Spezielle Integrationsmethoden

Wolfgang Kippels

27. Oktober 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Einleitung

Für das Diffenrenzieren gibt es 5 Regeln und eine handvoll Grundfunktionen, mit deren Hilfe so gut wie jedes Differenzial gebildet werden kann. Für das Integrieren ist es leider nicht so einfach. Hier gibt es nur zwei Regeln:

Die Konstantenregel:

$$\int k \cdot f(x)\ \mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\ \mathrm{d}x$$

Die Summenregel:

$$\int u(x) \pm v(x)\ \mathrm{d}x = \int u(x)\ \mathrm{d}x \pm \int v(x)\ \mathrm{d}x$$

Eine Produktregel, eine Quotientenregel oder eine Kettenregel wie bei der Differenzialrechnung[1] gibt es leider nicht. Es gibt jedoch immerhin so etwas ähnliches, wie solche Regeln, mit deren Hilfe man unter besonderen Bedingungen Integrale spezieller Funktionen bestimmen kann.

3 Die Partielle Integration

3.1 Mathematischer Hintergrund

Aus der Produktregel der Differenzialrechnung kann man eine Regel entwickeln, die ein wenig nach einer Produktregel aussieht. Man spricht hier von „**Partieller Integration**". Mit dieser Methode können zwar nicht alle Funktionen in Produktform bestimmt werden, aber immerhin funktioniert die Methode für etliche bestimmte Fälle. Im Detail soll das hier vorgestellt werden. Auf die Herleitung der Formel möchte ich an dieser Stelle allerdings verzichten, auch wenn sie trivial ist. Die praktische Anwendung soll im Vordergrund stehen.

$$\boxed{\int u'(x) \cdot v(x)\ \mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)\ \mathrm{d}x}$$

Hierbei wurde die eigentlich erforderliche Integrationskonstante $+c$ der Einfachheit halber weggelassen. Das möchte ich im weiteren Verlauf dieser Ausführungen auch so machen. Man muss sich also an jeder Stelle, an der ein unbestimmtes Integral gebildet wird, ein $+c$ als Ergänzung dazudenken.

[1] siehe auch hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/diffrech.pdf

Was bedeutet das nun in der Praxis?
Haben wir das Integral einer Funktion zu bestimmen, die sich als Produkt zweier Funktionen darstellen lässt, dann kommt die Partielle Integration als Lösungsmöglichkeit in Frage. Dazu müssen aber noch zwei weitere Bedingungen erfüllt sein.

1. Zu einer der beiden Teilfunktionen muss eine Stammfunktion bekannt sein.

2. Zum **Produkt** aus dieser Stammfunktion und der Ableitung der anderen Teilfunktion muss eine Stammfunktion bekannt sein.

3.2 Beispiel 1

Am besten lässt sich das vermutlich an einem Beispiel erläutern. Wir suchen dieses Integral:

$$\int x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x = ?$$

Die erste Bedingung ist auf jeden Fall erfüllt. Zu beiden Teilfunktionen existiert sowohl eine bekannte Stammfunktion als auch eine bekannte Ableitung. Starten wir den ersten Lösungsversuch.

Bezeichnen wir den ersten Faktor x als $u'(x)$ und den zweiten Faktor $\sin x$ als $v(x)$, dann können wir $u(x)$ und $v'(x)$ bestimmen.

$$\begin{array}{rclcrcl} u'(x) & = & x & \Rightarrow & u(x) & = & \dfrac{x^2}{2} \\ v(x) & = & \sin x & \Rightarrow & v'(x) & = & \cos x \end{array}$$

Damit machen wir den Ansatz nach der eben angegebenen Regel.

$$\begin{aligned} \int u'(x) \cdot v(x) &= u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) \\ \int x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2} \cdot \sin x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \cos x \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Jetzt stehen wir „auf dem Schlauch“. Der Ansatz war der berühmte „Schuss in den Ofen“, denn das Integral $\int \frac{x^2}{2} \cdot \cos x \, \mathrm{d}x$ lässt sich nicht ohne weiteres bestimmen. Bedingung zwei ist also **nicht** erfüllt.

Machen wir einen zweiten Lösungsversuch. Nehmen wir nun den zweiten Faktor $\sin x$ als $u'(x)$ und den ersten Faktor x als $v(x)$, dann sehen die Vorüberlegungen so aus:

$$\begin{array}{rclcrcl} u'(x) & = & \sin x & \Rightarrow & u(x) & = & -\cos x \\ v(x) & = & x & \Rightarrow & v'(x) & = & 1 \end{array}$$

Wenden wir hiermit die Formel für die Partielle Integration an.

$$\begin{aligned}
\int u'(x) \cdot v(x) &= u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) \\
\int (\sin x) \cdot x \, \mathrm{d}x &= (-\cos x) \cdot x - \int (-\cos x) \cdot 1 \, \mathrm{d}x \\
&= -x \cdot \cos x - (-\sin x) \\
\int x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x &= -x \cdot \cos x + \sin x
\end{aligned}$$

Diesmal hatten wir „Glück“, die zweite Bedingung war erfüllt. Das Integral auf der rechten Seite war zu lösen. Es kommt also bei der Partiellen Integration weniger darauf an, eine Formel 1:1 umzusetzen, als darauf, ein Gespür zu entwickeln, **wie** diese Methode (vermutlich) wirkungsvoll eingesetzt werden kann.

