Flächenberechnungen

W. Kippels

15. März 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort **2**

2 Dreiecke **3**
2.1 Allgemeines Dreieck . . . 3
2.2 Rechtwinkliges Dreieck . . . 3

3 Vierecke **3**
3.1 Rechteck . . . 4
3.1.1 allgemeines Rechteck . . . 4
3.1.2 Quadrat . . . 4
3.2 Parallelogramm . . . 4
3.3 Trapez . . . 5
3.4 Drachenviereck . . . 5
3.5 Raute . . . 5

4 Übungsaufgaben **6**
4.1 Aufgabe 1 . . . 6
4.2 Aufgabe 2 . . . 6
4.3 Aufgabe 3 . . . 6
4.4 Aufgabe 4 . . . 6
4.5 Aufgabe 5 . . . 7

5 Lösungen der Übungsaufgaben **8**
5.1 Aufgabe 1 . . . 8
5.2 Aufgabe 2 . . . 9
5.3 Aufgabe 3 . . . 10
5.4 Aufgabe 4 . . . 11
5.5 Aufgabe 5 . . . 12

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

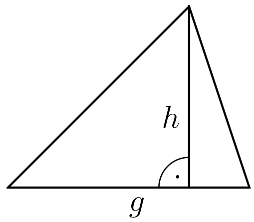
Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: **mail@dk4ek.de**

Vielen Dank!

2 Dreiecke

2.1 Allgemeines Dreieck

Zur Berechnung der Fläche eines Dreieckes benötigt man eine Grundseite und die **zugehörige** Höhe. Man kann **jede beliebige** Seite als Grundseite wählen, entscheidend ist aber, dass die dazugehörige Höhe dazu einen **Rechten Winkel** bildet. Die Dreieckfläche wird damit wie folgt berechnet:



> ***Die Fläche eines Dreieckes ist das halbe Produkt aus einer Grundseite und der zugehörigen Höhe.***

Nennt man die Grundseite g und die Höhe h, dann lautet die Formel für die Dreieckfläche:

$$\boxed{A = \frac{g \cdot h}{2}}$$

2.2 Rechtwinkliges Dreieck

Ist das Dreieck **Rechtwinklig**, dann wählt man sinnvollerweise eine der Katheten als Grundseite. Wegen des Rechten Winkels ist dann die andere Kathete die Höhe. Die Fläche eines Rechtwinkligen Dreieckes wird damit wie folgt berechnet:

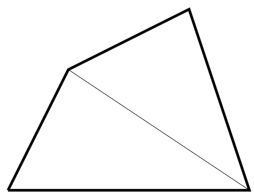
> ***Die Fläche eines Rechtwinkligen Dreieckes ist das halbe Produkt aus den beiden Katheten.***

Wenn wir die beiden Katheten mit a und b bezeichnen, dann lautet die Formel für die Fläche eines Rechtwinkligen Dreieckes:

$$\boxed{A = \frac{a \cdot b}{2}}$$

3 Vierecke

Für das allgemeine Viereck ohne Besonderheiten gibt es keine Rechenformel. Man kann es jedoch immer durch eine Diagonale in zwei Dreiecke aufteilen, die dann mit der Dreieckformel berechnet werden können.

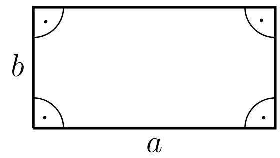


Es gibt jedoch eine ganze Reihe spezieller Vierecke, für die es jeweils eigene Berechnungsformeln gibt.

3.1 Rechteck

3.1.1 allgemeines Rechteck

Ein Viereck mit vier Rechten Winkeln nennt man **Rechteck**. Die gegenüberliegenden Seiten sind dabei jeweils gleich lang. Die Fläche eines Rechteckes ist sehr einfach zu berechnen.



