# Schranken von Folgen

W. Kippels

30. März 2011

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Definitionen

Wenn es eine Zahl $S_U$ gibt, so dass **alle** Folgenglieder **größer oder gleich** $S_U$ sind, dann nennt man $S_U$ **untere Schranke** der Folge. Man kann sagen, dass $S_U$ den Bereich, in dem die Folgenglieder liegen, nach unten begrenzt.

Entsprechendes gilt mit umgekehrten Zeichen für die **obere Schranke** $S_O$.

Hier die mathematisch exakten Definitionen:

$$S_U \text{ heißt } \textbf{untere Schranke} \text{ der Folge } a_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : \quad a_n \geq S_U$$

$$S_O \text{ heißt } \textbf{obere Schranke} \text{ der Folge } a_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : \quad a_n \leq S_O$$

# 2 Übungsaufgaben

Haben die nachfolgenden Folgen eine obere und/oder eine untere Schranke? Einen Anhaltspunkt erhalten Sie, indem Sie die ersten Folgenglieder ausrechnen. Weisen Sie Ihre Vermutung mit Hilfe der Definition nach!

**Hier die zu untersuchenden Folgen:**

## 2.1 Aufgabe 1

$$a_n = \frac{n+3}{n+1}$$

## 2.2 Aufgabe 2

$$a_n = \frac{n}{2n-1}$$

## 2.3 Aufgabe 3

$$a_n = \frac{2n-5}{2n-3}$$

## 2.4 Aufgabe 4

$$a_n = \frac{5n-9}{2n-7}$$

## 2.5 Aufgabe 5

$$a_n = \frac{n-12}{3n-10}$$

## 2.6 Aufgabe 6

$a_n = \dfrac{6n+3}{5n-19}$

# 3 Ergebnisse

## 3.1 Aufgabe 1

$S_O = 2$ ; $S_U = 1$

## 3.2 Aufgabe 2

$S_O = 1$ ; $S_U = \frac{1}{2}$

## 3.3 Aufgabe 3

$S_O = 3$ ; $S_U = -1$

## 3.4 Aufgabe 4

$S_O = 11$ ; $S_U = -6$

## 3.5 Aufgabe 5

$S_O = 9$ ; $S_U = -8$

## 3.6 Aufgabe 6

$S_O = 27$ ; $S_U = -\frac{21}{4}$

# 4 Durchgerechnete Lösungen

Bei allen Ansätzen zur Lösung wird als Definitionsbereich für $n$ vorausgesetzt:

$$\boxed{D = \mathbb{N}^*}$$

## 4.1 Lösung für Aufgabe 1:

$$a_n = \frac{n+3}{n+1}$$

$$a_1 = 2 \quad a_2 = \frac{5}{3} \quad a_3 = \frac{3}{2} \quad a_4 = \frac{7}{5} \quad \ldots$$

$$\text{Vermutung: } S_U = 1 \text{ und } S_O = 2$$

Wir wollen zunächst den Nachweis für $S_U = 1$ führen. Also:

$$\begin{aligned}
a_n &\geq S_U \\
\frac{n+3}{n+1} &\geq 1 \quad | \cdot (n+1) \text{ (Das ist in } D \text{ immer positiv!)} \\
n+3 &\geq n+1 \quad | -n \\
3 &\geq 1 \quad \text{Wahre Aussage}
\end{aligned}$$

Hieraus folgt: $L = \mathbb{N}^*$ Der Beweis ist also erbracht.

Es folgt der Nachweis für $S_O = 2$:

$$\begin{aligned}
a_n &\leq S_O \\
\frac{n+3}{n+1} &\leq 2 \quad | \cdot (n+1) \text{ (Das ist in } D \text{ immer positiv!)} \\
n+3 &\leq 2n+2 \quad | -2n-3 \\
-n &\leq -1 \quad | \cdot (-1) \\
n &\geq 1
\end{aligned}$$

Hieraus folgt: $L = \mathbb{N}^*$ Der Beweis ist also erbracht.

## 4.2 Lösung für Aufgabe 2:

$$a_n = \frac{n}{2n-1}$$

$$a_1 = 1 \quad a_2 = \frac{2}{3} \quad a_3 = \frac{3}{5} \quad a_4 = \frac{4}{7} \quad \dots$$

$$\text{Vermutung: } S_U = \frac{1}{2} \text{ und } S_O = 1$$

Wir wollen zunächst den Nachweis für $S_U = \frac{1}{2}$ führen. Also:

$$\begin{aligned}
a_n &\geq S_U \\
\frac{n}{2n-1} &\geq \frac{1}{2} \quad | \cdot (2n-1) \text{ (Das ist in } D \text{ immer positiv!)} \\
n &\geq \frac{2n-1}{2} \quad | \cdot 2 \\
2n &\geq 2n-1 \quad | - 2n \\
0 &\geq -1 \quad \text{Wahre Aussage}
\end{aligned}$$

Hieraus folgt: $L = \mathbb{N}^*$ Der Beweis ist also erbracht.

