Monotonie von Folgen

W. Kippels

18. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: w.kippels@dokom.net

Vielen Dank!

2 Einleitung

Dieses Skript stellt keinen Lehrgang dar. Hier sollen nur Zusammenhänge dargestellt werden, die als bekannt vorausgesetzt werden. Der Schwerpunkt liegt auf Übungsaufgaben und deren Lösungen.

3 Die Grundlagen

3.1 Die Definitionen

$$
\begin{aligned}
\text{Die Folge } a_n \text{ heißt } \textbf{monoton steigend} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^*: \quad a_{n+1} \geq a_n \\
\text{Die Folge } a_n \text{ heißt } \textbf{monoton fallend} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^*: \quad a_{n+1} \leq a_n \\
\text{Die Folge } a_n \text{ heißt } \textbf{streng monoton steigend} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^*: \quad a_{n+1} > a_n \\
\text{Die Folge } a_n \text{ heißt } \textbf{streng monoton fallend} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^*: \quad a_{n+1} < a_n
\end{aligned}
$$

Eine Folge, die monoton steigend oder monoton fallend ist, heißt **monotone** Folge.

3.2 Bedeutung der Definitionen

Die Bedeutung dieser Definitionen möchte ich anhand der ersten Definition erläutern.

$$\text{Die Folge } a_n \text{ heißt } \textbf{monoton steigend} \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^*: \quad a_{n+1} \geq a_n$$

Die jeweiligen Kurzzeichen lassen sich wie folgt übersetzen:

$\Leftrightarrow$	genau dann, wenn
$\forall$	für alle
$\in$	ist Element von
$\mathbb{N}$	die Menge der natürlichen Zahlen (einschließlich der 0)
$\mathbb{N}^*$	die Menge der natürlichen Zahlen ohne die 0
a_n	das Folgenglied mit der Nummer n (das n-te Folgenglied)
a_{n+1}	das Folgenglied mit der Nummer $n+1$ (das $(n+1)$-te Folgenglied)

Damit möchte ich die mathematische Kurzschreibweise in „Klartext“ übersetzen. Hier zunächst die „wörtliche“ Übersetzung:

> *Die Folge a_n heißt **monoton steigend** genau dann, wenn für alle natürliche Zahlen n ohne die Null gilt: Folgenglied a_{n+1} ist **größer oder gleich** dem Folgenglied a_n.*

Etwas freier, dafür aber verständlicher übersetzt bedeutet das:

> *Die Folge mit dem allgemeinen Folgenglied a_n heißt **monoton steigend** genau dann, wenn der Nachfolger eines **jeden** Folgengliedes **größer oder gleich** seinem Vorgänger ist.*

Das bedeutet folgendes: Man kann **jedes beliebige** Folgenglied nehmen und mit seinem Nachfolger vergleichen. Der Nachfolger ist dann **immer mindestens genau so groß**, wie dieses Folgenglied, oder auch größer. Wenn das mit **allen** Folgengliedern so richtig ist, dann kann man die Folge **monoton steigend** nennen. Andersherum: Würde man auch nur **ein einziges** Folgenglied finden, für das diese Bedingung nicht erfüllt wäre, dann wäre die Folge **nicht** monoton steigend.

Für eine **monoton fallende Folge** gilt sinngemäß das gleiche, nur ist der Nachfolger dann immer **kleiner** oder gleich seinem Vorgänger.

Fügt man nun noch das Wort „**streng**" in die Definitionen mit ein, dann gelten wieder sinngemäß die gleichen Bedingungen, jedoch ist nun der Fall **ausgeschlossen**, dass das Folgenglied und sein Vorgänger gleich sind. Hier muss der Nachfolger **echt größer** bzw. **echt kleiner** als sein Vorgänger sein. Auch hier muss die Bedingung für **alle** Folgenglieder gelten, völlig ohne Ausnahme.

3.3 Beweisidee

Wie kann man nun **beweisen**, dass eine bestimmte Folge eine dieser Monotoniebedingungen erfüllt? Man kann ja nicht nicht die Bedingung für alle Folgenglieder durchprobieren, man würde nie damit fertig, weil es unendlich viele Folgenglieder gibt. Wenn es so nicht geht, wie dann?

Das Problem liegt darin, dass die Bedingung ***für alle n*** nachgewiesen werden muss, die natürliche Zahlen (ohne die Null) darstellen. Daher geht man einfach von der Bedingung aus, setzt für a_n und a_{n+1} das allgemeine Glied der konkreten Folge ein und bestimmt die Lösungsmenge der sich dabei ergebenden Ungleichung. Die Definitionsmenge ist $\mathbb{N}^*$, und auch als Lösungsmenge muss $\mathbb{N}^*$ herauskommen. Nur dann ist die Bedingung $\forall n \in \mathbb{N}^*$ erfüllt.