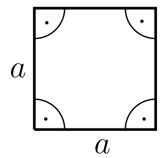
> ***Die Fläche eines Rechteckes ist das Produkt aus den beiden Rechteckseiten.***

Bezeichnen wir die Rechteckseiten mit a und b, dann erhalten wir diese Formel:

$$\boxed{A = a \cdot b}$$

3.1.2 Quadrat

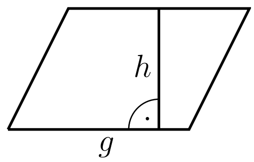
Als Spezialfall eines Rechteckes gibt es noch das Quadrat. Hier sind alle Seiten gleich lang. Wenn die Quadratseiten mit a bezeichnet werden, lautet die Berechnungsformel:



$$\boxed{A = a^2}$$

3.2 Parallelogramm

Ein Parallelogramm ist ein Viereck, bei dem die **gegenüberliegenden** Seiten jeweils parallel verlaufen. Dadurch sind sie auch jeweils gleich lang. Man kann ein Rechteck daher auch als einen Spezialfall eines Parallelogrammes mit Rechten Winkeln betrachten.



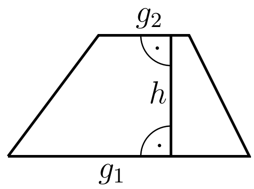
Zur Berechnung der Fläche eines Parallelogramms benötigt man eine Grundseite und die **zugehörige** Höhe. Welche Seite man als Grundseite wählt, ist gleichgültig, die Höhe muss nur zu dieser Seite einen Rechten Winkel bilden. Damit ist die Parallelogrammfläche recht einfach zu berechnen.

> ***Die Fläche eines Parallelogramms ist das Produkt aus einer Grundseite und der zugehörigen Höhe.***

Bezeichnet man die Grundseite mit g und die Höhe mit h, dann erhält man diese Formel:

$$\boxed{A = g \cdot h}$$

3.3 Trapez

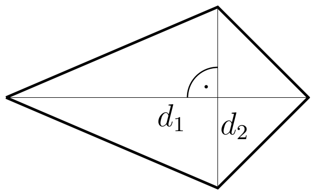


Ein Trapez ist ein Viereck mit **zwei parallelen** Seiten. Ein Parallelogramm ist somit eigentlich ein Spezialfall eines Trapezes.

Die beiden parallelen Seiten werden **erste** und **zweite Grundseite** genannt, den **Abstand** der Grundseiten nennt man **Höhe**. Wenn man die beiden Grundseiten mit g_1 und g_2 und die Höhe mit h bezeichnet, erhält man folgende Formel zur Berechnung der Fläche eines Trapezes:

$$\boxed{A = \frac{g_1 + g_2}{2} \cdot h}$$

3.4 Drachenviereck



Ein Drachenviereck ist ein Viereck, bei dem jeweils zwei benachbarten Seiten gleich lang sind. Das führt dazu, dass sich die beiden Diagonalen rechtwinklig schneiden.

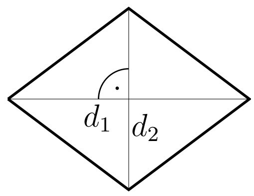
Weil das so ist, eignen sich die Diagonalen gut zur Berechnung der Fläche.

> ***Die Fläche eines Drachenviereckes ist das halbe Produkt aus den beiden Diagonalen.***

Bezeichnet man die Diagonalen mit d_1 und d_2, dann erhält man folgende Formel zur Berechnung der Fläche:

$$\boxed{A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}}$$

3.5 Raute



Die Raute ist ein Viereck mit vier gleichlangen Seiten. Weil das dazu führt, dass die sich jeweils gegenüberliegenden Seiten parallel sind, kann man eine Raute sowohl als Spezialfall eines Parallelogramms, als auch als Spezialfall eines Drachenvierecks betrachten. Daher kann man die Fläche sowohl mit der Formel für das Drachenviereck, als auch mit der Formel für das Parallelogramm bestimmen. Was günstiger ist, hängt schlicht davon ab, welche Größen bekannt sind. Kennt man die Diagonalen – wie in der Skizze angedeutet – dann nimmt man die Drachenviereckformel, kennt man eine Grundseite mit zugehöriger Höhe, dann verwendet man die Parallelogrammformel. Die Formeln hier zu wiederholen erübrigt sich meines Erachtens.

