Schranken von Folgen

W. Kippels

18. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: w.kippels@dokom.net

Vielen Dank!

2 Einleitung

Dieses Skript stellt keinen Lehrgang dar. Hier sollen nur Zusammenhänge dargestellt werden, die als bekannt vorausgesetzt werden. Der Schwerpunkt liegt auf Übungsaufgaben und deren Lösungen.

3 Definitionen

Wenn es eine Zahl S_U gibt, so dass **alle** Folgenglieder **größer oder gleich** S_U sind, dann nennt man S_U **untere Schranke** der Folge. Man kann sagen, dass S_U den Bereich, in dem die Folgenglieder liegen, nach unten begrenzt.

Entsprechendes gilt mit umgekehrten Zeichen für die **obere Schranke** S_O.

Hier die mathematisch exakten Definitionen:

S_U heißt **untere Schranke** der Folge $a_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : \quad a_n \geq S_U$

S_O heißt **obere Schranke** der Folge $a_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : \quad a_n \leq S_O$

4 Übungsaufgaben

Haben die nachfolgenden Folgen eine obere und/oder eine untere Schranke? Einen Anhaltspunkt erhalten Sie, indem Sie die ersten Folgenglieder ausrechnen. Weisen Sie Ihre Vermutung mit Hilfe der Definition nach!

Hier die zu untersuchenden Folgen:

4.1 Aufgabe 1

$$a_n = \frac{n+3}{n+1}$$

4.2 Aufgabe 2

$$a_n = \frac{n}{2n-1}$$

4.3 Aufgabe 3

$$a_n = \frac{2n-5}{2n-3}$$

4.4 Aufgabe 4

$$a_n = \frac{5n-9}{2n-7}$$

4.5 Aufgabe 5

$$a_n = \frac{n-12}{3n-10}$$

4.6 Aufgabe 6

$a_n = \frac{6n+3}{5n-19}$

5 Ergebnisse

5.1 Aufgabe 1

$S_O = 2$; $S_U = 1$

5.2 Aufgabe 2

$S_O = 1$; $S_U = \frac{1}{2}$

5.3 Aufgabe 3

$S_O = 3$; $S_U = -1$

5.4 Aufgabe 4

$S_O = 11$; $S_U = -6$

5.5 Aufgabe 5

$S_O = 9$; $S_U = -8$

5.6 Aufgabe 6

$S_O = 27$; $S_U = -\frac{21}{4}$

6 Durchgerechnete Lösungen

Bei allen Ansätzen zur Lösung wird als Definitionsbereich für n vorausgesetzt:

$$\boxed{D = \mathbb{N}^*}$$

6.1 Lösung für Aufgabe 1:

$$a_n = \frac{n+3}{n+1}$$

$$a_1 = 2 \quad a_2 = \frac{5}{3} \quad a_3 = \frac{3}{2} \quad a_4 = \frac{7}{5} \quad \ldots$$

$$\text{Vermutung: } S_U = 1 \text{ und } S_O = 2$$

Wir wollen zunächst den Nachweis für $S_U = 1$ führen. Also:

$$\begin{array}{rcl} a_n & \geq & S_U \\ \frac{n+3}{n+1} & \geq & 1 \quad | \cdot (n+1) \text{ (Das ist in } D \text{ immer positiv!)} \\ n+3 & \geq & n+1 \quad | -n \\ 3 & \geq & 1 \quad \text{Wahre Aussage} \end{array}$$

Hieraus folgt: $L = \mathbb{N}^*$ Der Beweis ist also erbracht.

Es folgt der Nachweis für $S_O = 2$:

$$\begin{array}{rcl} a_n & \leq & S_O \\ \frac{n+3}{n+1} & \leq & 2 \quad | \cdot (n+1) \text{ (Das ist in } D \text{ immer positiv!)} \\ n+3 & \leq & 2n+2 \quad | -2n-3 \\ -n & \leq & -1 \quad | \cdot (-1) \\ n & \geq & 1 \end{array}$$

Hieraus folgt: $L = \mathbb{N}^*$ Der Beweis ist also erbracht.

6.2 Lösung für Aufgabe 2:

$$a_n = \frac{n}{2n-1}$$

$$a_1 = 1 \quad a_2 = \frac{2}{3} \quad a_3 = \frac{3}{5} \quad a_4 = \frac{4}{7} \quad \dots$$

$$\text{Vermutung: } S_U = \frac{1}{2} \text{ und } S_O = 1$$

Wir wollen zunächst den Nachweis für $S_U = \frac{1}{2}$ führen. Also:

$$\begin{aligned} a_n &\geq S_U \\ \frac{n}{2n-1} &\geq \frac{1}{2} \quad | \cdot (2n-1) \text{ (Das ist in } D \text{ immer positiv!)} \\ n &\geq \frac{2n-1}{2} \quad | \cdot 2 \\ 2n &\geq 2n-1 \quad | -2n \\ 0 &\geq -1 \quad \text{Wahre Aussage} \end{aligned}$$

Hieraus folgt: $L = \mathbb{N}^*$ Der Beweis ist also erbracht.

