_{L1} = X_L &\Rightarrow \underline{X}_{L1} = jX_L \\ &\underline{X}_C = -jX_C \end{aligned}$$

Die Reihenschaltung aus X_{L2} und R nenne ich \underline{Z}_1 und erhalte mit der Formel für die Reihenschaltung:

$$\underline{Z}_1 = \underline{R} + \underline{X}_{L2} = 16\ \Omega + j8\ \Omega$$

\underline{Z}_1 ist zu \underline{X}_C parallel geschaltet. Diese Parallelschaltung nenne ich \underline{Z}_2 . Ich bestimme \underline{Z}_2 mit der Formel für die Parallelschaltung.

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{X}_C}{\underline{Z}_1 + \underline{X}_C} = \frac{(16\ \Omega + j8\ \Omega) \cdot (-jX_C)}{(16\ \Omega + j8\ \Omega) + (-jX_C)} = \frac{-j16\ \Omega X_C + 8\ \Omega X_C}{16\ \Omega + j8\ \Omega - jX_C}$$

Hinzu kommt noch \underline{X}_{L1} , wenn ich den Gesamtwiderstand \underline{Z} bestimmen will:

$$\underline{Z} = \underline{X}_{L1} + \underline{Z}_2 = jX_L + \frac{-j16\ \Omega X_C + 8\ \Omega X_C}{16\ \Omega + j8\ \Omega - jX_C}$$

Da $\underline{Z} = 10\ \Omega$ (reell) bekannt ist, kann diesen Wert für \underline{Z} einsetzen. Ich erhalte dann *eine* Komplexe Gleichung mit *zwei* Variablen.

$$10\ \Omega = jX + \frac{-j16\ \Omega X_C + 8\ \Omega X_C}{16\ \Omega + j8\ \Omega - jX_C}$$

Eine solche Gleichung löst man am besten dadurch, dass man sie in *Komponentengleichungen* aufspaltet. Damit das möglich ist, muss ich die Gleichung vorher mit dem Hauptnenner

multiplizieren, um keine Brüche mehr zu haben. **Die Aufspaltung ist nämlich nur bei *Linearen Gleichungen* möglich!**

$$\begin{aligned}
 10 \Omega &= jX_L + \frac{-j16 \Omega X_C + 8 \Omega X_C}{16 \Omega + j8 \Omega - jX_C} \cdot (16 \Omega + j8 \Omega - jX_C) \\
 10 \Omega \cdot (16 \Omega + j8 \Omega - jX_C) &= jX_L \cdot (16 \Omega + j8 \Omega - jX_C) - j16 \Omega X_C + 8 \Omega X_C \\
 160 \Omega^2 + j80 \Omega^2 - j10 \Omega X_C &= j16 \Omega X_L - 8 \Omega X_L + X_L X_C - j16 \Omega X_C + 8 \Omega X_C + j10 \Omega X_C \\
 160 \Omega^2 + j80 \Omega^2 &= j16 \Omega X_L - 8 \Omega X_L + X_L X_C - j6 \Omega X_C + 8 \Omega X_C
 \end{aligned}$$

Diese Komplexe Gleichung kann nun aufgespaltet werden in eine Gleichung mit den *Realteilen* und eine andere Gleichung mit den *Imaginärteilen*.

$$\begin{aligned}
 \text{Re: } 160 \Omega^2 &= -8 \Omega X_L + X_L X_C + 8 \Omega X_C \\
 \text{Im: } 80 \Omega^2 &= 16 \Omega X_L - 6 \Omega X_C
 \end{aligned}$$

Ich löse die Gleichung aus den Imaginärteilen nach X_L auf, um das Ergebnis in die andere Gleichung einzusetzen.

$$\begin{aligned}
 80 \Omega^2 &= 16 \Omega X_L - 6 \Omega X_C + 6 \Omega X_C \\
 80 \Omega^2 + 6 \Omega X_C &= 16 \Omega X_L \quad | : 16 \Omega \\
 5 \Omega + \frac{3}{8} X_C &= X_L
 \end{aligned}$$

Einsetzen in die Reelle Gleichung:

$$\begin{aligned}
 160 \Omega^2 &= -8 \Omega X_L + X_L X_C + 8 \Omega X_C \\
 160 \Omega^2 &= -8 \Omega \left(5 \Omega + \frac{3}{8} X_C\right) + \left(5 \Omega + \frac{3}{8} X_C\right) X_C + 8 \Omega X_C \\
 160 \Omega^2 &= -40 \Omega^2 - 3 \Omega X_C + 5 \Omega X_C + \frac{3}{8} X_C^2 + 8 \Omega X_C + 40 \Omega^2 \\
 200 \Omega^2 &= 10 \Omega X_C + \frac{3}{8} X_C^2 \quad | \cdot \frac{8}{3} \\
 \frac{1600}{3} \Omega^2 &= \frac{80}{3} \Omega X_C + X_C^2 \quad | - \frac{1600}{3} \Omega^2 \\
 0 &= X_C^2 + \frac{80}{3} \Omega X_C - \frac{1600}{3} \Omega^2 \\
 X_{C1/2} &= -\frac{40}{3} \Omega \pm \sqrt{\left(\frac{40}{3} \Omega\right)^2 + \frac{1600}{3} \Omega^2} \\
 &= -\frac{40}{3} \Omega \pm \sqrt{\frac{1600}{9} \Omega^2 + \frac{4800}{9} \Omega^2} \\
 &= -\frac{40}{3} \Omega \pm \sqrt{\frac{6400}{9} \Omega^2} \\
 &= -\frac{40}{3} \Omega \pm \frac{80}{3} \Omega \\
 X_{C1} &= \frac{40}{3} \Omega \\
 X_{C2} &= -\frac{120}{3} \Omega = -40 \Omega
 \end{aligned}$$

Die Lösung $X_{C2} = -40 \Omega$ entfällt, denn es können nur positive Werte eingesetzt werden. Sonst wäre C eine Spule! Die Lösung $X_{C2} = \frac{40}{3} \Omega$ setze ich in die umgeformte Imaginärteil-Gleichung ein.

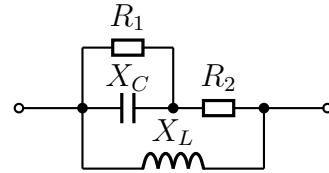
$$X_L = 5 \Omega + \frac{3}{8} X_C = 5 \Omega + \frac{3}{8} \cdot \frac{40}{3} \Omega = 10 \Omega$$

Die Lösungen lauten also: $X_L = 10 \Omega$ $X_C = \frac{40}{3} \Omega \approx 13,3 \Omega$

Aufgabe 4 Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie den Widerstand R_2 so, dass der Gesamtwiderstand Z der Schaltung reell wird! Folgende Werte sind bekannt:

$$X_C = 2\ \Omega \quad X_L = 8\ \Omega \quad R_1 = 4\ \Omega$$

Wie groß wird damit der Ersatzwiderstand Z der Schaltung?



Lösung: Um das Problem lösen zu können, stelle ich die Formel auf, mit deren Hilfe Z aus den Blind- und Wirkwiderständen bestimmt wird. Dabei setze ich die unbekannten Größe R_2 an mit:

$$R_2 = R$$

Mit diesem Ansatz erreiche ich, dass ich nur eine **reelle** Größe – nämlich R – bestimmen muss. Die Liste der verwendeten Größe sieht damit dann so aus:

$$\begin{aligned} R_1 &= 4\ \Omega \\ R_2 &= R \\ X_L &= j8\ \Omega \\ X_C &= -j2\ \Omega \end{aligned}$$

Beginnen wir mit der Zusammenfassung der Parallelschaltung aus R_1 und X_C . Den Ersatzwiderstand nenne ich Z_1 .