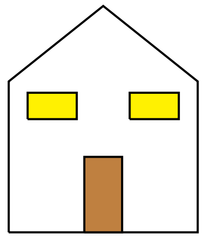
4 Übungsaufgaben

4.1 Aufgabe 1

In einem Kindergarten soll ein rechteckiger Sandkasten mit 3 Meter Breite und 5 Meter Länge angelegt werden. Dazu muss auf dieser Fläche die Erde 10 Zentimeter tief ausgehoben werden. Wenn der Hausmeister das mit einem Spaten macht, benötigt er pro Quadratmeter 10 Minuten. Wie lange wäre er beschäftigt?

4.2 Aufgabe 2

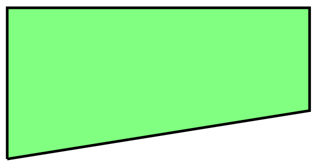
Eine Fassade nach nebenstehendem Bild soll angestrichen werden. Die Front hat eine Breite von 5 Metern. In der Mitte ist sie 6 Meter hoch, an den Seiten 4 Meter. Die Tür ist 1 Meter breit und 2 Meter hoch. Die Fenster haben je eine Breite von 1,80 Metern und sind 90 Zentimeter hoch.



Die Fenster und die Tür werden **nicht** mitgestrichen. Prüfen Sie rechnerisch, ob ein Eimer mit 5 Liter Inhalt ausreicht. Ein Liter reicht für vier Quadratmeter.

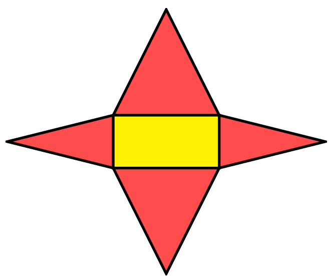
4.3 Aufgabe 3

Nebenstehend ist eine Rasenfläche auf einem Grundstück dargestellt. Die Rasenfläche hat eine Gesamtlänge von 36 Metern. Auf der Westseite ist es 15 Meter und auf der Ostseite 10 Meter breit. Die Grundstücksecken an der Nordseite stellen Rechte Winkel dar. Wie lange benötigt der Gärtner für das Mähen der Rasenfläche, wenn er in 6 Minuten eine Fläche von 50 Quadratmetern mähen kann?



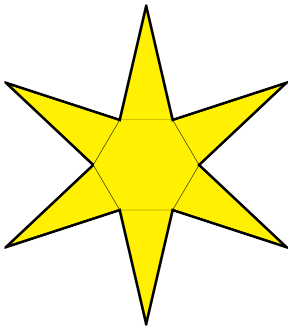
4.4 Aufgabe 4

Nebenstehendes Muster soll als Weihnachtsdekoration aus farbigem Karton hergestellt werden. Die Dreiecke sollen rotfarbig sein, das Rechteck gelb. Damit dieser Weihnachtsstern zusammenhält, wird zunächst die Gesamtfigur aus rotem Karton ausgeschnitten. Anschließend wird das gelbe Rechteck aufgeklebt. Das Rechteck ist 20 Zentimeter lang und 10 Zentimeter breit. Alle Dreiecke sind gleichschenklig und haben eine Höhe von je 20 Zentimeter. Der verwendete Karton hat ein Gewicht von 250 Gramm je Quadratmeter. Wieviel Gramm wiegt der fertige Weihnachtsstern?



4.5 Aufgabe 5

Nebenstehender Stern soll aus einem DIN-A4-Blatt ausgeschnitten werden. Ein DIN-A4-Blatt ist 210 Millimeter breit und 297 Millimeter lang.



Der Stern besteht aus einem regelmäßigen Sechseck in der Mitte und sechs gleichen Gleichschenkligen Dreiecken darum herum. Das Sechseck hat eine Seitenlänge von je 4 Zentimetern. Der Abstand von je zwei sich gegenüberliegenden Seiten beträgt 6,9 Zentimeter, die Entfernung zweier sich gegenüberliegenden Ecken 8 Zentimeter. Alle Dreiecke haben eine eine Höhe von 8,6 Zentimetern.

Wieviel Prozent Verschnitt ergibt sich durch das Ausschneiden aus einem DIN-A4-Blatt?