Es folgt der Nachweis für $S_O = 1$:

$$\begin{aligned} a_n &\leq S_O \\ \frac{n}{2n-1} &\leq 1 \quad | \cdot (2n-1) \text{ (Das ist in } D \text{ immer positiv!)} \\ n &\leq 2n-1 \quad | -2n \\ -n &\leq -1 \quad | \cdot (-1) \\ n &\geq 1 \end{aligned}$$

Hieraus folgt: $L = \mathbb{N}^*$ Der Beweis ist also erbracht.

6.3 Lösung für Aufgabe 3:

$$a_n = \frac{2n-5}{2n-3}$$

$$a_1 = 3 \quad a_2 = -1 \quad a_3 = \frac{1}{3} \quad a_4 = \frac{3}{5} \quad a_5 = \frac{5}{7} \quad \ldots$$

$$\text{Vermutung: } S_U = -1 \text{ und } S_O = 3$$

Wir wollen zunächst den Nachweis für $S_U = -1$ führen. Also:

$$\begin{aligned} a_n &\geq S_U \\ \frac{2n-5}{2n-3} &\geq -1 \quad | \cdot (2n-3) \end{aligned}$$

Hier wird mit einem Term multipliziert, der im Definitionsbereich sowohl positiv, als auch negativ sein kann. Daher ist eine **Fallunterscheidung** notwendig.

$$\begin{array}{rcl} & \underline{\text{Für } n \geq 2:} & \\ 2n-5 & \geq & -1 \cdot (2n-3) \\ 2n-5 & \geq & -2n+3 \\ 4n & \geq & 8 \\ n & \geq & 2 \\ L_1 & = & \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} & \underline{\text{Für } n = 1:} & \\ 2n-5 & \leq & -1 \cdot (2n-3) \\ 2n-5 & \leq & -2n+3 \\ 4n & \leq & 8 \\ n & \leq & 2 \\ L_2 & = & \{1\} \end{array}$$

$$L = L_1 \cup L_2 = \mathbb{N}^*$$

Da die Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}^*$ erfüllt ist, ist der Beweis für die vermutete untere Schranke erbracht.

Es folgt der Nachweis für $S_O = 3$.

$$\begin{aligned} a_n &\leq S_O \\ \frac{2n-5}{2n-3} &\leq 3 \quad | \cdot (2n-3) \end{aligned}$$

Hier wird mit einem Term multipliziert, der im Definitionsbereich sowohl positiv, als auch negativ sein kann. Daher ist eine **Fallunterscheidung** notwendig.

$$\begin{array}{rcl} & \underline{\text{Für } n \geq 2:} & \\ 2n-5 & \leq & 3 \cdot (2n-3) \\ 2n-5 & \leq & 6n-9 \\ -4n & \leq & -4 \\ n & \geq & 1 \\ L_1 & = & \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} & \underline{\text{Für } n = 1:} & \\ 2n-5 & \geq & 3 \cdot (2n-3) \\ 2n-5 & \geq & 6n-9 \\ -4n & \geq & -4 \\ n & \leq & 1 \\ L_2 & = & \{1\} \end{array}$$

$$L = L_1 \cup L_2 = \mathbb{N}^*$$

Da die Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}^*$ erfüllt ist, ist der Beweis für die vermutete obere Schranke erbracht.

6.4 Lösung für Aufgabe 4:

$$a_n = \frac{5n-9}{2n-7}$$

$$a_1 = \frac{4}{5} \quad a_2 = -\frac{1}{3} \quad a_3 = -6 \quad a_4 = 11 \quad a_5 = \frac{16}{3} \quad \dots$$

Vermutung: $S_U = -6$ und $S_O = 11$

Wir wollen zunächst den Nachweis für $S_U = -6$ führen. Also:

$$\begin{array}{rcl} a_n & \geq & S_U \\ \frac{5n-9}{2n-7} & \geq & -6 \quad | \cdot (2n-7) \end{array}$$

Hier wird mit einem Term multipliziert, der im Definitionsbereich sowohl positiv, als auch negativ sein kann. Daher ist eine **Fallunterscheidung** notwendig.

$$\begin{array}{rcl} & \underline{\text{Für } n \geq 4:} & \\ 5n-9 & \geq & -6 \cdot (2n-7) \\ 5n-9 & \geq & -12n+42 \\ 17n & \geq & 51 \\ n & \geq & 3 \\ L_1 & = & \mathbb{N}^* \setminus \{1;2;3\} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} & \underline{\text{Für } n \leq 3:} & \\ 5n-9 & \leq & -6 \cdot (2n-7) \\ 5n-9 & \leq & -12n+42 \\ 17n & \leq & 51 \\ n & \leq & 3 \\ L_2 & = & \{1;2;3\} \end{array}$$

$$L = L_1 \cup L_2 = \mathbb{N}^*$$

Da die Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}^*$ erfüllt ist, ist der Beweis für die vermutete untere Schranke erbracht.