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{R_1 \cdot X_C}{R_1 + X_C} \\ &= \frac{4\ \Omega \cdot (-j2\ \Omega)}{4\ \Omega + (-j2\ \Omega)} \\ &= \frac{-j8\ \Omega^2}{4\ \Omega - j2\ \Omega} \\ Z_1 &= \frac{-j4\ \Omega}{2 - j} \end{aligned}$$

Mit Z_1 in Reihe geschaltet ist R_2 . Den Ersatzwiderstand dieser Reihenschaltung nenne ich Z_2 . Wir können Z_2 berechnen.

$$\begin{aligned} Z_2 &= Z_1 + R_2 \\ Z_2 &= \frac{-j4\ \Omega}{2 - j} + R \end{aligned}$$

Parallel zu Z_2 ist X_L geschaltet. Damit können wir nun den Ersatzwiderstand der gesamten Schaltung \underline{Z} aufstellen.

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{X}_L}{\underline{Z}_2 + \underline{X}_L}$$

$$\underline{Z} = \frac{\left(\frac{-j4\Omega}{2-j} + R\right) \cdot j8\Omega}{\left(\frac{-j4\Omega}{2-j} + R\right) + j8\Omega}$$

Bevor wir weiterrechnen, sollten wir diesen Term vereinfachen. Dazu fassen wir im Zähler und im Nenner des Hauptbruches die Teilbrüche zusammen, damit wir anschließend die Nenner der Teilbrüche herauskürzen können.

$$\underline{Z} = \frac{\left(\frac{-j4\Omega}{2-j} + R\right) \cdot j8\Omega}{\left(\frac{-j4\Omega}{2-j} + R\right) + j8\Omega}$$

$$= \frac{\left(\frac{-j4\Omega + R(2-j)}{2-j}\right) \cdot j8\Omega}{\frac{-j4\Omega + R(2-j) + j8\Omega(2-j)}{2-j}}$$

$$= \frac{(-j4\Omega + R(2-j)) \cdot j8\Omega}{-j4\Omega + R(2-j) + j8\Omega(2-j)}$$

$$= \frac{(-j4\Omega + 2R - jR) \cdot j8\Omega}{-j4\Omega + 2R - jR + j16\Omega - j^28\Omega}$$

$$= \frac{-j^232\Omega^2 + j16\Omega R - j^28\Omega R}{-j4\Omega + 2R - jR + j16\Omega + 8\Omega}$$

$$\underline{Z} = \frac{32\Omega^2 + j16\Omega R + 8\Omega R}{2R - jR + j12\Omega + 8\Omega}$$

Nachdem wir nun den Term für \underline{Z} vereinfacht haben, gibt zwei grundsätzlich verschiedene Wege, wie man weiterarbeiten kann.

1. Wir können den Term für \underline{Z} in einen Realteil und einen Imaginärteil aufspalten. Dann können wir den Imaginärteil gleich Null setzen, um dadurch R zu bestimmen.
2. Da \underline{Z} laut Aufgabenstellung als *reelle* Größe bekannt ist, können wir $\underline{Z} = Z$ setzen. Dadurch erhalten wir die Möglichkeit, die Gleichung in Real- und Imaginärteile aufzuspalten. Wir bekommen dann *zwei* Gleichungen mit *zwei* Variablen, nämlich Z und R .

Um die Vor- und Nachteile der beiden Verfahren besser unterscheiden zu können, führe ich nacheinander beide vor.

Lösungsweg 1

$$\begin{aligned}
 \underline{Z} &= \frac{32\Omega^2 + j16\Omega R + 8\Omega R}{2R - jR + j12\Omega + 8\Omega} \\
 &= \frac{32\Omega^2 + j16\Omega R + 8\Omega R}{(2R + 8\Omega) - j(R - 12\Omega)} \\
 &= \frac{(32\Omega^2 + j16\Omega R + 8\Omega R) \cdot ((2R + 8\Omega) + j(R - 12\Omega))}{((2R + 8\Omega) - j(R - 12\Omega)) \cdot ((2R + 8\Omega) + j(R - 12\Omega))} \\
 &= \frac{(32\Omega^2 + j16\Omega R + 8\Omega R) \cdot (2R + 8\Omega + jR - j12\Omega)}{(2R + 8\Omega)^2 + (R - 12\Omega)^2} \\
 &= \frac{64\Omega^2 R + 256\Omega^3 + j32\Omega^2 R - j384\Omega^3 + j32\Omega R^2 + j128\Omega^2 R - 16\Omega R^2}{4R^2 + 32\Omega R + 64\Omega^2 + R^2 - 24\Omega R + 144\Omega^2} \dots \\
 &\quad \dots \frac{+192\Omega^2 R + 16\Omega R^2 + 64\Omega^2 R + j8\Omega R^2 - j96\Omega^2 R}{\dots} \\
 &= \frac{320\Omega^2 R + 256\Omega^3 + j64\Omega^2 R - j384\Omega^3 + j40\Omega R^2}{5R^2 + 8\Omega R + 208\Omega^2} \\
 \underline{Z} &= \frac{320\Omega^2 R + 256\Omega^3}{5R^2 + 8\Omega R + 208\Omega^2} + j \frac{64\Omega^2 R - 384\Omega^3 + 40\Omega R^2}{5R^2 + 8\Omega R + 208\Omega^2}
 \end{aligned}$$

Da \underline{Z} reell sein soll, ist der Imaginärteil von \underline{Z} gleich Null. Damit bekommen wir eine Gleichung zur Bestimmung von R .

$$\begin{aligned}
 \text{Im}(\underline{Z}) &= 0 \\
 \frac{64\Omega^2 R - 384\Omega^3 + 40\Omega R^2}{5R^2 + 8\Omega R + 208\Omega^2} &= 0 \quad | \cdot \text{Nenner} \\
 64\Omega^2 R - 384\Omega^3 + 40\Omega R^2 &= 0 \\
 40\Omega R^2 + 64\Omega^2 R - 384\Omega^3 &= 0 \quad | : 40\Omega \\
 R^2 + 1,6\Omega R - 9,6\Omega^2 &= 0 \quad | \text{p-q-Formel} \\
 R_{1/2} &= -0,8\Omega \pm \sqrt{0,64\Omega^2 + 9,6\Omega^2} \\
 &= -0,8\Omega \pm 3,2\Omega \\
 R_1 &= 2,4\Omega \\
 R_2 &= -4\Omega \quad (\text{entfällt})
 \end{aligned}$$

Die Lösung lautet also $R = 2,4\Omega$, denn negative Widerstände gibt es nicht.

Lösungsweg 2 Als alternative Lösungsmethode können wir $\underline{Z} = Z$ setzen. Dadurch erhalten wir die Möglichkeit, die Gleichung in Real- und Imaginärteile aufzuspalten. Wir bekommen dann *zwei* Gleichungen mit *zwei reellen* Variablen, nämlich Z und R .

