Aufstellen einer Funktionsgleichung nach vorgegebenen Eigenschaften

W. Kippels

4. März 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen **3**
1.1 Prinzipielle Vorgehensweise . . . 3
1.2 Lösungsrezepte . . . 6

2 Übungsaufgaben **9**
2.1 Aufgabe 1 . . . 9
2.2 Aufgabe 2 . . . 9
2.3 Aufgabe 3 . . . 9
2.4 Aufgabe 4 . . . 9
2.5 Aufgabe 5 . . . 9
2.6 Aufgabe 6 . . . 9
2.7 Aufgabe 7 . . . 10
2.8 Aufgabe 8 . . . 10
2.9 Aufgabe 9 . . . 10
2.10 Aufgabe 10 . . . 10
2.11 Aufgabe 11 . . . 10
2.12 Aufgabe 12 . . . 10

3 Ergebnisse **11**
3.1 Aufgabe 1 . . . 11
3.2 Aufgabe 2 . . . 11
3.3 Aufgabe 3 . . . 11
3.4 Aufgabe 4 . . . 11
3.5 Aufgabe 5 . . . 11
3.6 Aufgabe 6 . . . 11
3.7 Aufgabe 7 . . . 11
3.8 Aufgabe 8 . . . 11

3.9 Aufgabe 9 11
3.10 Aufgabe 10 11
3.11 Aufgabe 11 12
3.12 Aufgabe 12 12

4 Lösungsansätze mit durchgerechneten Lösungen 13
4.1 Aufgabe 1 13
4.2 Aufgabe 2 15
4.3 Aufgabe 3 17
4.4 Aufgabe 4 19
4.5 Aufgabe 5 20
4.6 Aufgabe 6 21
4.7 Aufgabe 7 23
4.8 Aufgabe 8 24
4.9 Aufgabe 9 25
4.10 Aufgabe 10 27
4.11 Aufgabe 11 29
4.12 Aufgabe 12 31

1 Grundlagen

1.1 Prinzipielle Vorgehensweise

Sucht man eine Funktionsgleichung zu einer Funktion, von der man einige Eigenschaften kennt, dann rollt man sozusagen eine Kurvendiskussion[1] von hinten auf. Man schreibt sich zweckmäßigerweise den gesuchten Funktionstyp in Normalform auf und bildet – so weit erforderlich – auch gleich die Ableitungen. Am besten lässt sich das an einem Beispiel erklären.

Unser Beispiel hat folgende Aufgabenstellung:

> **Ein Polynom dritten Grades hat einen Hochpunkt bei H(1|5) und einen Wendepunkt bei W(2|1). Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung?**

Wir stellen zunächst die Funktionsgleichung eines Polynomes dritten Grades in Normalform auf:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Da von einem Hochpunkt und von einem Wendepunkt die Rede ist, benötigen wir die erste und zweite Ableitung:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) &= 6ax + 2b \end{aligned}$$

Jetzt müssen die Angaben in Gleichungen geformt werden. Zur Bestimmung der **vier** Parameter a, b, c und d benötigt man **vier** Gleichungen.

Bekannt ist, dass der Funktionsgraph durch den Punkt $H(1|5)$ verläuft. Das bedeutet, dass wir den y-Wert 5 erhalten, wenn x den Wert 1 ist. In Gleichungsform sieht das dann so aus:

$$f(1) = 5 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 5$$

Außerdem wissen wir noch, dass beim x-Wert von 1 ein **Hochpunkt** vorliegt. Das bedeutet, dass hier die **erste Ableitung Null** sein muss.

$$f'(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 0$$

Damit haben wir alle Angaben zum ersten Punkt umgesetzt.