Es folgt der Nachweis für $S_O = 11$.

$$\begin{array}{rcl} a_n & \leq & S_O \\ \frac{5n-9}{2n-7} & \leq & 11 \quad | \cdot (2n-7) \end{array}$$

Hier wird mit einem Term multipliziert, der im Definitionsbereich sowohl positiv, als auch negativ sein kann. Daher ist eine **Fallunterscheidung** notwendig.

$$\begin{array}{rcl} & \underline{\text{Für } n \geq 4:} & \\ 5n-9 & \leq & 11 \cdot (2n-7) \\ 5n-9 & \leq & 22n-77 \\ -17n & \leq & -68 \\ n & \geq & 4 \\ L_1 & = & \mathbb{N}^* \setminus \{1;2;3\} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} & \underline{\text{Für } n \leq 3:} & \\ 5n-9 & \geq & 11 \cdot (2n-7) \\ 5n-9 & \geq & 22n-77 \\ -17n & \geq & -68 \\ n & \leq & 4 \\ L_2 & = & \{1;2;3\} \end{array}$$

$$L = L_1 \cup L_2 = \mathbb{N}^*$$

Da die Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}^*$ erfüllt ist, ist der Beweis für die vermutete untere Schranke erbracht.

6.5 Lösung für Aufgabe 5:

$$a_n = \frac{n-12}{3n-10}$$

$$a_1 = \frac{11}{7} \quad a_2 = \frac{5}{2} \quad a_3 = 9 \quad a_4 = -4 \quad a_5 = -\frac{7}{5} \quad a_6 = -\frac{3}{4} \quad a_7 = -\frac{5}{11} \quad \ldots$$

Vermutung: $S_U = -4$ und $S_O = 9$

Wir wollen zunächst den Nachweis für $S_U - 4$ führen. Also:

$$\begin{aligned} a_n &\geq S_U \\ \frac{n-12}{3n-10} &\geq -4 \quad \cdot (3n-10) \end{aligned}$$

Da der Faktor, mit dem wir multiplizieren, **positiv** oder **negativ** sein kann, ist eine **Fallunterscheidung** erforderlich. Der Faktor $(3n-10)$ ist positiv, wenn $n > \frac{10}{3}$ ist. Da diese Grenze **keine natürliche** Zahl ist, kann man auch schreiben: $n \geq 4$. Es geht also weiter:

Fall 1 (positiver Fall): für $n \geq 4$:

$$\begin{aligned} \frac{n-12}{3n-10} &\geq -4 \quad \cdot (3n-10) \\ n-12 &\geq -4 \cdot (3n-10) \\ n-12 &\geq -12n+40) \quad | + 12n + 12 \\ 13n &\geq 52 \quad | : 13 \\ n &\geq 4 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis liegt voll in dem untersuchten Bereich. Das bedeutet, alle n, die im untersuchten Bereich liegen, gehören zur Lösungsmenge. Man kann auch schreiben:

$$L_1 = \{n \mid n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq 4\}$$

Jetzt fehlt noch die Untersuchung des anderen Falles, nämlich $n \leq 3$. Das sieht dann so aus:

Fall 2 (negativer Fall): für $n \leq 3$:

$$\begin{aligned} &\vdots \\ n &\leq 4 \end{aligned}$$

In diesem untersuchten Bereich liegt nur die 1, die 2 und die 3. Für alle ist der Ergebnisterm eine wahre Aussage, also ist:

$$L_2 = \{1; 2; 3\}$$

Die Gesamt-Lösungsmenge ist damit:

$$L_{ges} = L_1 \cup L_2 = \mathbb{N}^*$$

Damit ist der Beweis erbracht!

Es folgt der Nachweis für $S_O = 9$.

$$\begin{array}{rcl} a_n & \leq & S_O \\ \dfrac{n-12}{3n-10} & \leq & 9 \quad | \cdot (3n-10) \end{array}$$

Hier wird mit einem Term multipliziert, der im Definitionsbereich sowohl positiv, als auch negativ sein kann. Daher ist eine **Fallunterscheidung** notwendig.

$$\begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{c}{\underline{\text{Für } n \geq 4:}} \\ n-12 & \leq & 9 \cdot (3n-10) \\ n-12 & \leq & 27n-90 \\ -26n & \leq & -78 \\ n & \geq & 3 \\ L_1 & = & \mathbb{N}^* \setminus \{1;2;3\} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{c}{\underline{\text{Für } n \leq 3:}} \\ n-12 & \geq & 9 \cdot (3n-10) \\ n-12 & \geq & 27n-90 \\ -26n & \geq & -78 \\ n & \leq & 3 \\ L_2 & = & \{1;2;3\} \end{array}$$

$$L = L_1 \cup L_2 = \mathbb{N}^*$$

Da die Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}^*$ erfüllt ist, ist der Beweis für die vermutete obere Schranke erbracht.