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \frac{32\Omega^2 + j16\Omega R + 8\Omega R}{2R - jR + j12\Omega + 8\Omega} \\ Z &= \frac{32\Omega^2 + j16\Omega R + 8\Omega R}{2R - jR + j12\Omega + 8\Omega} \quad | \cdot (2R - jR + j12\Omega + 8\Omega) \\ 2RZ - jRZ + j12\Omega Z + 8\Omega Z &= 32\Omega^2 + j16\Omega R + 8\Omega R\end{aligned}$$

Aus dieser komplexen Gleichung können wir nun *zwei* reelle Gleichungen machen, indem wir die Gleichung in eine Gleichung für die Realteile und eine andere für die Imaginärteile aufspalten.

$$\begin{array}{l} 2RZ - jRZ + j12\Omega Z + 8\Omega Z = 32\Omega^2 + j16\Omega R + 8\Omega R \\ \text{Re:} \quad 2RZ + 8\Omega Z = 32\Omega^2 + 8\Omega R \\ \text{Im:} \quad -RZ + 12\Omega Z = 16\Omega R \end{array}$$

Das Gleichungssystem lösen wir, indem wir die Gleichung aus den reellen Anteilen nach Z auflösen und in die andere Gleichung einsetzen.

$$\begin{aligned} 2RZ + 8\Omega Z &= 32\Omega^2 + 8\Omega R \\ Z \cdot (2R + 8\Omega) &= 32\Omega^2 + 8\Omega R \quad | : (2R + 8\Omega) \\ Z &= \frac{32\Omega^2 + 8\Omega R}{2R + 8\Omega} \\ Z &= \frac{8\Omega \cdot (4\Omega + R)}{2 \cdot (R + 4\Omega)} \\ Z &= 4\Omega \end{aligned}$$

Das Ergebnis setzen wir in die Gleichung aus den Imaginärteilen ein.

$$\begin{aligned} -RZ + 12\Omega Z &= 16\Omega R \\ -R \cdot 4\Omega + 12\Omega \cdot 4\Omega &= 16\Omega R \\ -4\Omega R + 48\Omega^2 &= 16\Omega R \quad | + 4\Omega R \\ 48\Omega^2 &= 20\Omega R \quad | : 20\Omega \\ 2,4\Omega &= R \end{aligned}$$

$$R = 2,4\Omega$$

Jeder mag für sich selbst entscheiden, welchen Lösungsweg er einfacher findet.

Zum ersten Lösungsweg müsste noch die fehlende Größe \underline{Z} bestimmt werden. (Im zweiten Lösungsweg entfällt das, weil die Lösung $\underline{Z} = 4 \Omega$ quasi nebenbei angefallen ist.) Dazu setzen wir den gefundenen Wert $R = 2,4 \Omega$ in die gefundene Formel für \underline{Z} ein.

$$\underline{Z} = \frac{320 \Omega^2 R + 256 \Omega^3}{5R^2 + 8 \Omega R + 208 \Omega^2} + j \frac{64 \Omega^2 R - 384 \Omega^3 + 40 \Omega R^2}{5R^2 + 8 \Omega R + 208 \Omega^2}$$

Laut Aufgabenstellung ist der Imaginärteil $\text{Im}\underline{Z} = 0$. (Das ist der Bruch hinter dem j .) Daher können wir ihn der Einfachheit halber auch gleich weglassen. In den so vereinfachten Term setzen wir dann $R = 2,4 \Omega$ ein.

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{320 \Omega^2 R + 256 \Omega^3}{5R^2 + 8 \Omega R + 208 \Omega^2} \\ &= \frac{320 \Omega^2 \cdot 2,4 \Omega + 256 \Omega^3}{5 \cdot (2,4 \Omega)^2 + 8 \Omega \cdot 2,4 \Omega + 208 \Omega^2} \\ &= \frac{768 \Omega^3 + 256 \Omega^3}{28,8 \Omega^2 + 19,2 \Omega^2 + 208 \Omega^2} \\ &= \frac{1024 \Omega^3}{256 \Omega^2} \\ &= 4 \Omega \end{aligned}$$

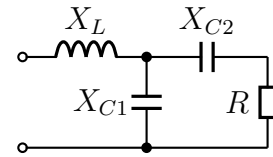
Gesamtwiderstand $\underline{Z} = 4 \Omega$

Aufgabe 5

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie den Widerstand X_{C2} so, dass der Gesamtwiderstand \underline{Z} der Schaltung reell wird! Bekannt sind die Werte:

$$X_{C1} = 50 \Omega \quad X_L = 12,5 \Omega \quad R_1 = 20 \Omega.$$

Wie groß wird damit der Ersatzwiderstand Z der Schaltung?



Lösung: Um das Problem lösen zu können, stelle ich die Formel auf, mit deren Hilfe \underline{Z} aus den Blind- und Wirkwiderständen bestimmt wird. Dabei setze ich die unbekannten Größe \underline{X}_{C2} an mit:

$$\underline{X}_{C2} = -jX$$

Mit diesem Ansatz erreiche ich, dass ich nur eine **reelle** Größe – nämlich X – bestimmen muss. Die Liste der verwendeten Größe sieht damit dann so aus:

$$\underline{X}_{C1} = -j50 \Omega$$

$$\underline{X}_L = j12,5 \Omega$$

$$\underline{R} = 20 \Omega$$

$$\underline{X}_{C2} = -jX$$

Ich beginne mit der Zusammenfassung aus X_{C2} und R . Diese nenne ich \underline{Z}_1 .

$$\underline{Z}_1 = \underline{X}_{C2} + \underline{R} = -jX + 20 \Omega$$

Parallel zu \underline{Z}_1 liegt X_{C1} . Diese Parallelschaltung nenne ich \underline{Z}_2 .

$$\begin{aligned} \underline{Z}_2 &= \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{X}_{C1}}{\underline{Z}_1 + \underline{X}_{C1}} \\ \underline{Z}_2 &= \frac{(-jX + 20 \Omega) \cdot (-j50 \Omega)}{-jX + 20 \Omega - j50 \Omega} \\ \underline{Z}_2 &= \frac{-50 \Omega X - j1000 \Omega^2}{20 \Omega - j(X + 50 \Omega)} \end{aligned}$$

In Reihe zu \underline{Z}_2 liegt X_L . Damit erhalte ich den Gesamtwiderstand \underline{Z} :

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{Z}_2 + \underline{X}_L \\ \underline{Z} &= \frac{-50 \Omega X - j1000 \Omega^2}{20 \Omega - j(X + 50 \Omega)} + j12,5 \Omega \end{aligned}$$

Ab hier gibt es wieder – wie bei den vorangehenden Aufgaben auch – zwei unterschiedliche Lösungswege.

Lösungsweg 1

$$\begin{aligned}
 \underline{Z} &= \frac{-50 \Omega X - j1000 \Omega^2}{20 \Omega - j(X + 50 \Omega)} + j12,5 \Omega \quad | \text{Konjugiert Komplex erweitern} \\
 &= \frac{(-50 \Omega X - j1000 \Omega^2) \cdot (20 \Omega + jX + j50 \Omega)}{[20 \Omega - j(X + 50 \Omega)] \cdot [(20 \Omega + j(X + 50 \Omega))]} + j12,5 \Omega \\
 &= \frac{-1000 \Omega^2 X - j50 \Omega X^2 - j2500 \Omega^2 X - j20000 \Omega^3 + 1000 \Omega^2 X + 50000 \Omega^3}{400 \Omega^2 + (X + 50 \Omega)^2} + j12,5 \Omega \\
 \underline{Z} &= \frac{-j50 \Omega X^2 - j2500 \Omega^2 X - j20000 \Omega^3 + 50000 \Omega^3}{400 \Omega^2 + (X + 50 \Omega)^2} + j2,5 \Omega
 \end{aligned}$$

Der Bruch kann nun in Realteil und Imaginärteil zerlegt werden. Das geht dann auch mit dem gesamten \underline{Z} .

$$\begin{aligned}
 \underline{Z} &= \frac{50000 \Omega^3}{400 \Omega^2 + (X + 50 \Omega)^2} + j \frac{-50 \Omega X^2 - 2500 \Omega^2 X - 20000 \Omega^3}{400 \Omega^2 + (X + 50 \Omega)^2} + j12,5 \Omega \\
 \underline{Z} &= \frac{50000 \Omega^3}{400 \Omega^2 + (X + 50 \Omega)^2} + j \left(\frac{-50 \Omega X^2 - 2500 \Omega^2 X - 20000 \Omega^3}{400 \Omega^2 + (X + 50 \Omega)^2} + 12,5 \Omega \right)
 \end{aligned}$$