Ähnlich geht es nun beim zweiten Punkt weiter. Wir wissen, dass bei $x_w = 2$ der y-Wert $y_w = 1$ vorliegt. Daraus machen wir wieder eine Gleichung:

$$f(2) = 1 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 1$$

[1] Einzelheiten zu Kurvendiskussionen siehe hier: http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/kudisk.pdf

Außerdem wissen wir noch, dass die Funktion bei diesem x-Wert eine besondere Eigenschaft hat. Hier liegt ein **Wendepunkt** vor. Das bedeutet, dass die zweite Ableitung hier Null sein muss. Das formen wir in eine Gleichung um:

$$f''(2) \; = \; 0 \; \Rightarrow \; 6a \cdot 2 + 2b \; = \; 0$$

Damit haben wir die vier benötigten Bedingungen mit den zugehörigen Gleichungen beisammen. Hier stelle ich sie noch einmal (mit einer Nummerierung) zusammen dar:

$$\begin{array}{rrcccrcl}
(1) & f(1) & = & 5 & \Rightarrow & a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d & = & 5 \\
(2) & f'(1) & = & 0 & \Rightarrow & 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c & = & 0 \\
(3) & f(2) & = & 1 & \Rightarrow & a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d & = & 1 \\
(4) & f''(2) & = & 0 & \Rightarrow & 6a \cdot 2 + 2b & = & 0
\end{array}$$

Die vier Gleichungen rechts der Implikationspfeile $\Rightarrow$ stellen das zu lösende Gleichungssystem dar. Etwas zusammengefasst sieht dieses Lineargleichungssystem vierter Ordnung so aus:

$$\boxed{\begin{array}{lrrrrcr}
(1) & a & +b & +c & +d & = & 5 \\
(2) & 3a & +2b & +c & & = & 0 \\
(3) & 8a & +4b & +2c & +d & = & 1 \\
(4) & 12a & +2b & & & = & 0
\end{array}}$$

Das Gleichungssystem kann nun mit einem beliebigen Lösungsverfahren[2] gelöst werden. Es bietet sich an, die Gleichungen (1) und (3) voneinander zu subtrahieren, da dies die einzigen Gleichungen sind, in denen der Parameter d vorkommt. c fällt dann weg.

$$\begin{array}{lrrrrcrl}
(1) & a & +b & +c & +d & = & 5 & |- \\
(3) & 8a & +4b & +2c & +d & = & 1 & | \\
\hline
(5) & 7a & +3b & +c & & = & -4 &
\end{array}$$

Gleichung (5) stellt mit (2) und (4) nun ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung dar.

$$\boxed{\begin{array}{lrrrcr}
(2) & 3a & +2b & +c & = & 0 \\
(4) & 12a & +2b & & = & 0 \\
(5) & 7a & +3b & +c & = & -4
\end{array}}$$

Auch für den nächsten Reduktionsschritt bietet sich das Additions-/Subtraktionsverfahren an, denn c kommt nur in (2) und (5) vor. Man kann (2) und (5) voneinander subtrahieren.

$$\begin{array}{lrrrcrl}
(2) & 3a & +2b & +c & = & 0 & |- \\
(5) & 7a & +3b & +c & = & -4 & | \\
\hline
(6) & 4a & +b & & = & -4 &
\end{array}$$

Mit den Gleichungen (4) und (6) haben wir jetzt ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung erhalten.

$$\boxed{\begin{array}{lrrcr}
(4) & 12a & +2b & = & 0 \\
(6) & 4a & +b & = & -4
\end{array}}$$

[2]Einzelheiten zu möglichen Lösungsverfahren siehe hier: http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/lingl.pdf

Um das Gleichungssystem mit Hilfe des Additions-/Subtraktionsverfahrens zu lösen dividiere ich Gleichung (4) durch 2. Dann kann man die Gleichungen voneinander subtrahieren, so dass b wegfällt.

$$\begin{array}{crrcrl}
(4) & 12a & +2b & = & 0 & |:2 \\
(6) & 4a & +b & = & -4 & \\
\hline
(4) & 6a & +b & = & 0 & | \\
(6) & 4a & +b & = & -4 & |- \\
\hline
 & 2a & & = & 4 & |:2 \\
 & a & & = & 2 &
\end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in (6) ein, um b zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
4a+b &= -4 \\
4\cdot 2+b &= -4 \\
8+b &= -4 \qquad |-8 \\
b &= -12
\end{aligned}$$