3.4 Ein Beispiel

Ein Beispiel soll erklären, wie man dabei vorgehen kann. Gegeben sei die Folge mit dem allgemeinen Glied $a_n = \frac{1}{n}$. Die ersten Folgenglieder lauten:

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = \frac{1}{2} \qquad a_3 = \frac{1}{3} \qquad a_4 = \frac{1}{4} \qquad \ldots$$

Wir vermuten, dass die Folge **streng monoton fallend** ist. Es folgt der Beweis, indem die Lösungsmenge für diesen Ansatz bestimmt wird:

$$a_{n+1} < a_n \qquad D = \mathbb{N}^*$$

Eine Frage, die hier immer wieder auftaucht:„*Was ist a_n , und was ist a_{n+1}?*"

Die Formel für a_n ist vorgegeben. In der Aufgabenstellung steht: $a_n = \frac{1}{n}$. Der Nachfolger von a_n ist a_{n+1}. Beispielsweise ist zum Folgenglied a_7 – also dem Folgenglied mit der Nummer $n = 7$ – der Nachfolger das Folgenglied a_8, also das Folgenglied mit der Nummer $n = 8$. Man setzt also im allgemeinen Folgenglied für n eine 7 ein (für das aktuelle Folgenglied) bzw. eine 8 (für den Nachfolger). Allgemein im Beweis setzt man entsprechend für a_{n+1} einfach anstelle des n im allgemeinen Glied den Term $(n + 1)$ ein, und zwar überall, wo im allgemeinen Glied ein n vorkommt. (In unserem Beispiel ist es allerdings nur eine einzige Stelle im Nenner.) Wir erhalten:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

Eine Ungleichung (wie auch eine Gleichung) mit Brüchen löst man am besten, indem man sie zunächst mit dem Hauptnenner – hier $n \cdot (n+1)$ – multipliziert. Hier muss man aber aufpassen! Multipliziert man eine Ungleichung mit einer negativen Zahl, dann kehrt sich das Ungleichungszeichen um! Da $n \in \mathbb{N}^*$ ist, ist hier sichergestellt, dass jeder Faktor des Hauptnenners **positiv** ist, also auch der gesamte Hauptnenner. Daher ist in diesem Beipspiel eine Fallunterscheidung nicht erforderlich. Wir erhalten:

$$\begin{array}{rcll} n & < & n+1 & \mid -n \\ 0 & < & 1 & \end{array}$$

Das Ergebnis ist eine **wahre Aussage**. Sie ist für alle $n \in \mathbb{N}^*$ wahr. Die Lösungsmenge lautet also:

$$L = \mathbb{N}^*$$

Damit ist der Beweis erbracht, die Bedingung ist für alle $n \in \mathbb{N}^*$ erfüllt.

4 Übungsaufgaben

4.1 Aufgabe 1

Gegeben ist die Folge mit dem allgemeinen Glied $a_n = \frac{2n+1}{2n-1}$. Ist die Folge streng oder einfach monoton steigend oder fallend?
Bestimmen Sie dazu die ersten Folgenglieder und stellen Sie dann eine Vermutung auf. Beweisen Sie die Vermutung mit Hilfe der jeweiligen Definition. Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge der jeweiligen Ungleichung $\mathbb{N}^*$ ist!

4.2 Aufgabe 2

Gegeben ist die Folge mit dem allgemeinen Glied $a_n = \frac{2n-5}{3n-1}$. Ist die Folge streng oder einfach monoton steigend oder fallend?
Bestimmen Sie dazu die ersten Folgenglieder und stellen Sie dann eine Vermutung auf. Beweisen Sie die Vermutung mit Hilfe der jeweiligen Definition. Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge der jeweiligen Ungleichung $\mathbb{N}^*$ ist!

4.3 Aufgabe 3

Gegeben ist die Folge mit dem allgemeinen Glied $a_n = \frac{3n-5}{3n-10}$. Ist die Folge streng oder einfach monoton steigend oder fallend?
Bestimmen Sie dazu die ersten Folgenglieder und stellen Sie dann eine Vermutung auf. Beweisen Sie die Vermutung mit Hilfe der jeweiligen Definition oder zeigen Sie durch zwei Gegenbeispiele, dass keine Monotonie vorliegt.

4.4 Aufgabe 4

Gegeben ist die Folge mit dem allgemeinen Glied $a_n = 2n^2 - 6n + 10$. Ist die Folge streng oder einfach monoton steigend oder fallend?
Bestimmen Sie dazu die ersten Folgenglieder und stellen Sie dann eine Vermutung auf. Beweisen Sie die Vermutung mit Hilfe der jeweiligen Definition oder zeigen Sie durch zwei Gegenbeispiele, dass keine Monotonie vorliegt.