Es folgt der Nachweis für $S_O = 1$:

$$\begin{aligned}
a_n &\leq S_O \\
\frac{n}{2n-1} &\leq 1 \quad | \cdot (2n-1) \text{ (Das ist in } D \text{ immer positiv!)} \\
n &\leq 2n-1 \quad | - 2n \\
-n &\leq -1 \quad | \cdot (-1) \\
n &\geq 1
\end{aligned}$$

Hieraus folgt: $L = \mathbb{N}^*$ Der Beweis ist also erbracht.

## 4.3 Lösung für Aufgabe 3:

$$a_n = \frac{2n-5}{2n-3}$$

$$a_1 = 3 \quad a_2 = -1 \quad a_3 = \frac{1}{3} \quad a_4 = \frac{3}{5} \quad a_5 = \frac{5}{7} \quad \ldots$$

Vermutung: $S_U = -1$ und $S_O = 3$

Wir wollen zunächst den Nachweis für $S_U = -1$ führen. Also:

$$\begin{array}{rcll} a_n & \geq & S_U & \\ \frac{2n-5}{2n-3} & \geq & -1 & | \cdot (2n-3) \end{array}$$

Hier wird mit einem Term multipliziert, der im Definitionsbereich sowohl positiv, als auch negativ sein kann. Daher ist eine **Fallunterscheidung** notwendig.

$$\begin{array}{rcl} & \underline{\text{Für } n \geq 2:} & \\ 2n-5 & \geq & -1 \cdot (2n-3) \\ 2n-5 & \geq & -2n+3 \\ 4n & \geq & 8 \\ n & \geq & 2 \\ L_1 & = & \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} & \underline{\text{Für } n = 1:} & \\ 2n-5 & \leq & -1 \cdot (2n-3) \\ 2n-5 & \leq & -2n+3 \\ 4n & \leq & 8 \\ n & \leq & 2 \\ L_2 & = & \{1\} \end{array}$$

$$L = L_1 \cup L_2 = \mathbb{N}^*$$

Da die Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}^*$ erfüllt ist, ist der Beweis für die vermutete untere Schranke erbracht.

Es folgt der Nachweis für $S_O = 3$.

$$\begin{array}{rcll} a_n & \leq & S_O & \\ \frac{2n-5}{2n-3} & \leq & 3 & | \cdot (2n-3) \end{array}$$

Hier wird mit einem Term multipliziert, der im Definitionsbereich sowohl positiv, als auch negativ sein kann. Daher ist eine **Fallunterscheidung** notwendig.

$$\begin{array}{rcl} & \underline{\text{Für } n \geq 2:} & \\ 2n-5 & \leq & 3 \cdot (2n-3) \\ 2n-5 & \leq & 6n-9 \\ -4n & \leq & -4 \\ n & \geq & 1 \\ L_1 & = & \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} & \underline{\text{Für } n = 1:} & \\ 2n-5 & \geq & 3 \cdot (2n-3) \\ 2n-5 & \geq & 6n-9 \\ -4n & \geq & -4 \\ n & \leq & 1 \\ L_2 & = & \{1\} \end{array}$$

$$L = L_1 \cup L_2 = \mathbb{N}^*$$

Da die Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}^*$ erfüllt ist, ist der Beweis für die vermutete obere Schranke erbracht.

## 4.4 Lösung für Aufgabe 4:

$$a_n = \frac{5n-9}{2n-7}$$

$$a_1 = \frac{4}{5} \quad a_2 = -\frac{1}{3} \quad a_3 = -6 \quad a_4 = 11 \quad a_5 = \frac{16}{3} \quad \dots$$

$$\text{Vermutung: } S_U = -6 \text{ und } S_O = 11$$

Wir wollen zunächst den Nachweis für $S_U = -6$ führen. Also:

$$\begin{aligned} a_n &\geq S_U \\ \frac{5n-9}{2n-7} &\geq -6 \quad | \cdot (2n-7) \end{aligned}$$

Hier wird mit einem Term multipliziert, der im Definitionsbereich sowohl positiv, als auch negativ sein kann. Daher ist eine **Fallunterscheidung** notwendig.

$$\begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{c}{\underline{\text{Für } n \geq 4:}} \\ 5n-9 &\geq& -6\cdot(2n-7) \\ 5n-9 &\geq& -12n+42 \\ 17n &\geq& 51 \\ n &\geq& 3 \\ L_1 &=& \mathbb{N}^* \setminus \{1;2;3\} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{c}{\underline{\text{Für } n \leq 3:}} \\ 5n-9 &\leq& -6\cdot(2n-7) \\ 5n-9 &\leq& -12n+42 \\ 17n &\leq& 51 \\ n &\leq& 3 \\ L_2 &=& \{1;2;3\} \end{array}$$

$$L = L_1 \cup L_2 = \mathbb{N}^*$$

Da die Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}^*$ erfüllt ist, ist der Beweis für die vermutete untere Schranke erbracht.