6.6 Lösung für Aufgabe 6:

$$a_n = \frac{6n+3}{5n-19}$$

$$a_1 = -\frac{9}{14} \quad a_2 = -\frac{3}{5} \quad a_3 = -\frac{21}{4} \quad a_4 = 27 \quad a_5 = \frac{11}{2} \quad a_6 = \frac{17}{7} \ldots$$

$$\text{Vermutung: } S_U = -\frac{21}{4} \text{ und } S_O = 27$$

Wir wollen zunächst den Nachweis für $S_U = -\frac{21}{4}$ führen. Also:

$$\begin{aligned} a_n &\geq S_U \\ \frac{6n+3}{5n-19} &\geq -\frac{21}{4} \quad | \cdot(5n-19) \end{aligned}$$

Da der Faktor, mit dem wir multiplizieren, **positiv** oder **negativ** sein kann, ist eine **Fallunterscheidung** erforderlich. Der Faktor $(5n-19)$ ist positiv, wenn $n > \frac{19}{5}$ ist. Da diese Grenze **keine natürliche** Zahl ist, kann man auch schreiben: $n \geq 4$. Es geht also weiter:

<u>Fall 1 (positiver Fall): für $n \geq 4$:</u>

$$\begin{aligned} 6n+3 &\geq -\frac{21}{4} \cdot (5n-19) \quad | \cdot 4 \\ 24n+12 &\geq -21 \cdot (5n-19) \\ 24n+12 &\geq -105n+399 \quad | -12+105n \\ 129n &\geq 387 \quad | : 129 \\ n &\geq 3 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis liegt voll in dem untersuchten Bereich. Das bedeutet, alle n, die im untersuchten Bereich liegen, gehören zur Lösungsmenge. Man kann auch schreiben:

$$L_1 = \{n \mid n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq 4\}$$

Jetzt fehlt noch die Untersuchung des anderen Falles, nämlich $n \leq 3$. Das sieht dann so aus:

<u>Fall 2 (negativer Fall): für $n \leq 3$:</u>

$$\begin{aligned} &\vdots \\ n &\leq 3 \end{aligned}$$

In diesem untersuchten Bereich liegt nur die 1, die 2 und die 3. Für alle ist der Ergebnisterm eine wahre Aussage, also ist:

$$L_2 = \{1; 2; 3\}$$

Die Gesamt-Lösungsmenge ist damit:

$$L_{ges} = L_1 \cup L_2 = \mathbb{N}^*$$

Damit ist der Beweis erbracht!

Als nächstes wollen wir beweisen, dass $S_O = 27$ ist.

$$\begin{aligned} a_n &\leq S_U \\ \frac{6n+3}{5n-19} &\leq 27 \quad | \cdot (5n-19) \end{aligned}$$

Da der Faktor, mit dem wir multiplizieren, **positiv** oder **negativ** sein kann, ist eine **Fallunterscheidung** erforderlich. Der Faktor $(5n-19)$ ist positiv, wenn $n > \frac{19}{5}$ ist. Da diese Grenze **keine natürliche** Zahl ist, kann man auch schreiben: $n \geq 4$. Es geht also weiter:

Fall 1 (positiver Fall): für $n \geq 4$:

$$\begin{aligned} 6n+3 &\leq 27 \cdot (5n-19) \\ 6n+3 &\leq 135n - 513 \quad | -135n - 3 \\ -129n &\leq -516 \quad | : (-129) \\ n &\geq 4 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis liegt voll in dem untersuchten Bereich. Das bedeutet, alle n, die im untersuchten Bereich liegen, gehören zur Lösungsmenge. Man kann auch schreiben:

$$L_1 = \{n \mid n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq 4\}$$

Jetzt fehlt noch die Untersuchung des anderen Falles, nämlich $n \leq 3$. Das sieht dann so aus:

Fall 2 (negativer Fall): für $n \leq 3$:

$$\begin{aligned} &\vdots \\ n &\leq 4 \end{aligned}$$

In diesem untersuchten Bereich liegt nur die 1, die 2 und die 3. Für alle ist der Ergebnisterm eine wahre Aussage, also ist:

$$L_2 = \{1; 2; 3\}$$

Die Gesamt-Lösungsmenge ist damit:

$$L_{ges} = L_1 \cup L_2 = \mathbb{N}^*$$

Damit ist der Beweis erbracht!