

Lösen von Gleichungen

Wolfgang Kippels

4. April 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	3
2	Grundsätzliche Vorgehensweise	4
2.1	Termtyp	4
2.2	Teiltermtypen	7
2.3	Teiltermauswahl	9
2.4	Methode	10
3	Übungsaufgaben	15
3.1	Aufgabe 1	15
3.2	Aufgabe 2	15
3.3	Aufgabe 3	15
3.4	Aufgabe 4	15
3.5	Aufgabe 5	15
3.6	Aufgabe 6	15
3.7	Aufgabe 7	15
3.8	Aufgabe 8	15
3.9	Aufgabe 9	15
3.10	Aufgabe 10	15
3.11	Aufgabe 11	16
3.12	Aufgabe 12	16
4	Lösungen der Übungsaufgaben	17
4.1	Aufgabe 1	17
4.2	Aufgabe 2	17
4.3	Aufgabe 3	17
4.4	Aufgabe 4	17
4.5	Aufgabe 5	17
4.6	Aufgabe 6	17
4.7	Aufgabe 7	18

4.8	Aufgabe 8	18
4.9	Aufgabe 9	18
4.10	Aufgabe 10	18
4.11	Aufgabe 11	19
4.12	Aufgabe 12	19

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Grundsätzliche Vorgehensweise

Lösen und Umstellen von Gleichungen stellt für manche immer wieder ein Problem dar. Daher soll hier versucht werden, das Umstellen zu systematisieren.

Anmerkung: Wem diese Anleitung zu weitschweifend ist, oder wer aus anderen Gründen nicht mit dieser Anleitung zurechtkommt, findet hier eine kürzer gehaltene Anleitung:

<http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/gleich0.pdf>

Ist der Aufbau der Gleichung dagegen komplizierter, dann hilft vielleicht folgende Anleitung weiter.

<http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/gleich1.pdf>

Ich empfehle, sich folgende vier Fragen in dieser Reihenfolge zu stellen und zu beantworten:

1. **Welcher Typ von Term liegt vor?**
2. **Wie lauten die Teilterme?**
3. **Welchen Teilterm möchte ich auf die andere Seite bringen?**
4. **Wie mache ich das?**

Um die Fragen beantworten zu können, dienen nachfolgende Erläuterungen.

2.1 Termtyp

Zunächst muss geklärt werden, welcher **Typ von Term** rechts oder links vom Gleichheitszeichen vorliegt. Die wichtigsten Termtypen sind *Summen*, *Produkte* und *Quotienten*.

Frage: Woran kann ich die verschiedenen Termtypen unterscheiden?

Antwort: Die Rechenoperation, die als **letzte** ausgeführt wird, bestimmt die Art des Terms. Wir nehmen dazu an, alle vorkommenden Variablen und Parameter (also alle Buchstaben) seien bekannte Zahlen, und wir müssen ausrechnen, was auf einer Seite der Gleichung steht. Auf jeder Seite der Gleichung steht ein solcher Term. Wird zuletzt *addiert*, dann haben wir eine *Summe*; wird zuletzt *multipliziert*, dann haben wir ein *Produkt*. Wenn auf der Seite der Gleichung, die wir betrachten, ein Bruch steht, dann wird zuletzt *dividiert*, wir haben also einen *Quotienten*.

Achtung: Ein Minuszeichen steht auch für eine Summe, es wird dann eben eine negative Zahl addiert!

Beispiele:

$3 \cdot x$	\Rightarrow	Produkt
$3 + x$	\Rightarrow	Summe
$\frac{x}{3}$	\Rightarrow	Quotient
$3 \cdot x + 2$	\Rightarrow	Summe
$3 \cdot (x + 2)$	\Rightarrow	Produkt
$3 \cdot \frac{x}{2}$	\Rightarrow	Produkt
$\frac{x - 2}{3}$	\Rightarrow	Quotient
$\frac{x}{3} - 2$	\Rightarrow	Summe
$3 \cdot a + 2 \cdot b$	\Rightarrow	Summe
$3 \cdot (a + 2 \cdot b)$	\Rightarrow	Produkt
$3 \cdot (a + 2) \cdot b$	\Rightarrow	Produkt