3.3 Beispiel 2

Ein zweites Beispiel soll verdeutlichen, dass die Anwendung durchaus noch etwas “trickreicher“ erfolgen kann. Gesucht ist dieses Integral:

$$\int x^2 \cdot \sin x \, \mathrm{d}x = ?$$

Die erste Überlegung ist wieder die: *Welcher Faktor wird wofür eingesetzt?* Sicher ungünstig ist es, den ersten Faktor x^2 für $u'(x)$ zu nehmen, weil hier bei der Stammfunktion der Exponent **noch größer** wird. Versuchen wir es also ähnlich, wie im ersten Beispiel.

$$\begin{array}{rclcrcl}
u'(x) &=& \sin x &\Rightarrow& u(x) &=& -\cos x \\
v(x) &=& x^2 &\Rightarrow& v'(x) &=& 2x
\end{array}$$

Damit setzen wir die Partielle Integration an.

$$\begin{aligned}
\int u'(x) \cdot v(x) &= u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) \\
\int (\sin x) \cdot x^2 \, \mathrm{d}x &= (-\cos x) \cdot x^2 - \int (-\cos x) \cdot 2x \, \mathrm{d}x \\
\int x^2 \cdot \sin x \, \mathrm{d}x &= -x^2 \cdot \cos x + \int 2x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Auf den ersten Blick hat uns das nicht weitergebracht, weil ja immer noch ein Integral übrig geblieben ist, dessen Stammfunktion wir nicht kennen. Auf dieses Integral können wir jedoch erneut die Partielle integration anwenden. Ähnlich, wie in Beispiel 1 legen wir die Faktoren wie folgt fest:

$$\begin{array}{rclcrcl}
u'(x) &=& \cos x &\Rightarrow& u(x) &=& \sin x \\
v(x) &=& 2x &\Rightarrow& v'(x) &=& 2
\end{array}$$

Das wenden wir jetzt auf das zweite Integral an.

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cdot \sin x \ \mathrm{d}x &= -x^2 \cdot \cos x + \int 2x \cdot \cos x \ \mathrm{d}x \\
&= -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x - \int 2 \cdot \sin x \ \mathrm{d}x \\
&= -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x - (-2 \cdot \cos x) \\
\int x^2 \cdot \sin x \ \mathrm{d}x &= -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x + 2 \cdot \cos x
\end{aligned}$$

Diesmal war das zweite Integral über die bekannte Konstantenregel aufzulösen, die zweimalige Anwendung der Partiellen Integration war erfolgreich. Es war also zielführend, am Anfang den Faktor x^2 als $v(x)$ zu wählen, da mit jeder weiteren Ableitung der Exponent kleiner wurde.

Fassen wir das als Tipp zusammen:

> **Ist einer der Faktoren eine Potenz von *x*, wählt man diesen als *v(x)*. Die Partielle Integration wird nach diesem System mehrfach hintereinander ausgeführt, bis *x* verschwindet.**

3.4 Beispiel 3

Es gibt aber auch andere Konstellationen, wo diese Vorgehensweise nicht greift, trotzdem aber eine Partielle Integration möglich ist. Beispiel 3 soll dies deutlich machen. Gesucht ist dieses Integral:

$$\int e^x \cdot \sin x \ \mathrm{d}x = ?$$

Bekanntlich kann man e^x so oft ableiten, wie man will, das x verschwindet nie. Etwas willkürlich wähle ich e^x als $u'(x)$ und $\sin x$ als $v(x)$. Schaun wir mal, was passiert.

$$\begin{array}{rclcrcl}
u'(x) & = & e^x & \Rightarrow & u(x) & = & e^x \\
v(x) & = & \sin x & \Rightarrow & v'(x) & = & \cos x
\end{array}$$

Damit kann die Partielle Integration angewendet werden.

$$\int e^x \cdot \sin x \ \mathrm{d}x = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x \ \mathrm{d}x$$

Wieder scheint es so, als wären wir keinen Deut weitergekommen. Das verbliebene Integral ist nicht einfacher zu lösen, als das vorgegebene. Versuchen wir trotzdem noch einmal die Partielle Integration. Als Ansatz dient:

$$\begin{array}{rclcrcl}
u'(x) & = & e^x & \Rightarrow & u(x) & = & e^x \\
v(x) & = & \cos x & \Rightarrow & v'(x) & = & -\sin x
\end{array}$$

Damit kann die Partielle Integration weiter angewendet werden.

$$\begin{aligned}\int e^x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x &= e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x \\ \int e^x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x &= e^x \cdot \sin x - \left(e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot (-\sin x) \, \mathrm{d}x \right)\end{aligned}$$

Wieder sieht es so aus, als hätte das nichts gebracht. Bei genauerem Hinsehen entdeckt man jedoch, dass jetzt das gesuchte Integral auf beiden Seiten der Gleichung vorkommt. Wir können das zusammenfassen:

$$\begin{aligned}\int e^x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x &= e^x \cdot \sin x - \left(e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot (-\sin x) \, \mathrm{d}x \right) \\ \int e^x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x &= e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot (-\sin x) \, \mathrm{d}x \\ \int e^x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x &= e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x \\ 2 \cdot \int e^x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x &= e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x \\ \int e^x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x &= \frac{e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x}{2}\end{aligned}$$