Laut Aufgabenstellung ist $\text{Im}(\underline{Z}) = 0$. Daraus können wir eine Gleichung zur Bestimmung von X machen.

$$\begin{aligned}
 \frac{-50 \Omega X^2 - 2500 \Omega^2 X - 20000 \Omega^3}{400 \Omega^2 + (X + 50 \Omega)^2} + 12,5 \Omega &= 0 \quad | \cdot \text{Nenner} \\
 -50 \Omega X^2 - 2500 \Omega^2 X - 20000 \Omega^3 + 12,5 \Omega \cdot (400 \Omega^2 + (X + 50 \Omega)^2) &= 0 \\
 -50 \Omega X^2 - 2500 \Omega^2 X - 20000 \Omega^3 + 12,5 \Omega \cdot (400 \Omega^2 + X^2 + 100 \Omega X + 2500 \Omega^2) &= 0 \\
 -50 \Omega X^2 - 2500 \Omega^2 X - 20000 \Omega^3 + 12,5 \Omega \cdot (2900 \Omega^2 + X^2 + 100 \Omega X) &= 0 \\
 -50 \Omega X^2 - 2500 \Omega^2 X - 20000 \Omega^3 + 36250 \Omega^3 + 12,5 \Omega X^2 + 1250 \Omega^2 X &= 0 \\
 -37,5 \Omega X^2 - 1250 \Omega^2 X + 16250 \Omega^3 &= 0
 \end{aligned}$$

Wir haben eine Quadratische Gleichung erhalten, die wir nun mit der $p - q$ -Formel lösen können.

$$-37,5 \Omega X^2 - 1250 \Omega^2 X + 16250 \Omega^3 = 0 \quad | : (-37,5 \Omega)$$

$$X^2 + \frac{100}{3} \Omega X - \frac{1300}{3} \Omega^2 = 0$$

$$X_{1/2} = -\frac{50}{3} \Omega \pm \sqrt{\frac{2500}{9} \Omega^2 + \frac{3900}{9} \Omega^2}$$

$$X_{1/2} = -\frac{50}{3} \Omega \pm \sqrt{\frac{6400}{9} \Omega^2}$$

$$X_{1/2} = -\frac{50}{3} \Omega \pm \frac{80}{3} \Omega$$

$$X_1 = \frac{30}{3} \Omega = 10 \Omega$$

$$X_2 = -\frac{130}{3} \Omega \text{ (entfällt)}$$

Ergebnis: $X_{C2} = -j10 \Omega$ oder: $X_{C2} = 10 \Omega$

Fehlt noch Z . Da $\text{Im}Z = 0$ ist, ist $Z = Z = \text{Re}Z$.

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{50000 \Omega^3}{400 \Omega^2 + (X + 50 \Omega)^2} + j \left(\frac{-50 \Omega X^2 - 2500 \Omega^2 X - 20000 \Omega^3}{400 \Omega^2 + (X + 50 \Omega)^2} + 12,5 \Omega \right) \\ &= \frac{50000 \Omega^3}{400 \Omega^2 + (X + 50 \Omega)^2} \\ &= \frac{50000 \Omega^3}{400 \Omega^2 + (10 \Omega + 50 \Omega)^2} \\ &= \frac{50000 \Omega^3}{400 \Omega^2 + (60 \Omega)^2} \\ &= \frac{50000 \Omega^3}{400 \Omega^2 + 3600 \Omega^2} \\ &= \frac{50000 \Omega^3}{4000 \Omega^2} \\ \underline{Z} &= 12,5 \Omega \end{aligned}$$

Ergebnis: $Z = Z = 12,5 \Omega$

Lösungsweg 2 Alternativ ergibt sich auch hier wieder die Möglichkeit, aus **einer Komplexen** Gleichung **zwei Reelle** Gleichungen zu machen. Das allerdings geht nur, weil $\underline{Z} = Z$ ist!

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \frac{-50 \Omega X - j1000 \Omega^2}{20 \Omega - j(X + 50 \Omega)} + j12,5 \Omega \\ Z &= \frac{-50 \Omega X - j1000 \Omega^2}{20 \Omega - j(X + 50 \Omega)} + j12,5 \Omega \quad | \cdot \text{Nenner} \\ Z \cdot [20 \Omega - j(X + 50 \Omega)] &= -50 \Omega X - j1000 \Omega^2 + j12,5 \Omega \cdot [20 \Omega - j(X + 50 \Omega)] \\ Z \cdot (20 \Omega - jX - j50 \Omega) &= -50 \Omega X - j1000 \Omega^2 + j12,5 \Omega \cdot (20 \Omega - jX - j50 \Omega) \\ 20 \Omega Z - jXZ - j50 \Omega Z &= -50 \Omega X - j1000 \Omega^2 + j250 \Omega^2 + 12,5 \Omega X + 625 \Omega^2 \\ 20 \Omega Z - jXZ - j50 \Omega Z &= -37,5 \Omega X - j750 \Omega^2 + 625 \Omega^2\end{aligned}$$

Diese Gleichung können wir nun in eine Gleichung mit den Realteilen und in eine mit den Imaginärteilen zerlegen. Das ist der eigentliche „Trick“ bei diesem Verfahren.

$$\begin{aligned}\text{Realteile:} \quad 20 \Omega Z &= -37,5 \Omega X + 625 \Omega^2 \\ \text{Imaginärteile:} \quad -XZ - 50 \Omega Z &= -750 \Omega^2\end{aligned}$$

Da dieses Gleichungssystem **nichtlinear** ist, kommt als Lösungsverfahren wohl nur das Einsetzungsverfahren in Frage. Dazu löse ich die Realteilgleichung nach Z auf und setze das Ergebnis in die Imaginärteilgleichung ein.

$$\begin{aligned}20 \Omega Z &= -37,5 \Omega X + 625 \Omega^2 \quad | : 20 \Omega \\ Z &= -1,875 X + 31,25 \Omega\end{aligned}$$

Eingesetzt in die Imaginärteilgleichung:

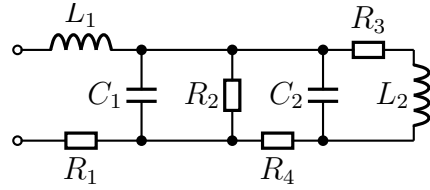
$$\begin{aligned}-XZ - 50 \Omega Z &= -750 \Omega^2 \\ -X \cdot (-1,875 X + 31,25 \Omega) - 50 \Omega \cdot (-1,875 X + 31,25 \Omega) &= -750 \Omega^2 \\ 1,875 X^2 - 31,25 \Omega X + 93,75 \Omega X - 1562,5 \Omega^2 &= -750 \Omega^2 \quad | + 750 \Omega^2 \\ 1,875 X^2 + 62,5 \Omega X - 812,5 \Omega^2 &= 0 \quad | : 1,875 \\ x^2 + \frac{100}{3} \Omega X - \frac{1300}{3} \Omega^2 &= 0\end{aligned}$$

Da diese Gleichung auch schon beim ersten Lösungsweg auftrat, kann man den Rest der Lösung dort nachlesen; der restliche Lösungsweg ist identisch.