Wir machen ein paar Übungen dazu. Angegeben sind jetzt jeweils komplette Gleichungen. Geben Sie jeweils an, um welche Art Term es sich auf der linken bzw. auf der rechten Seite der Gleichung handelt.

$$\begin{array}{rcll}
 2x + 3 & = & 8x - 7 & \Rightarrow \text{links:} & \text{rechts:} \\
 2x - 3 & = & 3 - x \cdot 9 \cdot x + 4 & \Rightarrow \text{links:} & \text{rechts:} \\
 2(x + 3) & = & 4(x - 5) & \Rightarrow \text{links:} & \text{rechts:} \\
 (x + 2) \cdot 3 - 4x & = & (x - 5) \cdot 8 & \Rightarrow \text{links:} & \text{rechts:} \\
 \frac{3}{x} & = & \frac{1}{3x} & \Rightarrow \text{links:} & \text{rechts:} \\
 \frac{2x}{3} - \frac{x}{5} & = & x - 1 & \Rightarrow \text{links:} & \text{rechts:} \\
 x - \frac{x}{2x} & = & \frac{x}{-7} \cdot 4x & \Rightarrow \text{links:} & \text{rechts:}
 \end{array}$$

(Auf der nächsten Seite stehen die Lösungen.)

Hier die Lösungen zu den Fragen.

$$\begin{array}{llll}
 2x + 3 = 8x - 7 & \Rightarrow & \text{links: Summe} & \text{rechts: Summe} \\
 2x - 3 = 3 - x \cdot 9 \cdot x + 4 & \Rightarrow & \text{links: Summe} & \text{rechts: Summe} \\
 2(x + 3) = 4(x - 5) & \Rightarrow & \text{links: Produkt} & \text{rechts: Produkt} \\
 (x + 2) \cdot 3 - 4x = (x - 5) \cdot 8 & \Rightarrow & \text{links: Summe} & \text{rechts: Produkt} \\
 \frac{3}{x} = \frac{1}{3x} & \Rightarrow & \text{links: Quotient} & \text{rechts: Produkt} \\
 \frac{2x}{3} - \frac{x}{5} = x - 1 & \Rightarrow & \text{links: Summe} & \text{rechts: Summe} \\
 x - \frac{x}{2x} = \frac{x}{-7} \cdot 4x & \Rightarrow & \text{links: Summe} & \text{rechts: Produkt}
 \end{array}$$

2.2 Teiltermtypen

Jetzt stellt sich natürlich die Frage, warum es wichtig ist zu wissen, ob es sich jeweils um eine Summe, ein Produkt oder einen Quotienten handelt. Die Antwort ist ganz einfach: Ich kann jede Seite der Gleichung in Teilterme zerlegen, die dann die Summe, das Produkt oder den Quotienten bilden. Wichtig:

Beim Umstellen kann ich nur einen kompletten Teilterm auf die andere Seite bringen!

Zur Frage, wie denn diese Teilterme aussehen, folgen ein paar Beispiele.

$$\begin{array}{ll}
 3 \cdot x & \Rightarrow \text{Produkt; Teilterme: } 3 \text{ und } x \\
 3 + x & \Rightarrow \text{Summe; Teilterme: } 3 \text{ und } x \\
 \frac{x}{3} & \Rightarrow \text{Quotient; Teilterme: } x \text{ und } 3 \\
 3 \cdot x + 2 & \Rightarrow \text{Summe; Teilterme: } 3 \cdot x \text{ und } 2 \\
 3 \cdot (x + 2) & \Rightarrow \text{Produkt; Teilterme: } 3 \text{ und } (x + 2) \\
 3 \cdot \frac{x}{2} & \Rightarrow \text{Produkt; Teilterme: } 3 \text{ und } \frac{x}{2} \\
 \frac{x - 2}{3} & \Rightarrow \text{Quotient; Teilterme: } x - 2 \text{ und } 3 \\
 \frac{x}{3} - 2 & \Rightarrow \text{Summe; Teilterme: } \frac{x}{3} \text{ und } -2 \\
 3 \cdot a + 2 \cdot b & \Rightarrow \text{Summe; Teilterme: } 3 \cdot a \text{ und } 2 \cdot b \\
 3 \cdot (a + 2 \cdot b) & \Rightarrow \text{Produkt; Teilterme: } 3 \text{ und } (a + 2 \cdot b) \\
 3 \cdot (a + 2) \cdot b & \Rightarrow \text{Produkt; Teilterme: } 3 \text{ und } (a + 2) \text{ und } b
 \end{array}$$