5 Komplette Lösungen mit Lösungsweg

5.1 Aufgabe 1

Gegeben ist die Folge mit dem allgemeinen Glied $a_n = \frac{2n+1}{2n-1}$. Ist die Folge streng oder einfach monoton steigend oder fallend?

Um eine Vermutung aufstellen zu können, bestimmen wir die ersten Folgenglieder.

$$a_1 = 3 \quad a_2 = \frac{5}{3} \quad a_3 = \frac{7}{5} \quad a_4 = \frac{9}{7} \quad a_5 = \frac{11}{9} \quad a_6 = \frac{13}{11}$$

$\Rightarrow$ Vermutung: Die Folge ist ***streng monoton fallend***. Nach der Definition müssen wir also zeigen, dass $a_{n+1} < a_n$ richtig ist für alle $n \in \mathbb{N}^*$. Wenn wir diese Ungleichung ansetzen, müssen wir also zeigen, dass die Lösungsmenge $L = \mathbb{N}^*$ ist.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &< a_n \quad | \text{ konkrete Folge einsetzen} \qquad D = \mathbb{N}^* \\ \frac{2(n+1)+1}{2(n+1)-1} &< \frac{2n+1}{2n-1} \\ \frac{2n+2+1}{2n+2-1} &< \frac{2n+1}{2n-1} \\ \frac{2n+3}{2n+1} &< \frac{2n+1}{2n-1} \quad | \cdot (2n+1)\cdot(2n-1) \end{aligned}$$

Jetzt stehen wir an einem besonders kritischen Punkt des Beweises. Wir wollen die Ungleichung mit dem Produkt der Nenner multiplizieren, damit die Nenner wegfallen. Dabei ist zu beachten, dass sich das Ungleichungszeichen **umdrehen** muss, wenn wir die Ungleichung mit einer **negativen** Zahl multiplizieren. Da jedoch der Hauptnenner, mit dem wir multiplizieren wollen, die Variable n enthält, ist kein konkreter Wert für den Hauptnenner bekannt. Wir müssen also eventuell eine ***Fallunterscheidung*** machen.

Wir sehen uns die beiden Faktoren einmal genau an. Der erste Faktor $(2n + 1)$ ist ***stets positiv***, denn wegen $D = \mathbb{N}^*$ können nur positive Zahlen für n eingesetzt werden. Sinngemäß gilt das auch für den zweiten Faktor $(2n - 1)$. Da für n mindestens 1 eingesetzt wird, ist auch dieser Faktor positiv. Somit ist der ganze Hauptnenner positiv, und eine Fallunterscheidung erübrigt sich.

$$\begin{aligned} \frac{2n+3}{2n+1} &< \frac{2n+1}{2n-1} \quad | \cdot (2n+1)\cdot(2n-1) \\ (2n+3)\cdot(2n-1) &< (2n+1)\cdot(2n+1) \\ 4n^2 - 2n + 6n - 3 &< (2n+1)^2 \\ 4n^2 + 4n - 3 &< 4n^2 + 4n + 1 \quad | - 4n^2 - 4n \\ -3 &< 1 \end{aligned}$$

Wir erhalten eine *wahre Aussage*. Diese ist immer richtig, egal, welcher Wert für n verwendet wird. Also ist $L = D = \mathbb{N}^*$, der Beweis ist erbracht.

5.2 Aufgabe 2

Gegeben ist die Folge mit dem allgemeinen Glied $a_n = \frac{2n-5}{3n-1}$. Ist die Folge streng oder einfach monoton steigend oder fallend?

Um eine Vermutung aufstellen zu können, bestimmen wir die ersten Folgenglieder.

$$a_1 = -\frac{3}{2} \quad a_2 = -\frac{1}{5} \quad a_3 = \frac{1}{8} \quad a_4 = \frac{3}{11} \quad a_5 = \frac{5}{14} \quad a_6 = \frac{7}{17}$$

$\Rightarrow$ Vermutung: Die Folge ist ***streng monoton steigend***. Nach der Definition müssen wir also zeigen, dass $a_{n+1} > a_n$ richtig ist für alle $n \in \mathbb{N}^*$. Wenn wir diese Ungleichung ansetzen, müssen wir also zeigen, dass die Lösungsmenge $L = \mathbb{N}^*$ ist.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &> a_n \quad | \text{ konkrete Folge einsetzen} \qquad D = \mathbb{N}^* \\ \frac{2(n+1)-5}{3(n+1)-1} &> \frac{2n-5}{3n-1} \\ \frac{2n+2-5}{3n+3-1} &> \frac{2n-5}{3n-1} \\ \frac{2n-3}{3n+2} &> \frac{2n-5}{3n-1} \quad | \cdot (3n+2)\cdot(3n-1) \end{aligned}$$