Auch hierzu ein Tipp:

> **Bei zyklisch wiederkehrenden Ableitungen wie Winkelfunktionen kann es sein, dass nach mehrfacher Anwendung der Partiellen Integration das Urspungs-Integral wieder auftaucht. Dann können beide zur Lösung zusammengefasst werden.**

3.5 Fazit

Die Partielle Integration ist und bleibt ein Verfahren, das man mit viel mathematischem Gefühl anwenden muss. Ein Schema F dazu gibt es nicht. Leider gibt es trotz aller Tricks auch Fälle, bei denen die Funktion als Produkt angegeben ist, eine Partielle Integration aber trotzdem nicht zu einem Ergebnis führt. :-(

4 Integration durch Substitution

4.1 Mathematischer Hintergrund

Während sich die Partielle Integration aus der Produktregel der Differenzialrechnung ergibt, ist die Integration durch Substitution das Gegenstück zur Kettenregel der Differenzialrechnung. Auch hier möchte ich auf die Herleitung der Formel verzichten und mich nur um die Anwendung kümmern. Weiterhin werde ich auch in diesem Teil die Integrationskonstante $+c$ zur Vereinfachung überall weglassen. Ich setze voraus, jeder weiß, dass sie grundsätzlich immer noch dazukommt.

Durch Umstellen der Kettenregel kommt man zu dieser Formel:

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x) \; \mathrm{d}x = F\big(g(x)\big)$$

Hierbei ist F die Stammfunktion von f.

Substituiert (ersetzt) man nun die Unterfunktion $g(x)$ mit u, dann erhält man:

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x) \; \mathrm{d}x = \int f(u) \; du$$

Die Funktion $f(u)$ sollte natürlich einfach integrierbar sein, sonst nützt einem das ganze Verfahren nichts. Zum Schluss substituiert man wieder zurück.

Wie man sieht, muss die zu integrierende Funktion eine ganz bestimmte Form haben, nur dann funktioniert das Verfahren, und auch die Stammfunktion $F(u)$ muss bestimmbar sein. Anders ausgedrückt: Auch dieses Verfahren funktioniert nur bei bestimmten Funktionen und erfordert ein Mindestmaß an mathematischem Gefühl.

4.1.1 Beispiel 1

Um das Verfahren zu verstehen, gehen wir ein paar Beispiele durch. Unser erstes zu bestimmendes Integral lautet:

$$\int \cos x \cdot e^{\sin x} \; \mathrm{d}x = ?$$

Es gibt eine innere Funktion, die wir als $g(x)$ bezeichnen können. Es ist der Exponent.

$$g(x) = \sin x$$

Hiervon benötigen wir auch die Ableitung:

$$g'(x) = \cos x$$

Wir müssen nun prüfen, ob das zum Ansatz für die Integration durch Substitution passt.

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x) \ \mathrm{d}x = \int e^{\underbrace{\sin x}_{g(x)}} \cdot \underbrace{\cos x}_{g'(x)} \ \mathrm{d}x$$

Wir haben Glück, dies ist genau das zu bestimmende Integral. Wir können jetzt substituieren mit:

$$u = g(x) = \sin x$$

Setzen wir das ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{\cos x}_{g'(x)} \cdot \underbrace{e^{\overbrace{\sin x}^{g(x)=u}}}_{f(g(x))} \ \mathrm{d}x &= \int e^u \ du \\
\int \cos x \cdot e^{\sin x} \ \mathrm{d}x &= e^u
\end{aligned}$$

Jetzt kann zurücksubstituiert werden:

$$\begin{aligned}
\int \cos x \cdot e^{\sin x} \ \mathrm{d}x &= e^u \\
\int \cos x \cdot e^{\sin x} \ \mathrm{d}x &= e^{\sin x}
\end{aligned}$$

4.1.2 Beispiel 2

Das war noch einfach, oder? Hier folgt unser zweites Integral:

$$\int \sqrt{2x+3} \ \mathrm{d}x = ?$$

Hier haben wir eine „innere Funktion“, die wir als $g(x)$ bezeichnen können:

$$u = g(x) = 2x + 3$$

Von dieser Funktion wird auch die Ableitung $g'(x)$ benötigt:

$$g'(x) = 2$$

Nun müsste sich unser Integral schreiben lassen als:

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x) \ \mathrm{d}x = \int \sqrt{2x+3} \cdot 2 \ \mathrm{d}x$$

Das ist leider nicht ganz die zu integrierende Funktion, es lässt sich aber passend machen. Wir heben den „störenden“ Faktor 2 durch einen zusätzlichen Faktor $\frac{1}{2}$ auf, den wir dann gemäß der Konstantenregel auch aus dem Integral herausnehmen können:

$$\int \sqrt{2x+3} \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int \sqrt{2x+3} \cdot 2 \ \mathrm{d}x$$

In dieser Form passt es nun, die Integration durch Substitution ist möglich. Wir substituieren (ersetzen)

$$u = g(x) = 2x + 3$$

und erhalten:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{2x+3}\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \cdot \int \overbrace{\sqrt{\underbrace{2x+3}_{g(x)=u}}}^{f(g(x))} \cdot \underbrace{2}_{g'(x)}\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int \sqrt{u}\ du \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int u^{\frac{1}{2}}\ du \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{u^3}
\end{aligned}$$