Das wollen wir ein wenig üben. Geben Sie bitte zu allen angegebenen Termen die Termart (Summe, Produkt, Quotient) an und schreiben Sie die Teilterme auf!

$$\begin{aligned}2x + 3 &\Rightarrow \\8x - 7 &\Rightarrow \\2x - 3 &\Rightarrow \\3 - x &\Rightarrow \\2(x + 3) &\Rightarrow \\4(x - 5) &\Rightarrow \\(x + 2) \cdot 3 - 4x &\Rightarrow \\x - 5 &\Rightarrow \\ \frac{1}{3}x &\Rightarrow \\ \frac{3}{x} &\Rightarrow \\x - 1 &\Rightarrow \\ \frac{2x}{3} - \frac{x}{5} &\Rightarrow \\x - \frac{x}{2x} &\Rightarrow \\ \frac{x}{-7} &\Rightarrow\end{aligned}$$

(Auf der nächsten Seite stehen die Lösungen.)

Hier die Lösungen:

$$\begin{array}{lll}
 2x + 3 & \Rightarrow & \text{Summe; Teilterme: } 2x \text{ und } 3 \\
 8x - 7 & \Rightarrow & \text{Summe; Teilterme: } 8x \text{ und } -7 \\
 2x - 3 & \Rightarrow & \text{Summe; Teilterme: } 2x \text{ und } -3 \\
 3 - x & \Rightarrow & \text{Summe; Teilterme: } 3 \text{ und } -x \\
 2(x + 3) & \Rightarrow & \text{Produkt; Teilterme: } 2 \text{ und } (x + 3) \\
 4(x - 5) & \Rightarrow & \text{Produkt; Teilterme: } 4 \text{ und } (x - 5) \\
 (x + 2) \cdot 3 - 4x & \Rightarrow & \text{Summe; Teilterme: } (x + 2) \cdot 3 \text{ und } -4x \\
 x - 5 & \Rightarrow & \text{Summe; Teilterme: } x \text{ und } -5 \\
 \frac{1}{3}x & \Rightarrow & \text{Produkt; Teilterme: } \frac{1}{3} \text{ und } x \\
 \frac{3}{x} & \Rightarrow & \text{Quotient; Teilterme: } 3 \text{ und } x \\
 x - 1 & \Rightarrow & \text{Summe; Teilterme: } x \text{ und } -1 \\
 \frac{2x}{3} - \frac{x}{5} & \Rightarrow & \text{Summe; Teilterme: } \frac{2x}{3} \text{ und } -\frac{x}{5} \\
 x - \frac{x}{2x} & \Rightarrow & \text{Summe; Teilterme: } x \text{ und } -\frac{x}{2x} \\
 \frac{x}{-7} & \Rightarrow & \text{Quotient; Teilterme: } x \text{ und } -7
 \end{array}$$

Na, war alles richtig? Wenn nein, bitte überlegen, warum es nicht richtig war und noch einmal versuchen.

2.3 Teiltermauswahl

Die nächste wichtige Frage lautet: Welchen Teilterm möchte ich auf die andere Seite bringen?

Die getroffene Auswahl ist nicht grundsätzlich mit *richtig* oder *falsch* zu beantworten. *Zweckmäßig* oder *nicht zweckmäßig* wären die Kategorien. Es kommt nämlich nicht nur darauf an, alles *richtig* zu machen, wichtig ist auch ein *zielstrebiges* Vorgehen. Das wiederum bedeutet, dass man ein Ziel haben muss. Dieses Ziel lautet:

Alle Terme mit x auf die eine und alle Terme ohne x auf die andere Seite bringen.

Dabei ist es grundsätzlich unerheblich, ob wir alles mit x nach links oder nach rechts sortieren, wichtig ist aber, dass wir das Ordnungsprinzip *konsequent* durchhalten.

Damit wir ein möglichst systematisiertes Verfahren bekommen, an dem sich der unsichere Rechner orientieren kann, werde ich im folgenden immer alle Terme mit x auf die linke Seite sortieren, und alle Terme ohne x auf die rechte.

Ein Beispiel:

$$2x - 7 = 4x + 5$$

Ich gehe die Fragen, die schon am Anfang formuliert wurden, der Reihe nach durch.