Es folgt der Nachweis für $S_O = 11$.

$$\begin{aligned} a_n &\leq S_O \\ \frac{5n-9}{2n-7} &\leq 11 \quad | \cdot (2n-7) \end{aligned}$$

Hier wird mit einem Term multipliziert, der im Definitionsbereich sowohl positiv, als auch negativ sein kann. Daher ist eine **Fallunterscheidung** notwendig.

$$\begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{c}{\underline{\text{Für } n \geq 4:}} \\ 5n-9 &\leq& 11\cdot(2n-7) \\ 5n-9 &\leq& 22n-77 \\ -17n &\leq& -68 \\ n &\geq& 4 \\ L_1 &=& \mathbb{N}^* \setminus \{1;2;3\} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{c}{\underline{\text{Für } n \leq 3:}} \\ 5n-9 &\geq& 11\cdot(2n-7) \\ 5n-9 &\geq& 22n-77 \\ -17n &\geq& -68 \\ n &\leq& 4 \\ L_2 &=& \{1;2;3\} \end{array}$$

$$L = L_1 \cup L_2 = \mathbb{N}^*$$

Da die Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}^*$ erfüllt ist, ist der Beweis für die vermutete untere Schranke erbracht.

## 4.5 Lösung für Aufgabe 5:

$$a_n = \frac{n-12}{3n-10}$$

$$a_1 = \frac{11}{7} \quad a_2 = \frac{5}{2} \quad a_3 = 9 \quad a_4 = -4 \quad a_5 = -\frac{7}{5} \quad a_6 = -\frac{3}{4} \quad a_7 = -\frac{5}{11} \quad \ldots$$

$$\text{Vermutung: } S_U = -4 \text{ und } S_O = 9$$

Wir wollen zunächst den Nachweis für $S_U - 4$ führen. Also:

$$\begin{aligned} a_n &\geq S_U \\ \frac{n-12}{3n-10} &\geq -4 \quad \cdot (3n-10) \end{aligned}$$

Da der Faktor, mit dem wir multiplizieren, **positiv** oder **negativ** sein kann, ist eine **Fallunterscheidung** erforderlich. Der Faktor $(3n-10)$ ist positiv, wenn $n > \frac{10}{3}$ ist. Da diese Grenze **keine natürliche** Zahl ist, kann man auch schreiben: $n \geq 4$. Es geht also weiter:

Fall 1 (positiver Fall): für $n \geq 4$:

$$\begin{aligned} \frac{n-12}{3n-10} &\geq -4 \quad \cdot (3n-10) \\ n-12 &\geq -4 \cdot (3n-10) \\ n-12 &\geq -12n+40) \quad | +12n+12 \\ 13n &\geq 52 \quad | : 13 \\ n &\geq 4 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis liegt voll in dem untersuchten Bereich. Das bedeutet, alle $n$, die im untersuchten Bereich liegen, gehören zur Lösungsmenge. Man kann auch schreiben:

$$L_1 = \{n \mid n \in \mathbb{N}^* \land n \geq 4\}$$

Jetzt fehlt noch die Untersuchung des anderen Falles, nämlich $n \leq 3$. Das sieht dann so aus:

Fall 2 (negativer Fall): für $n \leq 3$:

$$\begin{aligned} &\vdots \\ n &\leq 4 \end{aligned}$$

In diesem untersuchten Bereich liegt nur die 1, die 2 und die 3. Für alle ist der Ergebnisterm eine wahre Aussage, also ist:

$$L_2 = \{1; 2; 3\}$$

Die Gesamt-Lösungsmenge ist damit:

$$L_{ges} = L_1 \cup L_2 = \mathbb{N}^*$$

Damit ist der Beweis erbracht!

Es folgt der Nachweis für $S_O = 9$.

$$\begin{array}{rcl} a_n & \leq & S_O \\ \dfrac{n-12}{3n-10} & \leq & 9 \quad | \cdot (3n-10) \end{array}$$

Hier wird mit einem Term multipliziert, der im Definitionsbereich sowohl positiv, als auch negativ sein kann. Daher ist eine **Fallunterscheidung** notwendig.

$$\begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{c}{\underline{\text{Für } n \geq 4:}} \\ n-12 & \leq & 9 \cdot (3n-10) \\ n-12 & \leq & 27n-90 \\ -26n & \leq & -78 \\ n & \geq & 3 \\ L_1 & = & \mathbb{N}^* \setminus \{1;2;3\} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{c}{\underline{\text{Für } n \leq 3:}} \\ n-12 & \geq & 9 \cdot (3n-10) \\ n-12 & \geq & 27n-90 \\ -26n & \geq & -78 \\ n & \leq & 3 \\ L_2 & = & \{1;2;3\} \end{array}$$

$$L = L_1 \cup L_2 = \mathbb{N}^*$$

Da die Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}^*$ erfüllt ist, ist der Beweis für die vermutete obere Schranke erbracht.