Aufgabe 6

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie den Komplexen Ersatzwiderstand \underline{Z} der Schaltung! Bekannt sind folgende Werte:

$$\begin{aligned}\omega &= 100 \text{ s}^{-1} & L_1 &= 0,5 \text{ H} & L_2 &= 1 \text{ H} \\ C_1 &= 500 \text{ } \mu\text{F} & C_2 &= 100 \text{ } \mu\text{F} & R_1 &= 20 \text{ } \Omega \\ R_2 &= 50 \text{ } \Omega & R_3 &= 50 \text{ } \Omega & R_4 &= 30 \text{ } \Omega\end{aligned}$$



Lösung: Zur Lösung bestimme ich zunächst die entsprechenden Blindwiderstände aus der Kreisfrequenz und den L - und C -Werten.

$$\begin{aligned}X_{L1} &= \omega \cdot L_1 = 100 \text{ s}^{-1} \cdot 0,5 \text{ H} = 50 \text{ } \Omega & \Rightarrow & \underline{X}_{L1} = j50 \text{ } \Omega \\ X_{L2} &= \omega \cdot L_2 = 100 \text{ s}^{-1} \cdot 1 \text{ H} = 100 \text{ } \Omega & \Rightarrow & \underline{X}_{L2} = j100 \text{ } \Omega \\ X_{C1} &= \frac{1}{\omega \cdot C_1} = \frac{1}{100 \text{ s}^{-1} \cdot 500 \text{ } \mu\text{F}} = 20 \text{ } \Omega & \Rightarrow & \underline{X}_{C1} = -j20 \text{ } \Omega \\ X_{C2} &= \frac{1}{\omega \cdot C_2} = \frac{1}{100 \text{ s}^{-1} \cdot 100 \text{ } \mu\text{F}} = 100 \text{ } \Omega & \Rightarrow & \underline{X}_{C2} = -j100 \text{ } \Omega \\ R_1 &= 20 \text{ } \Omega & \Rightarrow & \underline{R}_1 = 20 \text{ } \Omega \\ R_2 &= 50 \text{ } \Omega & \Rightarrow & \underline{R}_2 = 50 \text{ } \Omega \\ R_3 &= 50 \text{ } \Omega & \Rightarrow & \underline{R}_3 = 50 \text{ } \Omega \\ R_4 &= 30 \text{ } \Omega & \Rightarrow & \underline{R}_4 = 30 \text{ } \Omega\end{aligned}$$

Ich beginne bei der Reihenschaltung aus R_3 und L_2 . Den zugehörigen Teilersatzwiderstand nenne ich Z_1 .

$$\begin{aligned}Z_1 &= \underline{R}_3 + \underline{X}_{L2} \\ Z_1 &= 50 \text{ } \Omega + j100 \text{ } \Omega\end{aligned}$$

Parallel zu Z_1 ist C_2 geschaltet. Den zugehörigen Teilersatzwiderstand nenne ich Z_2 .

$$\begin{aligned}Z_2 &= \frac{\underline{X}_{C2} \cdot Z_1}{\underline{X}_{C2} + Z_1} \\ &= \frac{-j100 \text{ } \Omega \cdot (50 \text{ } \Omega + j100 \text{ } \Omega)}{-j100 \text{ } \Omega + 50 \text{ } \Omega + j100 \text{ } \Omega} \\ &= \frac{-j5000 \text{ } \Omega^2 + 10000 \text{ } \Omega^2}{50 \text{ } \Omega} \\ Z_2 &= -j100 \text{ } \Omega + 200 \text{ } \Omega\end{aligned}$$

In Reihe zu Z_2 ist R_4 geschaltet. Den zugehörigen Teilersatzwiderstand nenne ich Z_3 .

$$\begin{aligned} \underline{Z}_3 &= \underline{R}_4 + \underline{Z}_2 \\ &= 30 \Omega - j100 \Omega + 200 \Omega \\ \underline{Z}_3 &= 230 \Omega - j100 \Omega \end{aligned}$$

Parallel zu Z_3 ist R_2 geschaltet. Den zugehörigen Teilersatzwiderstand nenne ich Z_4 .

$$\begin{aligned} \underline{Z}_4 &= \frac{\underline{Z}_3 \cdot \underline{R}_2}{\underline{Z}_3 + \underline{R}_2} \\ &= \frac{(230 \Omega - j100 \Omega) \cdot 50 \Omega}{230 \Omega - j100 \Omega + 50 \Omega} \\ &= \frac{11500 \Omega^2 - j5000 \Omega^2}{280 \Omega - j100 \Omega} \\ &= \frac{(11500 \Omega^2 - j5000 \Omega^2) \cdot (280 \Omega + j100 \Omega)}{(280 \Omega - j100 \Omega) \cdot (280 \Omega + j100 \Omega)} \\ &= \frac{3220000 \Omega^3 + j1150000 \Omega^3 - j1400000 \Omega^3 + 500000 \Omega^3}{78400 \Omega^2 + 10000 \Omega^2} \\ &= \frac{3720000 \Omega^3 - j250000 \Omega^3}{88400 \Omega^2} \\ \underline{Z}_4 &\approx 42,081 \Omega - j2,828 \Omega \end{aligned}$$

Parallel zu Z_4 ist C_1 geschaltet. Den zugehörigen Teilersatzwiderstand nenne ich Z_5 .

$$\begin{aligned} \underline{Z}_5 &= \frac{\underline{Z}_4 \cdot \underline{X}_{C1}}{\underline{Z}_4 + \underline{X}_{C1}} \\ &\approx \frac{(42,081 \Omega - j2,828 \Omega) \cdot (-j20 \Omega)}{42,081 \Omega - j2,828 \Omega - j20 \Omega} \\ &= \frac{-j841,62 \Omega^2 - 56,56 \Omega^2}{42,081 \Omega - j22,828 \Omega} \\ &= \frac{(-j841,62 \Omega^2 - 56,56 \Omega^2) (42,081 \Omega + j22,828 \Omega)}{(42,081 \Omega - j22,828 \Omega)(42,081 \Omega + j22,828 \Omega)} \\ &\approx \frac{-j35416 \Omega^3 + 19212 \Omega^3 - 2380 \Omega^3 - j1291 \Omega^3}{1771 \Omega^2 + 521 \Omega^2} \\ &= \frac{6832 \Omega^3 - j36707 \Omega^3}{2292 \Omega^2} \\ \underline{Z}_5 &\approx 7,344 \Omega - j16,02 \Omega \end{aligned}$$

In Reihe zu Z_5 sind R_1 und L_1 geschaltet. Damit ergibt sich der Gesamtwiderstand \underline{Z} der Schaltung.

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \underline{X}_{L_1} + \underline{Z}_5 + \underline{R}_1 \\ \underline{Z} &\approx j50 \Omega + 7,344 \Omega - j16,02 \Omega + 20 \Omega\end{aligned}$$

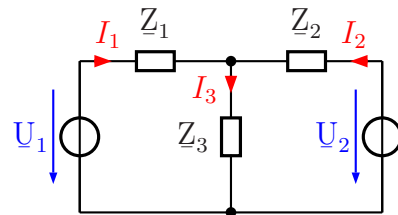
$$\underline{Z} \approx 27,344 \Omega + j33,98 \Omega$$

Aufgabe 7

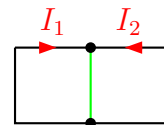
Die Ströme in nebenstehende Schaltung können durch ein Lineargleichungssystem beschrieben werden. Stellen Sie das Gleichungssystem auf und berechnen Sie die komplexen Ströme \underline{I}_1 , \underline{I}_2 und \underline{I}_3 . Bekannt sind die Werte:

$$\underline{Z}_1 = 1 \Omega - j3 \Omega; \quad \underline{Z}_2 = 2 \Omega - j4 \Omega;$$

$$\underline{Z}_3 = j2 \Omega; \quad \underline{U}_1 = j4 \text{ V}; \quad \underline{U}_2 = 4 \text{ V}$$