5 Lösungen der Übungsaufgaben

5.1 Aufgabe 1

In einem Kindergarten soll ein rechteckiger Sandkasten mit 3 Meter Breite und 5 Meter Länge angelegt werden. Dazu muss auf dieser Fläche die Erde 10 Zentimeter tief ausgehoben werden. Wenn der Hausmeister das mit einem Spaten macht, benötigt er pro Quadratmeter 10 Minuten. Wie lange wäre er beschäftigt?

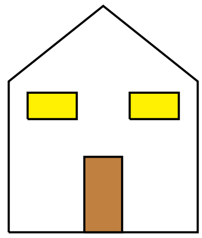
Lösung: Der Sandkasten stellt ein Rechteck mit den Seitenlängen $a = 3\,\mathrm{m}$ und $b = 5\,\mathrm{m}$ dar. Die Rechteckformel wird verwendet.

$$\begin{aligned} A &= a \cdot b \\ &= 3\,\mathrm{m} \cdot 5\,\mathrm{m} \\ A &= 15\,\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

Ergebnis: Der Hausmeister benötigt für jeden Quadratmeter 10 Minuten. Er wäre also $15 \cdot 10 = 150$ Minuten oder umgerechnet 2 Stunden und 30 Minuten beschäftigt.

5.2 Aufgabe 2

Eine Fassade nach nebenstehendem Bild soll angestrichen werden. Die Front hat eine Breite von 5 Metern. In der Mitte ist sie 6 Meter hoch, an den Seiten 4 Meter. Die Tür ist 1 Meter breit und 2 Meter hoch. Die Fenster haben je eine Breite von 1,80 Metern und sind 90 Zentimeter hoch.



Die Fenster und die Tür werden **nicht** mitgestrichen. Prüfen Sie rechnerisch, ob ein Eimer mit 5 Liter Inhalt ausreicht. Ein Liter reicht für vier Quadratmeter.

Lösung: Zunächst wird die Frontfläche in ein Rechteck und ein Dreieck zerlegt. Ist diese Frontfläche bestimmt, müssen die Flächen von Fenster und Tür davon subtrahiert werden.

Beginnen wir mit der Rechteckfläche. Ich nenne sie $A_\square$.

$$A_\square = a \cdot b = 4\,\mathrm{m} \cdot 5\,\mathrm{m} = 20\,\mathrm{m}^2$$

Es folgt die Dreieckfläche $A_\triangle$. Die Grundseite des Dreieckes ist die Frontbreite mit $g = 5\,\mathrm{m}$. Die Dreieckhöhe h ist die Differenz aus der Fronthöhe in der Mitte und der Fronthöhe am Rand.

$$h = 6\,\mathrm{m} - 4\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{m}$$

$$A_\triangle = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{5\,\mathrm{m} \cdot 2\,\mathrm{m}}{2} = 5\,\mathrm{m}^2$$

Zusammengesetzt ergibt das die gesamte Frontfläche A_{Fr}.

$$A_{Fr} = A_\square + A_\triangle = 20\,\mathrm{m}^2 + 5\,\mathrm{m}^2 = 25\,\mathrm{m}^2$$

Es folgt die Berechnung der Türfläche A_T.

$$A_T = a \cdot b = 1\,\mathrm{m} \cdot 2\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{m}^2$$

Jetzt wird die Fläche eines Fensters A_{Fe} berechnet. Hierzu muss die Fensterhöhe von 90 Zentimetern noch in Meter umgewandelt werden.

$$A_{Fe} = a \cdot b = 1{,}80\,\mathrm{m} \cdot 0{,}90\,\mathrm{m} = 1{,}62\,\mathrm{m}^2$$

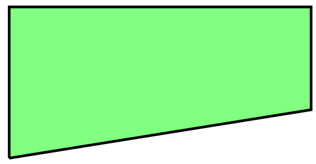
Damit kann die gesamte zu streichende Fläche berechnet werden.

$$A_{ges} = A_{Fr} - A_T - 2 \cdot A_{Fe} = 25\,\mathrm{m}^2 - 2\,\mathrm{m}^2 - 2 \cdot 1{,}62\,\mathrm{m}^2 = 19{,}76\,\mathrm{m}^2$$

Ergebnis: Ein Eimer mit 5 Litern zu je $4\,\mathrm{m}^2$ reicht für $5 \cdot 4\,\mathrm{m}^2 = 20\,\mathrm{m}^2$. Also reicht ein Eimer (knapp) aus.