Jetzt kann zurücksubsituiert werden.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{2x+3}\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{u^3} \\
\int \sqrt{2x+3}\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(2x+3)^3}
\end{aligned}$$

4.1.3 Beispiel 3

Hier folgt noch ein drittes Beispiel, das wieder etwas anders aussieht. Wir suchen folgendes Integral:

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x-1}\ \mathrm{d}x = ?$$

Hier bietet es sich an, den Nenner als $g(x)$ zu verwenden.

$$g(x) = x^2 + 2x - 1$$

Wir benötigen auch die Ableitung davon:

$$g'(x) = 2x + 2$$

Bis auf den Faktor 2 ist das „zufällig“ identisch mit dem Zähler. Den Nenner können wir auch als Kehrwert schreiben, womit wir wieder auf ein Produkt in der gewünschten Form kommen. Das sieht dann so aus:

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x-1}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2+2x-1} \cdot (x+1)\ \mathrm{d}x$$

Leider ist der zweite Faktor wieder nicht identisch mit $g'(x)$, aber es ist genau die Hälfte. Wir können das so ausgleichen:

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x^2+2x-1} \cdot (2x+2)\,\mathrm{d}x$$

Jetzt haben wir die gewünschte Form, der zweite Faktor ist identisch mit $g'(x)$. Wir können subsituieren: $u = g(x) = x^2 + 2x - 1$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x^2+2x-1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x^2+2x-1} \cdot (2x-2)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{u}\,du \\
&= \frac{1}{2} \cdot \ln|u|
\end{aligned}$$

Wir können zurücksubstituieren:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x^2+2x-1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \cdot \ln|u| \\
\int \frac{x+1}{x^2+2x-1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \cdot \ln|x^2+2x-1|
\end{aligned}$$

4.2 Substitution mit Grenzen

Bisher haben wir uns nur um das Bilden einer Stammfunktion gekümmert. Wenn ein **Bestimmtes Integral** gebildet werden soll, kann man eventuell auch die Integrationsgrenzen entsprechend anpassen. In diesem Fall entfällt das „Zurück-Substituieren“. Ein Beispiel (entsprechend Beispiel 1) soll das verdeutlichen.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot e^{\sin x}\ \mathrm{d}x = ?$$

Wir haben substituiert:

$$u = g(x) = \sin x$$

Hiervon benötigten wir auch die Ableitung:

$$g'(x) = \cos x$$

Wir mussten prüfen, ob das zum Ansatz für die Integration durch Substitution passte.

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\ \mathrm{d}x = \int e^{\underbrace{\sin x}_{g(x)}} \cdot \underbrace{\cos x}_{g'(x)}\ \mathrm{d}x$$

Wir hatten Glück, dies ist genau das zu bestimmende Integral. Wir konnten jetzt substituieren mit:

$$u = g(x) = \sin x$$

Nun wird es interessant. Die ursprünglichen Integrationsgrenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ beziehen sich ja auf die Variable x. Die neue Variable heißt aber nun $u = g(x)$. Wenn ich die beiden Integrationsgrenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ für x in $g(x)$ einsetze, erhalte ich die zugehörigen Integrationsgrenzen, die sich auf die Variable u beziehen.

$$\begin{array}{rccccccccc} \text{untere Grenze:} & 0 & \rightarrow & u_1 & = & g(0) & = & \sin 0 & = & 0 \\ \text{obere Grenze:} & \frac{\pi}{2} & \rightarrow & u_2 & = & g(\frac{\pi}{2}) & = & \sin\frac{\pi}{2} & = & 1 \end{array}$$

Nach dem Anwenden der Substitutionsregel und dem Einsetzen der umgewandelten Integrationsgrenzen erhalten wir:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot e^{\sin x}\ \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 u' \cdot e^u\ \mathrm{d}u = [e^u]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

Aus den hier gewonnenen Erkenntnissen können wir ein „Rezept“[2] zur Vorgehensweise beim **Substituieren mit Grenzen** entwickeln.[3]

[2] In der mathemtischen Fachsprache bezeichnet man ein „Rezept“ eigentlich als „Algorithmus“. Ich bleibe hier aber bei dem Begriff „Rezept“, weil er meines Erachtens eingängiger ist.

[3] Dieses Rezept zur Vorgehensweise sowie die nachfolgenden Beispiele hat mir Herr David Kauschke aus Berlin zur Weiterveröfentlichung zur Verfügung gestellt. Meinen herzlichen Dank an dieser Stelle.

4.2.1 Vorgehensweise bei der Substitution mit Grenzen

1. Substituieren:
$$u = g(x)$$

2. dx bestimmen:
$$u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{u'}$$

3. Grenzen anpassen:
$$\int\limits_a^b \ldots \mathrm{d}x \quad \text{daraus wird:} \quad \int\limits_{g(a)}^{g(b)} \ldots \mathrm{d}u$$

4. Substitution anwenden (einsetzen/ersetzen):
$$\int\limits_{g(a)}^{g(b)} \ldots \frac{\mathrm{d}u}{u'}$$

   Es sollte nach Kürzen und Sustituieren kein x mehr vorhanden sein!