Jetzt stehen wir an einem besonders kritischen Punkt des Beweises. Wir wollen die Ungleichung mit dem Produkt der Nenner multiplizieren, damit die Nenner wegfallen. Dabei ist zu beachten, dass sich das Ungleichungszeichen **umdrehen** muss, wenn wir die Ungleichung mit einer **negativen** Zahl multiplizieren. Da jedoch der Hauptnenner, mit dem wir multiplizieren wollen, die Variable n enthält, ist kein konkreter Wert für den Hauptnenner bekannt. Wir müssen also eventuell eine ***Fallunterscheidung*** machen.

Wir sehen uns die beiden Faktoren einmal genau an. Der erste Faktor $(3n + 2)$ ist ***stets positiv***, denn wegen $D = \mathbb{N}^*$ können nur positive Zahlen für n eingesetzt werden. Sinngemäß gilt das auch für den zweiten Faktor $(3n - 1)$. Da für n mindestens 1 eingesetzt wird, ist auch dieser Faktor positiv. Somit ist der ganze Hauptnenner positiv, und eine Fallunterscheidung erübrigt sich.

$$\begin{aligned} \frac{2n-3}{3n+2} &> \frac{2n-5}{3n-1} \quad | \cdot (3n+2)\cdot(3n-1) \\ (2n-3)\cdot(3n-1) &> (2n-5)\cdot(3n+2) \\ 6n^2-2n-9n+3 &> 6n^2+4n-15n-10 \quad | -6n^2 \\ -11n+3 &> -11n-10 \quad | +11n \\ 3 &> -10 \end{aligned}$$

Wir erhalten eine *wahre Aussage*. Diese ist immer richtig, egal, welcher Wert für n verwendet wird. Also ist $L = D = \mathbb{N}^*$, der Beweis ist erbracht.

5.3 Aufgabe 3

Gegeben ist die Folge mit dem allgemeinen Glied $a_n = \frac{3n-5}{3n-10}$. Ist die Folge streng oder einfach monoton steigend oder fallend?

Um eine Vermutung aufstellen zu können, bestimmen wir die ersten Folgenglieder.

$$a_1 = \frac{2}{7} \quad a_2 = -\frac{1}{4} \quad a_3 = -4 \quad a_4 = \frac{7}{2} \quad a_5 = \frac{10}{5} = 2 \quad a_6 = \frac{13}{7}$$

Wie man leicht erkennen kann, fällt die Folge von a_1 bis a_3. Von a_3 nach a_4 steigt sie und danach fällt sie wieder, eine Monotonie liegt also nicht vor. Zum Beweis genügt folgende Angabe:

$$a_2 < a_1 \quad \wedge \quad a_4 > a_3$$

Damit ist weder $a_{n+1} \leq a_n$ noch $a_{n+1} \geq a_n$ und erst recht nicht $a_{n+1} < a_n$ oder $a_{n+1} > a_n$ für ***alle*** $n \in \mathbb{N}^*$ erfüllt.

5.4 Aufgabe 4

Gegeben ist die Folge mit dem allgemeinen Glied $a_n = 2n^2 - 6n + 10$. Ist die Folge streng oder einfach monoton steigend oder fallend?

Um eine Vermutung aufstellen zu können, bestimmen wir die ersten Folgenglieder.

$$a_1 = 6 \quad a_2 = 6 \quad a_3 = 10 \quad a_4 = 18 \quad a_5 = 30 \quad a_6 = 46$$

Offensichtlich steigt die Folge, obwohl die ersten beiden Folgenglieder gleich sind. Sie steigt also nicht *streng*, sondern nur einfach monoton.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &\geq a_n \quad |\text{ konkrete Folge einsetzen} \qquad D = \mathbb{N}^* \\
2 \cdot (n+1)^2 - 6 \cdot (n+1) + 10 &\geq 2n^2 - 6n + 10 \\
2 \cdot (n^2 + 2n + 1) - 6n - 6 + 10 &\geq 2n^2 - 6n + 10 \\
2n^2 + 4n + 2 - 6n - 6 + 10 &\geq 2n^2 - 6n + 10 \quad | - 2n^2 \\
-2n + 6 &\geq -6n + 10 \quad | + 6n - 6 \\
4n &\geq 4 \quad | : 4 \\
n &\geq 1
\end{aligned}$$

Hiermit ist $L = \mathbb{N}^*$, denn alle $n \in \mathbb{N}^*$ sind ja mindestens 1 groß. Der Beweis ist erbracht.