Lösung: Nebenstehend ist das Gerippe der Schaltung dargestellt, mit dem ich die Schaltung analysieren möchte. Da ich mit dem **Maschenstromverfahren** arbeiten möchte, wähle ich zunächst einen „**Vollständigen Baum**“, der alle Knoten (hier allerdings nur zwei) auf einem eindeutigen Weg miteinander verbindet. Dieser auf einen einzigen Strich „verkümmerte“ Baum ist in **grüner** Farbe dargestellt. Damit ergeben sich die Maschenströme I_1 und I_2 , mit denen das Gleichungssystem aufgestellt wird. Die Masche 1 verläuft über Z_1 , Z_3 und U_1 , Masche 2 entsprechend über Z_2 , U_2 und Z_3 .



$$\begin{array}{r} (1) \quad \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_3 \cdot (\underline{I}_1 + \underline{I}_2) - \underline{U}_1 = 0 \\ (2) \quad \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 + \underline{Z}_3 \cdot (\underline{I}_2 + \underline{I}_1) - \underline{U}_2 = 0 \\ \hline (1) \quad \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_2 = \underline{U}_1 \\ (2) \quad \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_2 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_1 = \underline{U}_2 \\ \hline (1) \quad (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3) \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_2 = \underline{U}_1 \\ (2) \quad +\underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_1 + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \cdot \underline{I}_2 = \underline{U}_2 \end{array}$$

Nun können die gegebenen Werte eingesetzt werden.

$$\begin{array}{r} (1) \quad (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3) \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_2 = \underline{U}_1 \\ (2) \quad +\underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_1 + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \cdot \underline{I}_2 = \underline{U}_2 \\ \hline (1) \quad (1 \Omega - j3 \Omega + j2 \Omega) \cdot \underline{I}_1 + j2 \Omega \cdot \underline{I}_2 = j4 \text{ V} \\ (2) \quad j2 \Omega \cdot \underline{I}_1 + (2 \Omega - j4 \Omega + j2 \Omega) \cdot \underline{I}_2 = 4 \text{ V} \\ \hline (1) \quad (1 \Omega - j1 \Omega) \cdot \underline{I}_1 + j2 \Omega \cdot \underline{I}_2 = j4 \text{ V} \\ (2) \quad j2 \Omega \cdot \underline{I}_1 + (2 \Omega - j2 \Omega) \cdot \underline{I}_2 = 4 \text{ V} \end{array}$$

Zur Lösung kann man natürlich jedes beliebige Lösungsverfahren für Lineargleichungssysteme verwenden.¹

Ich möchte gern das Additions-/Subtraktionsverfahren verwenden. Damit beim Subtrahieren die Variable I_1 wegfällt, multipliziere ich Gleichung (1) mit $j2$ und Gleichung (2) mit $(1 - j1)$.

$$\begin{array}{rcl}
 (1) & (1\ \Omega - j1\ \Omega) \cdot I_1 & + j2\ \Omega \cdot I_2 = j4\ \text{V} & | \cdot (j2) \\
 (2) & j2\ \Omega \cdot I_1 & + (2\ \Omega - j2\ \Omega) \cdot I_2 = 4\ \text{V} & | \cdot (1 - j1) \\
 \hline
 (1) & (j2\ \Omega - j^2 2\ \Omega) \cdot I_1 & + j^2 4\ \Omega \cdot I_2 = j^2 8\ \text{V} & \\
 (2) & (j2\ \Omega - j^2 2\ \Omega) \cdot I_1 & + (2\ \Omega - j2\ \Omega - j2\ \Omega + j^2 2\ \Omega) \cdot I_2 = 4\ \text{V} - j4\ \text{V} & \\
 \hline
 (1) & (j2\ \Omega + 2\ \Omega) \cdot I_1 & + 4\ \Omega \cdot I_2 = 8\ \text{V} & \\
 (2) & (j2\ \Omega + 2\ \Omega) \cdot I_1 & + (2\ \Omega - j2\ \Omega - j2\ \Omega - 2\ \Omega) \cdot I_2 = -4\ \text{V} + j4\ \text{V} & \\
 \hline
 (1) & (j2\ \Omega + 2\ \Omega) \cdot I_1 & + 4\ \Omega \cdot I_2 = 8\ \text{V} & | \\
 (2) & (j2\ \Omega + 2\ \Omega) \cdot I_1 & - j4\ \Omega \cdot I_2 = -4\ \text{V} + j4\ \text{V} & | - \\
 \hline
 & & (4\ \Omega - j4\ \Omega) \cdot I_2 = 12\ \text{V} - j4\ \text{V} & | : (4\ \Omega - j4\ \Omega) \\
 & & I_2 = \frac{12\ \text{V} - j4\ \text{V}}{4\ \Omega - j4\ \Omega} & \\
 & & I_2 = \frac{3 - j1}{1 - j1}\ \text{A} & \\
 & & I_2 = \frac{(3 - j1) \cdot (1 + j1)}{(1 - j1) \cdot (1 + j1)}\ \text{A} & \\
 & & I_2 = \frac{3 + j3 - j - j^2}{1 - j^2}\ \text{A} & \\
 & & I_2 = \frac{3 + j3 - j + 1}{1 + 1}\ \text{A} & \\
 & & I_2 = \frac{4 + j2}{2}\ \text{A} & \\
 & & I_2 = 2\ \text{A} + j1\ \text{A} &
 \end{array}$$

¹In Frage kommt beispielsweise das Einsetzungsverfahren, das Additions-/Subtraktionsverfahren, die Cramersche Regel oder das Gauß-Jordan-Verfahren. Einzelheiten zu den verschiedenen Verfahren sind hier zu finden:

Einsetzungsverfahren: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/einsetz.pdf>

Additions-/Subtraktionsverfahren: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/add.pdf>

Cramersche Regel: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/cramer.pdf>

Gauß-Jordan-Verfahren: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/gauss.pdf>

Das Ergebnis setze ich in Gleichung (2) ein, um \underline{I}_1 zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
 j2\Omega \cdot \underline{I}_1 + (2\Omega - j2\Omega) \cdot \underline{I}_2 &= 4\text{ V} \\
 j2\Omega \cdot \underline{I}_1 + (2\Omega - j2\Omega) \cdot (2\text{ A} + j1\text{ A}) &= 4\text{ V} \\
 j2\Omega \cdot \underline{I}_1 + 4\text{ V} + j2\text{ V} - j4\text{ V} - j^2 2\text{ V} &= 4\text{ V} \\
 j2\Omega \cdot \underline{I}_1 + 4\text{ V} + j2\text{ V} - j4\text{ V} + 2\text{ V} &= 4\text{ V} \\
 j2\Omega \cdot \underline{I}_1 + 6\text{ V} - j2\text{ V} &= 4\text{ V} \quad | -6\text{ V} + j2\text{ V} \\
 j2\Omega \cdot \underline{I}_1 &= -2\text{ V} + j2\text{ V} \quad | : j2\Omega \\
 \underline{I}_1 &= \frac{-2\text{ V} + j2\text{ V}}{j2\Omega} \cdot \frac{j}{j} \\
 \underline{I}_1 &= \frac{-j2\text{ V} + j^2 2\text{ V}}{j^2 2\Omega} \\
 \underline{I}_1 &= \frac{-j2\text{ V} - 2\text{ V}}{-2\Omega} \\
 \underline{I}_1 &= 1\text{ A} + j1\text{ A}
 \end{aligned}$$

Damit kann nun I_3 bestimmt werden:

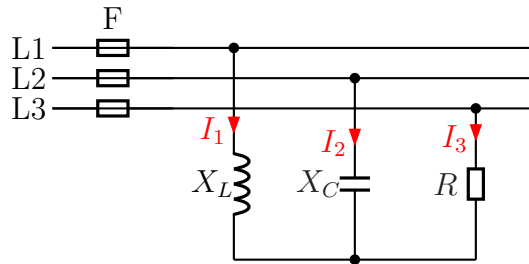
$$I_3 = I_1 + I_2 = 1\text{ A} + j1\text{ A} + 2\text{ A} + j1\text{ A} = 3\text{ A} + j2\text{ A}$$

Zusammengefasstes Ergebnis: $\underline{I}_1 = 1\text{ A} + j1\text{ A}$ $\underline{I}_2 = 2\text{ A} + j1\text{ A}$ $\underline{I}_3 = 3\text{ A} + j2\text{ A}$

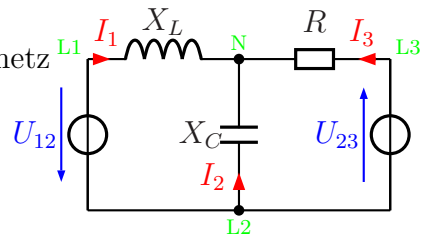
Aufgabe 8

Bestimmen Sie die Ströme I_1 , I_2 und I_3 in den Außenleitern des nebenstehend dargestellten Dreiphasenwechselstromnetzes mit $U_L = 400\text{V}$! Stellen Sie dazu ein Lineargleichungssystem für die drei komplexen Ströme \underline{I}_1 , \underline{I}_2 und \underline{I}_3 auf und lösen Sie das Gleichungssystem. Berechnen Sie anschließend die gesuchten Beträge der Ströme I_1 , I_2 und I_3 . Bekannt sind die Werte:

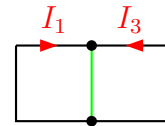
$$X_L = 100\ \Omega; \quad X_C = 200\ \Omega; \quad R = 50\ \Omega$$



Lösung: Um einen besseren Überblick zu erhalten, wird die Schaltung zunächst etwas umgezeichnet. Dabei werden aus dem Dreiphasen-Wechselspannungsnetz nur die Spannungen U_{12} und U_{23} verwendet; mit diesen wird aber trotzdem das komplette Netz vollständig beschrieben. Zur besseren Orientierung habe ich die Punkte, die die Außenleiter **L1**, **L2** und **L3** sowie den Sternpunkt **N** bezeichnen, mit in die Schaltung eingetragen.



Nebenstehend ist das Gerippe der Schaltung dargestellt, mit dem ich die Schaltung analysieren möchte. Da ich mit dem **Maschenstromverfahren** arbeiten möchte, wähle ich zunächst einen „**Vollständigen Baum**“, der alle Knoten (hier allerdings nur zwei) auf einem eindeutigen Weg miteinander verbindet. Dieser auf einen einzigen Strich „verkümmerte“ Baum ist in **grüner** Farbe dargestellt. Damit ergeben sich die Maschenströme I_1 und I_3 , mit denen das Gleichungssystem aufgestellt wird. Die Masche 1 verläuft über X_L , X_C und U_{12} , Masche 3 entsprechend über R , X_C und U_{23} .



Bevor wir beginnen können, sollten wir die komplexen Spannungen festlegen. Ich lege \underline{U}_{12} in die reelle Richtung. Damit ist:

$$\underline{U}_{12} = 400\ \text{V}$$

Die Spannung \underline{U}_{23} eilt der Spannung \underline{U}_{12} um 120° nach. Damit ergibt sich für \underline{U}_{23} :

$$\underline{U}_{23} = 400\ \text{V} \cdot e^{-j120^\circ} = 400\ \text{V} \cdot (\cos(-120^\circ) + j \sin(-120^\circ)) \approx -200\ \text{V} - j346,4\ \text{V}$$

Weiterhin ist:

$$\underline{X}_L = jX_L = j100\ \Omega$$

$$\underline{X}_C = -jX_C = -j200 \Omega$$

Jetzt können wir einen Maschenumlauf für Masche 1 und Masche 3 aufstellen.

$$\begin{array}{rcl} (1) & \underline{X}_L \cdot \underline{I}_1 + \underline{X}_C \cdot (\underline{I}_1 + \underline{I}_3) - \underline{U}_{12} & = 0 \\ (3) & \underline{R} \cdot \underline{I}_2 + \underline{X}_C \cdot (\underline{I}_2 + \underline{I}_1) + \underline{U}_{23} & = 0 \\ \hline (1) & \underline{X}_L \cdot \underline{I}_1 + \underline{X}_C \cdot \underline{I}_1 + \underline{X}_C \cdot \underline{I}_3 & = \underline{U}_{12} \\ (3) & \underline{R} \cdot \underline{I}_2 + \underline{X}_C \cdot \underline{I}_2 + \underline{X}_C \cdot \underline{I}_1 & = -\underline{U}_{23} \\ \hline (1) & (\underline{X}_L + \underline{X}_C) \cdot \underline{I}_1 + \underline{X}_C \cdot \underline{I}_3 & = \underline{U}_{12} \\ (3) & \underline{X}_C \cdot \underline{I}_1 + (\underline{R} + \underline{X}_C) \cdot \underline{I}_2 & = -\underline{U}_{23} \end{array}$$

Nun können die gegebenen Werte eingesetzt werden.

$$\begin{array}{rcl} (1) & (\underline{X}_L + \underline{X}_C) \cdot \underline{I}_1 & + \underline{X}_C \cdot \underline{I}_3 = \underline{U}_{12} \\ (3) & \underline{X}_C \cdot \underline{I}_1 & + (\underline{R} + \underline{X}_C) \cdot \underline{I}_2 = -\underline{U}_{23} \\ \hline (1) & (j100 \Omega - j200 \Omega) \cdot \underline{I}_1 & - j200 \Omega \cdot \underline{I}_3 = 400 \text{ V} \\ (3) & -j200 \Omega \cdot \underline{I}_1 & + (50 \Omega - j200 \Omega) \cdot \underline{I}_2 = 200 \text{ V} + j346,4 \text{ V} \\ \hline (1) & -j100 \Omega \cdot \underline{I}_1 & - j200 \Omega \cdot \underline{I}_3 = 400 \text{ V} \\ (3) & -j200 \Omega \cdot \underline{I}_1 & + (50 \Omega - j200 \Omega) \cdot \underline{I}_2 = 200 \text{ V} + j346,4 \text{ V} \end{array}$$

Multipliziert man Gleichung (1) mit -2 , dann können die beiden Gleichungen einfach addiert werden. \underline{I}_1 fällt dann weg.

$$\begin{array}{rcl} (1) & -j100 \Omega \cdot \underline{I}_1 & - j200 \Omega \cdot \underline{I}_3 = 400 \text{ V} & | \cdot (-2) \\ (3) & -j200 \Omega \cdot \underline{I}_1 & + (50 \Omega - j200 \Omega) \cdot \underline{I}_2 = 200 \text{ V} + j346,4 \text{ V} & \\ \hline (1) & j200 \Omega \cdot \underline{I}_1 & + j400 \Omega \cdot \underline{I}_3 = -800 \text{ V} & | \\ (3) & -j200 \Omega \cdot \underline{I}_1 & + (50 \Omega - j200 \Omega) \cdot \underline{I}_2 = 200 \text{ V} + j346,4 \text{ V} & | + \\ \hline & & (50 \Omega + j200 \Omega) \cdot \underline{I}_2 = -600 \text{ V} + j346,4 \text{ V} & \\ & & \underline{I}_2 = \frac{-600 \text{ V} + j346,4 \text{ V}}{50 \Omega + j200 \Omega} & \\ & & \underline{I}_2 = \frac{-12 + j6,928}{1 - j4} \text{ A} & \\ & & \underline{I}_2 = \frac{-12 + j6,928}{1 - j4} \cdot \frac{1 + j4}{1 + j4} \text{ A} & \\ & & \underline{I}_2 = \frac{-12 + j48 + j6,928 + 27,712}{17} \text{ A} & \\ & & \underline{I}_2 = \frac{15,712 + j54,928}{17} \text{ A} & \\ & & \underline{I}_2 \approx 0,9242 \text{ A} + j3,231 \text{ A} & \end{array}$$