5. Eine Resubstitution entfällt bei bestimmtem Integral mit bereits angepassten Grenzen.

4.2.2 Beispiele:

Beispiel 1: Wurzel

$$\int\limits_4^9 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \dots$$

Schritt 1: Substituieren

$$u = g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

Damit gilt:

$$u' = g'(x) = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$$

Schritt 2: $\mathrm{d}x$ bestimmen

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{u'} = \frac{\mathrm{d}u}{\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}} = 2\cdot\sqrt{x}\cdot\mathrm{d}u = 2u\cdot\mathrm{d}u$$

Schritt 3: Grenzen anpassen

$$\begin{array}{rlcccccc} \text{untere Grenze:} & x_1 = 4 & \rightarrow & u_1 & = & g(4) & = & \sqrt{4} & = & 2 \\ \text{obere Grenze:} & x_2 = 9 & \rightarrow & u_2 & = & g(9) & = & \sqrt{9} & = & 3 \end{array}$$

Schritt 4: Substitution anwenden

$$\int\limits_4^9 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_2^3 \frac{e^u}{u}\cdot 2u\,\mathrm{d}u = \int\limits_2^3 e^u\cdot 2\,\mathrm{d}u = 2\cdot\int\limits_2^3 e^u\,\mathrm{d}u = 2\cdot\left[e^u\right]_2^3 = 2\cdot\left(e^3 - e^2\right) \approx 25{,}39$$

Beispiel 2: e-Funktion

$$\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \dots$$

Schritt 1: Substitutieren

$$u = g(x) = e^x$$

Damit gilt:

$$u' = g'(x) = e^x$$

Schritt 2: $\mathrm{d}x$ bestimmen

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{u'} = \frac{\mathrm{d}u}{e^x} = \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

Schritt 3: Grenzen anpassen

$$\begin{array}{rlcccccc} \text{untere Grenze:} & x_1 = 0 & \rightarrow & u_1 & = & g(0) & = & e^0 & = & 1 \\ \text{obere Grenze:} & x_2 = 2 & \rightarrow & u_2 & = & g(2) & = & e^2 \end{array}$$

Schritt 4: Substitution anwenden

$$\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{e^2} \frac{u}{1+u}\,\frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_1^{e^2} \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u$$

Damit wäre man leider noch nicht ganz am Ziel. Mit einer weiteren Anwendung der Substitutionsregel geht es aber weiter.

Schritt 1: Substitutieren

$$v = g(u) = 1 + u$$

Damit gilt:

$$v' = g'(u) = 1$$

Schritt 2: $\mathrm{d}u$ bestimmen

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}v}{v'} = \frac{\mathrm{d}v}{1} = \mathrm{d}v$$

Schritt 3: Grenzen anpassen

$$\begin{array}{rlcccccc} \text{untere Grenze:} & u_1 = 1 & \rightarrow & v_1 & = & g(1) & = & 1+1 & = & 2 \\ \text{obere Grenze:} & u_2 = e^2 & \rightarrow & v_2 & = & g(2) & = & 1+e^2 \end{array}$$

Schritt 4: Substitution anwenden

$$\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{e^2} \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u = \int_2^{1+e^2} \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v = [\ln v]_2^{1+e^2} = \ln(1+e^2) - \ln(2) \approx 1{,}4338$$

Beispiel 3: Trigonometrie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = \ldots$$

Schritt 1: Substituieren

$$u = g(x) = \sin x$$

Damit gilt:

$$u' = g'(x) = \cos x$$

Schritt 2: dx bestimmen

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{u'} = \frac{\mathrm{d}u}{\cos x}$$

Schritt 3: Grenzen anpassen

$$\begin{array}{rlcccccc} \text{untere Grenze:} & x_1 = 0 & \rightarrow & u_1 & = & g(0) & = & \sin 0 & = & 0 \\ \text{obere Grenze:} & x_2 = \frac{\pi}{2} & \rightarrow & u_2 & = & g(\frac{\pi}{2}) & = & \sin \frac{\pi}{2} & = & 1 \end{array}$$

Schritt 4: Substitution anwenden

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = \int_0^1 u^3 \cdot \cos x \frac{\mathrm{d}u}{\cos x} = \int_0^1 u^3 \, \mathrm{d}u = \left[\frac{1}{4}u^4\right]_0^1 = \frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{1}{4} \cdot 0^4 = \frac{1}{4}$$

4.3 Fazit

Leider gibt es auch bei der Integration durch Substitution kein einfaches Schema, mit dem man alles lösen kann. Zum einen kommen nur bestimmte Funktionen in Frage, und zum anderen muss man auch hier ein Gespür dafür mitbringen, was man wie substituieren kann.

5 Integration durch Partialbruchzerlegung

Stellt die zu integrierende Funktion eine **echte Gebrochen Rationale** Funktion dar, dann lässt sie sich so in Partialbrüche zerlegen, dass jeder einzelne Bruch integrierbar ist. Die Funktion muss also diese Form haben:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome darstellen. Ein Beispiel:

$$\int \frac{4x^2 + 20x + 12}{2x^3 + 4x^2 - 2x - 4}\,\mathrm{d}x = \dots$$

Hier kann eine Partialbruchzerlegung[4] durchgeführt werden.

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2 + 20x + 12}{2x^3 + 4x^2 - 2x - 4}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{3}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{3}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{2}{x+2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Diese drei Teilintegrale können nun mit der Methode „Integration durch Substitution“ bestimmt werden.