5.3 Aufgabe 3

Nebenstehend ist eine Rasenfläche auf einem Grundstück dargestellt. Die Rasenfläche hat eine Gesamtlänge von 36 Metern. Auf der Westseite ist es 15 Meter und auf der Ostseite 10 Meter breit. Die Grundstücksecken an der Nordseite stellen Rechte Winkel dar. Wie lange benötigt der Gärtner für das Mähen der Rasenfläche, wenn er in 6 Minuten eine Fläche von 50 Quadratmetern mähen kann?



Lösung: Zunächst wird die Rasenfläche berechnet. Sie hat die Form eines Trapezes. Die parallelen Seiten, die die Grundseiten g_1 und g_2 darstellen, sind die westliche und die östliche Begrenzung mit 15 und 10 Metern Länge. Die Länge der Nordseite mit 36 Metern Länge ist dann die Höhe h des Trapezes.

$$A = \frac{g_1 + g_2}{2} \cdot h = \frac{15\,\text{m} + 10\,\text{m}}{2} \cdot 36\,\text{m} = 450\,\text{m}^2$$

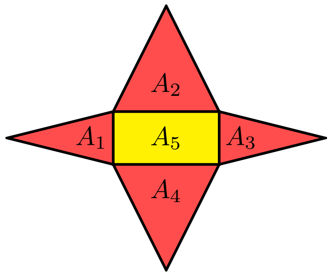
Die Zeit für die Mäharbeit kann mit einem Dreisatz berechnet werden.[1]

$$\begin{array}{rrcll}
 & 50\,\text{m}^2 & \hat{=} & 6\,\text{min} & \\
 & 450\,\text{m}^2 & \hat{=} & ?\,\text{min} & \\
\hline
 & 50\,\text{m}^2 & \hat{=} & 6\,\text{min} & \\
:50 \downarrow & 1\,\text{m}^2 & \hat{=} & \dfrac{6\,\text{min}}{50} & \downarrow :50 \\
\cdot 450 \downarrow & 450\,\text{m}^2 & \hat{=} & \dfrac{6\,\text{min} \cdot 450}{50} = 54\,\text{min} & \downarrow \cdot 450
\end{array}$$

Ergebnis: Der Gärtner benötigt zum Mähen der Rasenfläche 54 Minuten.

[1]Näheres zum Dreisatz siehe hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/3satz.pdf

5.4 Aufgabe 4



Nebenstehendes Muster soll als Weihnachtsdekoration aus farbigem Karton hergestellt werden. Die Dreiecke sollen rotfarbig sein, das Rechteck gelb. Damit dieser Weihnachtsstern zusammenhält, wird zunächst die Gesamtfigur aus rotem Karton ausgeschnitten. Anschließend wird das gelbe Rechteck aufgeklebt. Das Rechteck ist 20 Zentimeter lang und 10 Zentimeter breit. Alle Dreiecke sind gleichschenklig und haben eine Höhe von je 20 Zentimeter. Der verwendete Karton hat ein Gewicht von 250 Gramm je Quadratmeter. Wieviel Gramm wiegt der fertige Weihnachtsstern?

Lösung: Zunächst werden alle Teilflächen bezeichnet, beispielsweise wie hier durch Hineinschreiben eines passenden Namens. Die Flächen A_1 und A_3 sind identisch, ebenso die Flächen A_2 und A_4. Somit gibt es **drei unterschiedliche** Flächen, die berechnet werden müssen.

Berechnung eines kleinen Dreieckes:

$$A_1 = A_3 = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{10\,\mathrm{cm} \cdot 20\,\mathrm{cm}}{2} = 100\,\mathrm{cm}^2$$

Berechnung eines großen Dreieckes:

$$A_2 = A_4 = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{20\,\mathrm{cm} \cdot 20\,\mathrm{cm}}{2} = 200\,\mathrm{cm}^2$$

Berechnung des Rechteckes:

$$A_5 = a \cdot b = 20\,\mathrm{cm} \cdot 10\,\mathrm{cm} = 200\,\mathrm{cm}^2$$

Gesamtfläche Rot:

$$A_{rot} = 2 \cdot A_1 + 2 \cdot A_2 + A_5 = 2 \cdot 100\,\mathrm{cm}^2 + 2 \cdot 200\,\mathrm{cm}^2 + 200\,\mathrm{cm}^2 = 800\,\mathrm{cm}^2$$