Frage 1: Welcher Typ von Term liegt vor?

Antwort: Wir haben auf beiden Seiten der Gleichung eine Summe.

Frage 2: Wie lauten die Teilterme?

Antwort: Links: $2x$ und -7 , rechts: $4x$ und 5 .

Frage 3: Welchen Teilterm möchte ich auf die andere Seite bringen?

Antwort: Da ich alles mit x auf die linke Seite bringen möchte, steht der Term $2x$ dort schon richtig. Der Term -7 muss auf die rechte Seite gebracht werden, da er kein x enthält. Auf der rechten Seite stört der Term $4x$, er muss ebenfalls die Seite wechseln, weil er ein x enthält. Dagegen ist der letzte Term 5 schon auf der richtigen Seite.

2.4 Methode

Wir sind jetzt an dem Punkt angekommen, wo feststeht, **welche** Teilterme die Seite wechseln sollen. Nun geht es darum, **wie** das geht. Die Regel lautet:

Man muss immer die gegenteilige Rechenoperation anwenden zu der Operation,
mit der der Teilterm mit dem Rest verbunden ist.

Wenden wir das auf unser Beispiel an. Die Terme -7 und $4x$ müssen die Seite wechseln, wie bereits besprochen. Der erste Term -7 ist Teil einer **Summe**. Das **Gegenteil** vom Addieren ist das Subtrahieren. also muss der Teilterm **subtrahiert** werden. Da er selbst **negativ** ist, muss ich entsprechend $-(-7)$ rechnen, also zusammengefasst $+7$. Ähnliches gilt auch für den anderen Teilterm $4x$. Hier muss $4x$ subtrahiert werden, also $-4x$. Das führen wir durch:

$$\begin{array}{rcl} 2x - 7 & = & 4x + 5 & | & + 7 \\ 2x - 7 + 7 & = & 4x + 5 + 7 & | & \text{zusammenfassen} \\ 2x & = & 4x + 12 & | & - 4x \\ 2x - 4x & = & 4x + 12 - 4x & | & \text{zusammenfassen} \\ -2x & = & 12 & & \end{array}$$

Damit ist der erste Sortiervorgang abgeschlossen, das Spiel beginnt wieder von vorn.

So weit waren wir schon:

$$-2x = 12$$

Jetzt stellen wir uns wieder die vier Fragen:

Frage 1: Welcher Typ von Term liegt vor?

Antwort: Wir haben auf der linken Seite der Gleichung ein Produkt, rechts ist nichts weiter zerlegbar.

Frage 2: Wie lauten die Teilterme?

Antwort: Links: -2 und x , rechts gibt es keine.

Frage 3: Welchen Teilterm möchte ich auf die andere Seite bringen?

Antwort: Da ich alles mit x auf die linke Seite bringen möchte, stört nur noch der Teilterm -2 vor dem x . Den möchte ich nach rechts bringen.

Frage 4: Wie mache ich das?

Antwort: Da links ein Produkt steht, suche ich das Gegenteil davon. Das Gegenteil vom Multiplizieren ist das Dividieren, also muss ich durch (-2) dividieren, um diesen Teilterm links wegzubekommen.

$$\begin{array}{rcl} -2x & = & 12 \quad | : (-2) \\ \hline -2x & & 12 \\ -2 & & -2 \quad | \text{zusammenfassen} \\ \hline x & = & -6 \end{array}$$

Damit hätten wir schon die Lösung gefunden!

Ein weiteres Beispiel:

$$2(x + 3) - 3(x + 5) = x + 7$$

Wenn wir uns jetzt die vier Fragen stellen, werden wir schnell feststellen, dass auf jeder Seite eine Summe steht, und dass in fast jedem Term x vorkommt. Das ist nicht besonders hilfreich. Deswegen erweitern wir jetzt unser Lösungs-Rezept um folgende Regel:

Wenn die Gleichung Klammern enthält, sollte man diese zuerst auflösen.