<u>Hinweis:</u> Es kann sein, dass der Grad des Zählerpolynoms größer oder gleich dem Grad des Nennerpolynoms ist. Auch dann funktioniert dieses Verfahren. In diesem Fall führt man zunächst eine (unvollständige) Polynomdivision durch. Wir erhalten als Ergebnis ein (kleines) Teilpolynom und einen „Ergebnisrest“ in Form einer Gebrochen Rationalen Funktion. Folgendes Beispiel soll das verdeutlichen:

$$\int \frac{2x^3 + 2x^2 - x + 3}{x^2 - 4x + 3}\,\mathrm{d}x = \dots$$

Führen wir also die Polynomdivision durch:

$$\begin{array}{rrrr} (2x^3 & +2x^2 & -x & +3) \\ -(2x^3 & -8x^2 & +6x) & \\ \hline & 10x^2 & -7x & +3 \\ - & (10x^2 & -40x & +30) \\ \hline & & 33x & -27 \end{array} \quad : \quad (x^2 - 4x + 3) \quad = \quad 2x + 10 + \tfrac{33x-27}{x^2-4x+3}$$

Hiermit kann das Integral wie folgt umgeformt werden:

$$\int \frac{2x^3 + 2x^2 - x + 3}{x^2 - 4x + 3}\,\mathrm{d}x = \int 2x + 10 + \frac{33x - 27}{x^2 - 4x + 3}\,\mathrm{d}x$$

[4] Näheres zur Partialbruchzerlegung siehe hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/partial.pdf

Die Partialbruchzerlegung muss jetzt nur noch für den Funktionsteil mit dem Bruch durchgeführt werden. Dazu bestimmen wir zunächst die Nullstellen des Nenners.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ x_{01/2} &= 2 \pm \sqrt{4-1} \\ x_{01} = 1 & \quad x_{02} = 3 \end{aligned}$$

Der Ansatz zur Partialbruchzerlegung kann damit gemacht werden.

$$\begin{aligned} \frac{33x-27}{x^2-4x+3} &= \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3} \\ 33x - 27 &= a \cdot (x-3) + b \cdot (x-1) \\ 33x - 27 &= ax - 3a + bx - b \\ 33x - 27 &= (a+b)x - (3a+b) \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir dieses Lineargleichungssystem 2. Ordnung:

$$\boxed{\begin{array}{lrrcr} (1) & a & +b & = & 33 \\ (2) & 3a & +b & = & 27 \end{array}}$$

Das Gleichungssystem kann mit einem beliebigen Verfahren[5] aufgelöst werden. Man erhält:

$$\boxed{\begin{array}{lcr} a & = & -3 \\ b & = & 36 \end{array}}$$

Mit diesen Werten kann das ursprüngliche Integral wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 + 2x^2 - x + 3}{x^2 - 4x + 3}\,\mathrm{d}x &= \int 2x + 10 - \frac{3}{x-1} + \frac{36}{x-3}\,\mathrm{d}x \\ &= \int 2x + 10\,\mathrm{d}x - \int \frac{3}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{36}{x-3}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Das linke Integral kann sofort mit Summen- und Konstantenregel aufgelöst werden, das mittlere und das rechte mit Hilfe der Substitutionsmethode.

[5] Einzelheiten siehe z.B. hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/lingl.pdf

6 Übungsaufgaben

Bestimmen Sie mit geeigneten Methoden die Stammfunktionen der folgenden Funktionen!

6.1 Aufgabe 1

$$\int \frac{2}{(2x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \dots$$

6.2 Aufgabe 2

$$\int (3x+4)\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x = \dots$$

6.3 Aufgabe 3

$$\int \frac{2x^2-7x+7}{x-3}\,\mathrm{d}x = \dots$$

6.4 Aufgabe 4

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \dots$$

6.5 Aufgabe 5

$$\int \frac{3x^2-10x+11}{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x = \dots$$

7 Ergebnisse der Übungsaufgaben

7.1 Aufgabe 1

$$\int \frac{2}{(2x-1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2x-1} + c$$

7.2 Aufgabe 2

$$\int (3x+4)\cdot e^{-x}\ \mathrm{d}x = -e^{-x}\cdot(3x+7) + c$$

7.3 Aufgabe 3

$$\int \frac{2x^2-7x+7}{x-3}\,\mathrm{d}x = x^2 - x + 4\cdot\ln|x-3| + c$$

7.4 Aufgabe 4

$$\int \sin^2 x\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos x\cdot\sin x + \frac{1}{2}x$$

7.5 Aufgabe 5

$$\int \frac{3x^2-10x+11}{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x = \dots$$

8 Durchgerechnete Lösungen

8.1 Aufgabe 1

$$\int \frac{2}{(2x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Hier bietet sich die Substitutionsmethode an. Ich substituiere:

$$g(x) = 2x - 1 \qquad \Rightarrow \qquad g'(x) = 2$$

Die Ableitung ist zufällig identisch mit dem Zähler. Den Bruch schreibe ich als Produkt, damit die Substitutionsregel angewendet werden kann.

$$\int \frac{2}{(2x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(2x-1)^2} \cdot 2\ \mathrm{d}x$$