Gesamtfläche alle Pappe:

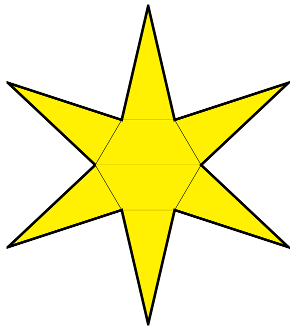
$$A_{ges} = A_{rot} + A_5 = 800\,\mathrm{cm}^2 + 200\,\mathrm{cm}^2 = 1\,000\,\mathrm{cm}^2 = 0{,}1\,\mathrm{m}^2$$

Gesamtgewicht:

$$m = 0{,}1\,\mathrm{m}^2 \cdot 250\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^2} = 25\,\mathrm{g}$$

Ergebnis: Der Pappstern wiegt 25 Gramm.

5.5 Aufgabe 5



Nebenstehender Stern soll aus einem DIN-A4-Blatt ausgeschnitten werden. Ein DIN-A4-Blatt ist 210 Millimeter breit und 297 Millimeter lang.
Der Stern besteht aus einem regelmäßigen Sechseck in der Mitte und sechs gleichen Gleichschenkligen Dreiecken darum herum. Das Sechseck hat eine Seitenlänge von je 4 Zentimetern. Der Abstand von je zwei sich gegenüberliegenden Seiten beträgt 6,9 Zentimeter, die Entfernung zweier sich gegenüberliegenden Ecken 8 Zentimeter. Alle Dreiecke haben eine eine Höhe von 8,6 Zentimetern.
Wieviel Prozent Verschnitt ergibt sich durch das Ausschneiden aus einem DIN-A4-Blatt?

Lösung: Es müssen zwei verschiedene Flächenformen berechnet werden, ein Sechseck und 6 gleiche Dreiecke. Beginnen wir mit dem Sechseck. Da wir keine Formel für ein Rechteck haben, muss diese Fläche in berechenbare Teilflächen zerlegt werden. Eine von mehreren Möglichkeiten ist hier angedeutet – eine Zerlegung in zwei Trapeze. Eine Trapezfläche nenne ich A_T.

$$A_T = \frac{g_1 + g_2}{2} \cdot h = \frac{4\,\mathrm{cm} + 8\,\mathrm{cm}}{2} \cdot 3{,}45\,\mathrm{cm} = 20{,}7\,\mathrm{cm}^2$$

Eine Dreieckfläche nenne ich $A_\triangle$.

$$A_\triangle = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{4\,\mathrm{cm} \cdot 8{,}6\,\mathrm{cm}}{2} = 17{,}2\,\mathrm{cm}^2$$

Damit kann die Gesamtfläche des Sterns A_S berechnet werden.

$$A_S = 2 \cdot A_T + 6 \cdot A_\triangle = 2 \cdot 20{,}7\,\mathrm{cm}^2 + 6 \cdot 17{,}2\,\mathrm{cm}^2 = 144{,}6\,\mathrm{cm}^2$$

Die Gesamtfläche eines DIN-A4-Blattes A_D wird berechnet:

$$A_D = 21\,\mathrm{cm} \cdot 29{,}7\,\mathrm{cm} = 623{,}7\,\mathrm{cm}^2$$

Die Fläche des Verschnittes A_V wird berechnet:

$$A_V = A_D - A_S = 623{,}7\,\mathrm{cm}^2 - 144{,}6\,\mathrm{cm}^2 = 479{,}1\,\mathrm{cm}^2$$

Der Verschnitt wird in Prozent[2] berechnet:

$$P_s = \frac{P_w \cdot 100\,\%}{G} = \frac{479{,}1\,\mathrm{cm}^2 \cdot 100\,\%}{623{,}7\,\mathrm{cm}^2} = 76{,}8\,\%$$

Ergebnis: Der Verschnitt beträgt 76,8 Prozent.

[2] Näheres zur Prozentrechnung siehe hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/prozent.pdf