Das tun wir und fassen anschließend gleich zusammen, was zusammenpasst.

$$\begin{array}{rcl} 2(x + 3) - 3(x + 5) & = & x + 7 \quad | \text{Klammern auflösen} \\ 2 \cdot x + 2 \cdot 3 - 3 \cdot x - 3 \cdot 5 & = & x + 7 \quad | \text{zusammenfassen} \\ 2x + 6 - 3x - 15 & = & x + 7 \quad | \text{zusammenfassen} \\ -x - 9 & = & x + 7 \end{array}$$

Jetzt können wir sinnvoll mit unseren vier Fragen beginnen.

$$-x - 9 = x + 7$$

Frage 1: Welcher Typ von Term liegt vor?

Antwort: Wir haben auf beiden Seite der Gleichung eine Summe.

Frage 2: Wie lauten die Teilterme?

Antwort: Links: $-x$ und -9 , rechts: x und 7 .

Frage 3: Welchen Teilterm möchte ich auf die andere Seite bringen?

Antwort: Da ich alles mit x auf die linke Seite bringen möchte, stört links noch der Teilterm -9 und rechts x . Die möchte ich beide auf die andere Seite bringen.

Frage 4: Wie mache ich das?

Antwort: Da beidseitig eine Summe steht, suche ich das Gegenteil davon. Das ist das Subtrahieren. Ich muss demnach -9 und x subtrahieren, also $-(-9) - x$ oder zusammengefasst $+9 - x$. Man kann das auch gleichzeitig machen.

$$\begin{array}{rcl} -x - 9 & = & x + 7 \quad | + 9 - x \\ -x - 9 + 9 - x & = & x + 7 + 9 - x \quad | \text{zusammenfassen} \\ -2x & = & 16 \end{array}$$

Der erste Schritt ist erledigt. Die vier Fragen beginnen wieder von vorn.

Frage 1: Welcher Typ von Term liegt vor?

Antwort: Wir haben auf der linken Seite der Gleichung ein Produkt, rechts ist nichts weiter zerlegbar.

Frage 2: Wie lauten die Teilterme?

Antwort: Links: -2 und x , rechts gibt es keine.

Frage 3: Welchen Teilterm möchte ich auf die andere Seite bringen?

Antwort: Da ich alles mit x auf die linke Seite bringen möchte, stört nur noch der Teilterm -2 vor dem x . Den möchte ich nach rechts bringen.

Frage 4: Wie mache ich das?

Antwort: Da links ein Produkt steht, suche ich das Gegenteil davon. Das Gegenteil vom Multiplizieren ist das Dividieren, also muss ich durch (-2) dividieren, um diesen Teilterm links wegzubekommen.

$$\begin{array}{rcl} -2x & = & 16 \quad | : (-2) \\ \frac{-2x}{-2} & = & \frac{16}{-2} \quad | \text{ausrechnen} \\ x & = & -8 \end{array}$$

Das wars!

Ein weiteres Beispiel.

$$\frac{x}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}$$

Hier haben ein neues Problem. Das Rechnen mit Brüchen ist meist nicht so angenehm. Daher empfehle ich als weiteres Rezept:

Eine Gleichung mit Brüchen sollte man zunächst mit dem Hauptnenner multiplizieren. Dadurch fallen die Brüche weg.

Der Hauptnenner¹ der drei Nenner 2, 3 und 6 ist 6. Ich multipliziere die Gleichung also mit 6.

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} - \frac{2}{3} &= \frac{1}{6}x + \frac{1}{2} && | \cdot 6 \\ \frac{x}{3} \cdot 6 - \frac{2}{3} \cdot 6 &= \frac{1}{6}x \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 6 && | \text{ zusammenfassen} \\ \frac{x \cdot 6}{3} - \frac{2 \cdot 6}{3} &= \frac{1 \cdot x \cdot 6}{6} + \frac{1 \cdot 6}{2} && | \text{ kürzen, zusammenfassen} \\ 2x - 4 &= x + 3 \end{aligned}$$

Jetzt kann man die Gleichung mit den bekannten Methoden weiter lösen.

Frage 1: Welcher Typ von Term liegt vor?

Antwort: Wir haben auf beiden Seiten der Gleichung eine Summe.

Frage 2: Wie lauten die Teilterme?

Antwort: Links: $2x$ und -4 , rechts: x und 3 .

Frage 3: Welchen Teilterm möchte ich auf die andere Seite bringen?

Antwort: Da ich alles mit x auf die linke Seite bringen möchte, stört links der Teilterm -4 . Den möchte ich nach rechts bringen. Rechts haben wir noch x , das muss nach links.