Nun kann die Substitution $2x - 1 = u$ durchgeführt werden:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{(2x-1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{u^2}\,du \\
&= \int u^{-2}\,du \\
&= -1 \cdot u^{-1} + c \\
&= -\frac{1}{u} + c \\
\int \frac{2}{(2x-1)^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2x-1} + c
\end{aligned}$$

8.2 Aufgabe 2

$$\int (3x+4) \cdot e^{-x} \; \mathrm{d}x = \ldots$$

Hier hilft die Partielle Integration mit folgendem Ansatz:

$$\begin{array}{rclcrcl} u'(x) & = & e^{-x} & \Rightarrow & u(x) & = & -e^{-x} \\ v(x) & = & 3x+4 & \Rightarrow & v'(x) & = & 3 \end{array}$$

Die Formel für die Partielle Integration wird angewendet:

$$\begin{aligned} \int (3x+4) \cdot e^{-x} \; \mathrm{d}x &= -e^{-x} \cdot (3x+4) - \int -3 \cdot e^{-x} \; \mathrm{d}x \\ &= -e^{-x} \cdot (3x+4) + 3 \cdot \int e^{-x} \; \mathrm{d}x \\ &= -e^{-x} \cdot (3x+4) + 3 \cdot (-e^{-x}) + c \\ \int (3x+4) \cdot e^{-x} \; \mathrm{d}x &= -e^{-x} \cdot (3x+7) + c \end{aligned}$$

8.3 Aufgabe 3

$$\int \frac{2x^2 - 7x + 7}{x - 3} \, \mathrm{d}x = \ldots$$

Hier scheint eine (unvollständige) Polynomdivision angebracht.

$$\begin{array}{rrrcccl}
(2x^2 & -7x & +7) & : & (x-3) & = & 2x - 1 + \frac{4}{x-3} \\
-(2x^2 & -6x) & & & & & \\
\hline
 & -x & +7 & & & & \\
- & (-x & +3) & & & & \\
\hline
 & & 4 & & & &
\end{array}$$

Damit lässt sich die Funktion wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^2 - 7x + 7}{x - 3} \, \mathrm{d}x &= \int 2x - 1 + \frac{4}{x-3} \, \mathrm{d}x \\
\int \frac{2x^2 - 7x + 7}{x - 3} \, \mathrm{d}x &= \int 2x - 1 \, \mathrm{d}x + \int \frac{4}{x-3} \, \mathrm{d}x \\
\int \frac{2x^2 - 7x + 7}{x - 3} \, \mathrm{d}x &= x^2 - x + \int \frac{4}{x-3} \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Das „Restintegral“ rechts kann nun mit Hilfe der Substitutionsmethode bestimmt werden. Substituiert wird:

$$g(x) = x - 3 \qquad \Rightarrow \qquad g'(x) = 1$$

Die Ableitung ist bis auf einen Faktor 4 identisch mit dem Zähler. Den Bruch schreibe ich als Produkt, damit die Substitutionsregel angewendet werden kann.

$$\int \frac{4}{x-3} \, \mathrm{d}x = 4 \cdot \int \frac{1}{x-3} \cdot 1 \, \mathrm{d}x$$

Nun kann die Substitution $x - 3 = u$ durchgeführt werden.

$$\begin{aligned}
\int \frac{4}{x-3} \, \mathrm{d}x &= 4 \cdot \int \frac{1}{x-3} \cdot 1 \, \mathrm{d}x \\
&= 4 \cdot \int \frac{1}{u} \, du \\
&= 4 \cdot \ln |u| + c \\
&= 4 \cdot \ln |x - 3| + c
\end{aligned}$$

Hiermit lautet das ursprünglich gesuchte Integral:

$$\int \frac{2x^2 - 7x + 7}{x - 3} \, \mathrm{d}x = x^2 - x + 4 \cdot \ln |x - 3| + c$$

8.4 Aufgabe 4

$$\int \sin^2 x \; \mathrm{d}x = \ldots$$

Auf den ersten Blick passt keins der dargestellten Verfahren. Das Quadrat lässt sich jedoch auch als Produkt schreiben:

$$\int \sin x \cdot \sin x \; \mathrm{d}x = \ldots$$

Jetzt liegt ein Produkt vor, womit die Partielle Integration sinnvoll erscheint. Ich mache folgenden Ansatz:

$$\begin{array}{rclcrcl} u'(x) & = & \sin x & \Rightarrow & u(x) & = & -\cos x \\ v(x) & = & \sin x & \Rightarrow & v'(x) & = & \cos x \end{array}$$

Der Ansatz nach der Integrationsformel kann gemacht werden.

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \; \mathrm{d}x &= -\cos x \cdot \sin x - \int -\cos x \cdot \cos x \; \mathrm{d}x \\ \int \sin^2 x \; \mathrm{d}x &= -\cos x \cdot \sin x + \int \cos^2 x \; \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Das hat auf den ersten Blick nichts gebracht. Es gibt jedoch eine Formel, mit deren Hilfe man den Kosinus auf den Sinus zurückführen kann. Bekannt ist die Formel unter dem Namen „Trigonometrischer Pythagoras“.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

Das kann auf das neu entstandene Integral angewendet werden.