Zur Bestimmung von \underline{I}_1 setze ich das Ergebnis in Gleichung (1) ein.

$$\begin{array}{rcl} -j100 \Omega \cdot \underline{I}_1 - j200 \Omega \cdot (0,9242 \text{ A} + j3,231 \text{ A}) & = & 400 \text{ V} \\ -j100 \Omega \cdot \underline{I}_1 - j184,84 \text{ V} + 646,2 \text{ V} & = & 400 \text{ V} \quad | + j184,84 \text{ V} - 646,2 \text{ V} \\ -j100 \Omega \cdot \underline{I}_1 & = & j184,84 \text{ V} - 246,2 \text{ V} \quad | : (-j100 \Omega) \\ \underline{I}_1 & = & \frac{j184,84 \text{ V} - 246,2 \text{ V}}{-j100 \Omega} \cdot \frac{j}{j} \\ \underline{I}_1 & = & \frac{-184,84 \text{ V} - j246,2 \text{ V}}{100 \Omega} \\ \underline{I}_1 & \approx & -1,8484 \text{ A} - j2,462 \text{ A} \end{array}$$

Mit diesen Ergebnissen kann nun auch \underline{I}_2 bestimmt werden. Nach der Kirchhoffschen Knotenregel gilt:

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 &= 0 \quad | -\underline{I}_1 - \underline{I}_3 \\ \underline{I}_2 &= -\underline{I}_1 - \underline{I}_3 \\ \underline{I}_2 &= -(-1,8484 \text{ A} - j2,462 \text{ A}) - (0,9242 \text{ A} + j3,231 \text{ A}) \\ \underline{I}_2 &= 1,8484 \text{ A} + j2,462 \text{ A} - 0,9242 \text{ A} - j3,231 \text{ A} \\ \underline{I}_2 &\approx 0,9242 \text{ A} - j0,769 \text{ A}\end{aligned}$$

Mit diesen Daten können wir nun die Beträge der drei Ströme bestimmen. Zur Erinnerung vorweg die zugehörige Grundformel:

$$\begin{aligned}I &= \sqrt{(\operatorname{Re}\underline{I})^2 + (\operatorname{Im}\underline{I})^2} \\ I_1 &= \sqrt{(1,8484 \text{ A})^2 + (2,462 \text{ A})^2} \approx 3,079 \text{ A} \\ I_2 &= \sqrt{(0,9242 \text{ A})^2 + (0,769 \text{ A})^2} \approx 1,202 \text{ A} \\ I_3 &= \sqrt{(0,9242 \text{ A})^2 + (3,231 \text{ A})^2} \approx 3,361 \text{ A}\end{aligned}$$

Aufgabe 9

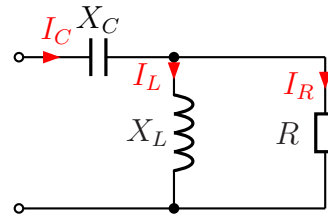
Nebenstehende Schaltung ist an eine Wechselspannung von $U = 100 \text{ V}$ angeschlossen. Die Bauteilwerte sind:

$$X_C = 20 \Omega$$

$$X_L = 25 \Omega$$

$$R = 50 \Omega$$

Gesucht sind die Ströme I_C im Kondensator, I_L in der Spule und I_R im ohmschen Widerstand.



Lösung: Zunächst stelle ich die verschiedenen angegebenen Größen im komplexer Form dar:

$$X_C = 20 \Omega \Rightarrow \underline{X}_C = -j20 \Omega$$

$$X_L = 25 \Omega \Rightarrow \underline{X}_L = j25 \Omega$$

$$R = 50 \Omega \Rightarrow \underline{R} = 50 \Omega$$

$$U = 100 \text{ V} \Rightarrow \underline{U} = 100 \text{ V}$$

Ich fasse X_L und R zum Ersatzwiderstand Z_1 zusammen.

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{\underline{X}_L \cdot \underline{R}}{\underline{X}_L + \underline{R}} \\ &= \frac{j25 \Omega \cdot 50 \Omega}{j25 \Omega + 50 \Omega} \\ &= \frac{j1250 \Omega^2}{50 \Omega + j25 \Omega} \\ &= \frac{(j1250 \Omega^2)(50 \Omega - j25 \Omega)}{(50 \Omega + j25 \Omega)(50 \Omega - j25 \Omega)} \\ &= \frac{j62500 \Omega^3 + 31250 \Omega^3}{2500 \Omega^2 + 625 \Omega^2} \\ &= \frac{31250 \Omega^3 + j62500 \Omega^3}{3125 \Omega^2} \\ Z_1 &= 10 \Omega + j20 \Omega \end{aligned}$$

In Reihe zu Z_1 ist X_C geschaltet. Ich erhalte den Gesamt-Ersatzwiderstand der Schaltung:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{X}_C + Z_1 \\ &= -j20 \Omega + 10 \Omega + j20 \Omega \\ \underline{Z} &= 10 \Omega \end{aligned}$$

Als nächstes bestimme ich den Gesamtstrom, der durch Z fließt. Da dies zugleich der Strom im Kondensator ist, nenne ich ihn I_C .

$$\begin{aligned} \underline{I}_C &= \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \\ &= \frac{100 \text{ V}}{10 \Omega} \\ \underline{I}_C &= 10 \text{ A} \end{aligned}$$

Mit diesem Strom kann ich die Spannung an der Spule und dem Widerstand berechnen. Er fließt durch den Ersatzwiderstand Z_1 . Ich nenne die Spannung deshalb U_1 .

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_C \\ &= (10 \Omega + j20 \Omega) \cdot 10 \text{ A} \\ \underline{U}_1 &= 100 \text{ V} + j200 \text{ V} \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Spannung kann ich den Strom I_L in der Spule berechnen.

$$\begin{aligned} \underline{I}_L &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{X}_L} \\ &= \frac{100 \text{ V} + j200 \text{ V}}{j25 \Omega} \quad | \text{ erweitern mit } j \\ &= \frac{j100 \text{ V} - 200 \text{ V}}{-25 \Omega} \\ \underline{I}_L &= 8 \text{ A} - j4 \text{ A} \end{aligned}$$

Ebenso geht es mit dem Strom I_R im Widerstand.

$$\begin{aligned} \underline{I}_R &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{R}} \\ &= \frac{100 \text{ V} + j200 \text{ V}}{50 \Omega} \\ \underline{I}_R &= 2 \text{ A} + j4 \text{ A} \end{aligned}$$

Gesucht sind aber nicht die komplexen Ströme \underline{I}_R , \underline{I}_C und \underline{I}_L , sondern deren Beträge I_R , I_C und I_L . Diese können wir mit der Wurzelformel $|z| = z = \sqrt{(\operatorname{Re}z)^2 + (\operatorname{Im}z)^2}$ berechnen.

$$\begin{aligned} I_R &= \sqrt{(2 \text{ A})^2 + (4 \text{ A})^2} \approx 4,472 \text{ A} \\ I_C &= \sqrt{(10 \text{ A})^2} = 10 \text{ A} \\ I_L &= \sqrt{(8 \text{ A})^2 + (-4 \text{ A})^2} \approx 8,944 \text{ A} \end{aligned}$$