Frage 4: Wie mache ich das?

Antwort: Da links und rechts eine Summe steht, suche ich das Gegenteil vom Addieren. Das ist das Subtrahieren, also muss ich -4 und x subtrahieren. Konkret bedeutet das: $-(-4) - x$ oder zusammengefasst $+4 - x$.

$$\begin{aligned} 2x - 4 &= x + 3 && | +4 - x \\ 2x - 4 + 4 - x &= x + 3 + 4 - x && | \text{ zusammenfassen} \\ x &= 7 \end{aligned}$$

¹Details zur Suche des Hauptnenners siehe hier in Kapitel 3.3:
<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/bruch.pdf>

Stellen wir noch einmal das komplette Lösungsrezept zusammen.

1. **Eine Gleichung mit Brüchen sollte man zunächst mit dem Hauptnenner multiplizieren. Dadurch fallen die Brüche weg.**
2. **Wenn die Gleichung Klammern enthält, sollte man diese zuerst auflösen.**
3. *Frage* beantworten: **Welcher Typ von Term liegt vor?**
4. *Frage* beantworten: **Wie lauten die Teilterme?**
5. *Frage* beantworten: **Welchen Teilterm möchte ich auf die andere Seite bringen?**
6. *Frage* beantworten: **Wie mache ich das?**

Mit diesen Rezepten sollte es eigentlich möglich sein, (fast) jede Gleichung zu lösen.

3 Übungsaufgaben

3.1 Aufgabe 1

$$2x - 4 = 3x + 5$$

3.2 Aufgabe 2

$$3x + 7 = 2x + 11$$

3.3 Aufgabe 3

$$-2x + 4 = -5x - 5$$

3.4 Aufgabe 4

$$7 - 2x = 3x - 3$$

3.5 Aufgabe 5

$$2(x + 3) - 4 = 2(3 - 2x) - 16$$

3.6 Aufgabe 6

$$(x - 2) \cdot 3 = 5 \cdot (x - 4) + 6$$

3.7 Aufgabe 7

$$\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}x + 2$$

3.8 Aufgabe 8

$$\frac{x + 2}{3} = \frac{x - 5}{2}$$

3.9 Aufgabe 9

$$\frac{x - 5}{4} = \frac{x + 2}{6}$$

3.10 Aufgabe 10

$$x - 4 \cdot \frac{x + 1}{2} = 5$$

3.11 Aufgabe 11

$$\frac{1}{2} \cdot (x + 2) - \frac{3}{4} \cdot (x - 1) = \frac{1}{4} \cdot (2x - 3)$$

3.12 Aufgabe 12

$$\frac{2x - 4}{4} - \frac{5x - 6}{2} = -\frac{13x + 2}{8}$$

4 Lösungen der Übungsaufgaben

4.1 Aufgabe 1

$$\begin{array}{rcl} 2x - 4 & = & 3x + 5 \quad | - 3x + 4 \\ -x & = & 9 \quad | : (-1) \\ x & = & -9 \end{array}$$

4.2 Aufgabe 2

$$\begin{array}{rcl} 3x + 7 & = & 2x + 11 \quad | - 2x - 7 \\ x & = & 4 \end{array}$$

4.3 Aufgabe 3

$$\begin{array}{rcl} -2x + 4 & = & -5x - 5 \quad | - 4 + 5x \\ 3x & = & -9 \quad | : 3 \\ x & = & -3 \end{array}$$

4.4 Aufgabe 4

$$\begin{array}{rcl} 7 - 2x & = & 3x - 3 \quad | - 7 - 3x \\ -5x & = & -10 \quad | : (-5) \\ x & = & 2 \end{array}$$

4.5 Aufgabe 5

$$\begin{array}{rcl} 2(x + 3) - 4 & = & 2(3 - 2x) - 16 \quad | \text{Klammern auflösen} \\ 2x + 6 - 4 & = & 6 - 4x - 16 \quad | \text{zusammenfassen} \\ 2x + 2 & = & -4x - 10 \quad | - 2 + 4x \\ 6x & = & -12 \quad | : 6 \\ x & = & -2 \end{array}$$