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \; \mathrm{d}x &= -\cos x \cdot \sin x + \int \cos^2 x \; \mathrm{d}x \\ \int \sin^2 x \; \mathrm{d}x &= -\cos x \cdot \sin x + \int 1 - sin^2 x \; \mathrm{d}x \\ \int \sin^2 x \; \mathrm{d}x &= -\cos x \cdot \sin x + \int 1 \; \mathrm{d}x - \int sin^2 x \; \mathrm{d}x \\ \int \sin^2 x \; \mathrm{d}x &= -\cos x \cdot \sin x + x - \int sin^2 x \; \mathrm{d}x \\ 2 \cdot \int \sin^2 x \; \mathrm{d}x &= -\cos x \cdot \sin x + x \\ \int \sin^2 x \; \mathrm{d}x &= -\frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x + \frac{1}{2} x \end{aligned}$$

8.5 Aufgabe 5

$$\int \frac{3x^2 - 10x + 11}{x^2 - 4x + 4}\,\mathrm{d}x = \dots$$

Hier bietet sich die Methode der Partialbruchzerlegung an. Da der Grad des Zähler- und Nennerpolynoms gleich ist, muss zunächst eine (unvollständige) Polynomdivison durchgeführt werden.

$$\begin{array}{rrrcccc} (3x^2 & -10x & +11) & : & (x^2 - 4x + 4) & = & 3 + \frac{2x-1}{x^2-4x+4} \\ -(3x^2 & -12x & +12) & & & & \\ \hline & 2x & -1 & & & & \end{array}$$

Das gesuchte Integral lässt sich damit wie folgt umformen:

$$\int \frac{3x^2 - 10x + 11}{x^2 - 4x + 4}\,\mathrm{d}x = \int 3 + \frac{2x - 1}{x^2 - 4x + 4}\,\mathrm{d}x$$

Die Partialbruchzerlegung kann nun durchgeführt werden. Der Nenner ist ein Binom und lässt sich wie folgt faktorisieren:

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

Es liegt also eine Doppelnullstelle vor. Wir können jetzt den Ansatz für die Partialbruchzerlegung machen.

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{x^2-4x+4} &= \frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x-2)^2} \\ \frac{2x-1}{(x-2)^2} &= \frac{ax-2a}{(x-2)^2} + \frac{b}{(x-2)^2} \\ 2x - 1 &= ax - 2a + b \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir das Gleichungssystem:

$$\boxed{\begin{array}{lccccc} (1) & a & & = & 2 \\ (2) & -2a & +b & = & -1 \end{array}}$$

Aus Gleichung (1) ergibt sich sofort:

$$a = 2$$

Eingesetzt in Gleichung (2) erhalten wir:

$$b = 3$$

Die Partialbruchzerlegung kann angewendet werden.

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2-10x+11}{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x &= \int 3+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int 3\,\mathrm{d}x+\int \frac{2}{x-2}\,\mathrm{d}x+\int \frac{3}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{3x^2-10x+11}{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x &= 3x+\int \frac{2}{x-2}\,\mathrm{d}x+\int \frac{3}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Im folgenden möchte ich die beiden neuen Integrale einzeln untersuchen. Beide können mit dem Substitutionsverfahren gelöst werden. Beginnen wir mit dem ersten:

$$\int \frac{2}{x-2}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substituiert wird:

$$g(x)=x-2 \qquad \Rightarrow \qquad g'(x)=1$$

Die Ableitung ist bis auf einen Faktor 2 identisch mit dem Zähler. Den Bruch schreibe ich als Produkt, damit die Substitutionsregel angewendet werden kann.

$$\int \frac{2}{x-2}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\int \frac{1}{x-2}\cdot 1\,\mathrm{d}x$$

Nun kann die Substitution $x-2=u$ durchgeführt werden.

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{x-2}\,\mathrm{d}x &= 2\cdot\int \frac{1}{x-2}\cdot 1\,\mathrm{d}x \\
&= 2\cdot\int \frac{1}{u}\,du \\
&= 2\cdot\ln|u| \\
\int \frac{2}{x-2}\,\mathrm{d}x &= 2\cdot\ln|x-2|
\end{aligned}$$

Nun kommt das andere Integral an die Reihe.

$$\int \frac{3}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Auch hier kann substituiert werden:

$$g(x)=x-2 \qquad \Rightarrow \qquad g'(x)=1$$

Die Ableitung ist bis auf einen Faktor 3 identisch mit dem Zähler. Den Bruch schreibe ich als Produkt, damit die Substitutionsregel angewendet werden kann.

$$\int \frac{3}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = 3\cdot\int \frac{1}{(x-2)^2}\cdot 1\,\mathrm{d}x$$

Nun kann die Substitution $x - 2 = u$ durchgeführt werden.

$$\begin{aligned}
\int \frac{3}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x &= 3 \cdot \int \frac{1}{(x-2)^2} \cdot 1\ \mathrm{d}x \\
&= 3 \cdot \int \frac{1}{u^2}\,du \\
&= 3 \cdot \int u^{-2}\,du \\
&= 3 \cdot (-1) \cdot u^{-1} \\
&= -\frac{3}{u} \\
\int \frac{3}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{3}{x-2}
\end{aligned}$$

Jetzt haben wir alles zusammen, um das ursprüngliche Integral aufzulösen:

$$\int \frac{3x^2 - 10x + 11}{x^2 - 4x + 4}\,\mathrm{d}x = 3x + 2 \cdot \ln|x-2| - \frac{3}{x-2}$$