## 4.6 Lösung für Aufgabe 6:

$$a_n = \frac{6n+3}{5n-19}$$

$$a_1 = -\frac{9}{14} \quad a_2 = -\frac{3}{5} \quad a_3 = -\frac{21}{4} \quad a_4 = 27 \quad a_5 = \frac{11}{2} \quad a_6 = \frac{17}{7} \dots$$

$$\text{Vermutung: } S_U = -\frac{21}{4} \text{ und } S_O = 27$$

Wir wollen zunächst den Nachweis für $S_U = -\frac{21}{4}$ führen. Also:

$$\begin{aligned} a_n &\geq S_U \\ \frac{6n+3}{5n-19} &\geq -\frac{21}{4} \quad | \cdot (5n-19) \end{aligned}$$

Da der Faktor, mit dem wir multiplizieren, **positiv** oder **negativ** sein kann, ist eine **Fallunterscheidung** erforderlich. Der Faktor $(5n-19)$ ist positiv, wenn $n > \frac{19}{5}$ ist. Da diese Grenze **keine natürliche** Zahl ist, kann man auch schreiben: $n \geq 4$. Es geht also weiter:

<u>Fall 1 (positiver Fall): für $n \geq 4$:</u>

$$\begin{aligned} 6n+3 &\geq -\frac{21}{4} \cdot (5n-19) \quad | \cdot 4 \\ 24n+12 &\geq -21 \cdot (5n-19) \\ 24n+12 &\geq -105n+399 \quad | -12+105n \\ 129n &\geq 387 \quad | : 129 \\ n &\geq 3 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis liegt voll in dem untersuchten Bereich. Das bedeutet, alle $n$, die im untersuchten Bereich liegen, gehören zur Lösungsmenge. Man kann auch schreiben:

$$L_1 = \{n \mid n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq 4\}$$

Jetzt fehlt noch die Untersuchung des anderen Falles, nämlich $n \leq 3$. Das sieht dann so aus:

<u>Fall 2 (negativer Fall): für $n \leq 3$:</u>

$$\begin{aligned} &\vdots \\ n &\leq 3 \end{aligned}$$

In diesem untersuchten Bereich liegt nur die 1, die 2 und die 3. Für alle ist der Ergebnisterm eine wahre Aussage, also ist:

$$L_2 = \{1; 2; 3\}$$

Die Gesamt-Lösungsmenge ist damit:

$$L_{ges} = L_1 \cup L_2 = \mathbb{N}^*$$

Damit ist der Beweis erbracht!

Als nächstes wollen wir beweisen, dass $S_O = 27$ ist.

$$\begin{aligned} a_n &\leq S_U \\ \frac{6n+3}{5n-19} &\leq 27 \quad | \cdot (5n-19) \end{aligned}$$

Da der Faktor, mit dem wir multiplizieren, **positiv** oder **negativ** sein kann, ist eine **Fallunterscheidung** erforderlich. Der Faktor $(5n-19)$ ist positiv, wenn $n > \frac{19}{5}$ ist. Da diese Grenze **keine natürliche** Zahl ist, kann man auch schreiben: $n \geq 4$. Es geht also weiter:

Fall 1 (positiver Fall): für $n \geq 4$:

$$\begin{aligned} 6n+3 &\leq 27 \cdot (5n-19) \\ 6n+3 &\leq 135n - 513 \quad | -135n-3 \\ -129n &\leq -516 \quad | : (-129) \\ n &\geq 4 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis liegt voll in dem untersuchten Bereich. Das bedeutet, alle $n$, die im untersuchten Bereich liegen, gehören zur Lösungsmenge. Man kann auch schreiben:

$$L_1 = \{n \mid n \in \mathbb{N}^* \wedge n \geq 4\}$$

Jetzt fehlt noch die Untersuchung des anderen Falles, nämlich $n \leq 3$. Das sieht dann so aus:

Fall 2 (negativer Fall): für $n \leq 3$:

$$\begin{aligned} &\vdots \\ n &\leq 4 \end{aligned}$$

In diesem untersuchten Bereich liegt nur die 1, die 2 und die 3. Für alle ist der Ergebnisterm eine wahre Aussage, also ist:

$$L_2 = \{1; 2; 3\}$$

Die Gesamt-Lösungsmenge ist damit:

$$L_{ges} = L_1 \cup L_2 = \mathbb{N}^*$$

Damit ist der Beweis erbracht!