4.6 Aufgabe 6

$$\begin{array}{rcl} (x - 2) \cdot 3 & = & 5 \cdot (x - 4) + 6 \quad | \text{Klammern auflösen} \\ 3x - 6 & = & 5x - 20 + 6 \quad | \text{zusammenfassen} \\ 3x - 6 & = & 5x - 14 \quad | + 6 - 5x \\ -2x & = & -8 \quad | : (-2) \\ x & = & 4 \end{array}$$

4.7 Aufgabe 7

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} &= \frac{1}{3}x + 2 && | \cdot 6 \text{ (Hauptnenner)} \\ \frac{6}{2}x - \frac{2 \cdot 6}{3} &= \frac{6}{3}x + 2 \cdot 6 && | \text{ kürzen und ausmultiplizieren} \\ 3x - 4 &= 2x + 12 && | - 2x + 4 \\ x &= 16\end{aligned}$$

4.8 Aufgabe 8

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{3} &= \frac{x-5}{2} && | \cdot 6 \text{ (Hauptnenner)} \\ \frac{(x+2) \cdot 6}{3} &= \frac{(x-5) \cdot 6}{2} && | \text{ kürzen} \\ \frac{3}{3} \cdot (x+2) \cdot 2 &= \frac{2}{2} \cdot (x-5) \cdot 3 && | \text{ Klammern auflösen} \\ 2x+4 &= 3x-15 && | - 3x - 4 \\ -x &= -19 && | : (-1) \\ x &= 19\end{aligned}$$

4.9 Aufgabe 9

$$\begin{aligned}\frac{x-5}{4} &= \frac{x+2}{6} && | \cdot 12 \\ \frac{(x-5) \cdot 12}{4} &= \frac{(x+2) \cdot 12}{6} && | \text{ kürzen} \\ \frac{4}{4} \cdot (x-5) \cdot 3 &= \frac{6}{6} \cdot (x+2) \cdot 2 && | \text{ Klammern auflösen} \\ 3x-15 &= 2x+4 && | + 15 - 2x \\ x &= 19\end{aligned}$$

4.10 Aufgabe 10

$$\begin{aligned}x - 4 \cdot \frac{x+1}{2} &= 5 && | \cdot 2 \\ 2x - 4(x+1) &= 2 \cdot 5 && | \text{ ausmultiplizieren} \\ 2x - 4x - 4 &= 10 && | \text{ zusammenfassen} \\ -2x - 4 &= 10 && | + 4 \\ -2x &= 14 && | : (-2) \\ x &= -7\end{aligned}$$

Anmerkung: In diesem Beispiel wäre es etwas günstiger gewesen, wenn man nicht nach Schema F vorgegangen wäre. Man hätte eventuell sehen können, dass man bei dem Term mit dem Bruch sofort die 4 vorne gegen die 2 im Nenner hätte kürzen können:

$$4 \cdot \frac{x+1}{2} = 2 \cdot (x+1)$$

4.11 Aufgabe 11

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot (x+2) - \frac{3}{4} \cdot (x-1) &= \frac{1}{4} \cdot (2x-3) & | \cdot 4 \\ \frac{4}{2} \cdot (x+2) - \frac{12}{4} \cdot (x-1) &= \frac{4}{4} \cdot (2x-3) & | \text{ kürzen} \\ 2 \cdot (x+2) - 3 \cdot (x-1) &= 1 \cdot (2x-3) & | \text{ ausmultiplizieren} \\ 2x+4-3x+3 &= 2x-3 & | \text{ zusammenfassen} \\ -x+7 &= 2x-3 & | -7-2x \\ -3x &= -10 & | : (-3) \\ x &= \frac{10}{3}\end{aligned}$$

4.12 Aufgabe 12

$$\begin{aligned}\frac{2x-4}{4} - \frac{5x-6}{8} &= -\frac{13x+2}{8} & | \cdot 8 \\ \frac{8 \cdot (2x-4)}{4} - \frac{8 \cdot (5x-6)}{8} &= -\frac{8 \cdot (13x+2)}{8} & | \text{ kürzen} \\ 2 \cdot (2x-4) - 4 \cdot (5x-6) &= -(13x+2) & | \text{ Klammern auflösen} \\ 4x-8-20x+24 &= -13x-2 & | \text{ zusammenfassen} \\ -16x+16 &= -13x-2 & | -16+13x \\ -3x &= -18 & | : (-3) \\ x &= 6\end{aligned}$$