Die beiden Werte setze ich in (1) ein und erhalte c.

$$\begin{aligned}
3a+2b+c &= 0 \\
3\cdot 2+2\cdot(-12)+c &= 0 \\
6-24+c &= 0 \\
-18+c &= 0 \qquad |+18 \\
c &= 18
\end{aligned}$$

Jetzt fehlt nur noch der Parameter d. Zur Bestimmung setze ich die bekannten Werte in (1) ein.

$$\begin{aligned}
a+b+c+d &= 5 \\
2-12+18+d &= 5 \\
8+d &= 5 \qquad |-8 \\
d &= -3
\end{aligned}$$

Hiermit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $\boxed{f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 3}$

Fassen wir die Schrite, die zur Lösung geführt haben, noch einmal im Überblick zusammen.

- Aufstellen der allgemeinen Funktionsgleichung in Normalform
- Bilden der Ableitungen, so weit erforderlich
- Angaben in der Aufgabenstellungen in Gleichungen formen – ein Lineargleichungssystem entsteht
- Lösen des Lineargleichungssystemes mit beliebigen Verfahren
- Angabe der konkreten Lösungsfunktion

1.2 Lösungsrezepte

Speziell das Umformen der Angaben im Text zu Gleichungen dürfte dem einen oder anderen Probleme machen. Deshalb möchte ich hier „kochbuchartig" eine Anleitung zusammenstellen. Um das Ganze etwas anschaulicher zu machen, führe ich die Schritte am Beispiel eines Polynoms 4. Grades vor. Dazu müssen wir vorweg die Funktion in Normalform sowie drei Ableitungen aufstellen.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\ f'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \\ f''(x) &= 12ax^2 + 6bx + 2c \\ f'''(x) &= 24ax + 6b \end{aligned}$$

Ein Punkt ist bekannt: Gegeben sei $P(x_p|y_p)$. In diesem Fall stellt der y-Wert des Punktes den Funktionswert bei x_p dar:

$$f(x_p) = y_p$$

Für $P(3|5)$ als Beispiel ergibt sich:

$$f(3) = 5 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 3^4 + b \cdot 3^3 + c \cdot 3^2 + d \cdot 3 + e = 5$$

Hierbei spielt es keine Rolle, ob es sich bei dem gegebenen Punkt um einen Wendepunkt, einen Hoch- oder Tiefpunkt oder einen beliebigen Punkt handelt. Auch eine gegebene Nullstelle ist ein Punkt, denn dort ist der y-Wert mit $y_p = 0$ ja bekannt.

Ein Hoch- oder Tiefpunkt ist bekannt: Der Extremwert liege bei $x = x_E$. Hier ist immer die erste Ableitung Null, da die zugehörige Tangente an die Kurve waagerecht verläuft. Der Ansatz lautet also:

$$f'(x_E) = 0$$

Im Beispiel liege der Extrempunkt bei $x_E = 3$. Dann sieht der Ansatz folgendermaßen aus:

$$f'(3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4a \cdot 3^3 + 3b \cdot 3^2 + 2c \cdot 3 + d = 0$$

Achtung! Ist der Extrempunkt mit **beiden Koordinaten** bekannt, dann erfolgt **zusätzlich** die Behandlung als allgemeiner Punkt wie vorstehend beschrieben.

Ein Wendepunkt ist bekannt: Der Wendepunkt liege bei $x = x_W$. Im Wendepunkt ist bekanntlich immer die zweite Ableitung Null, da sich hier die Krümmungsrichtung ändert. Der Ansatz lautet also:

$$f''(x_W) = 0$$

Im Beispiel liege der Wendepunkt bei $x_W = 3$. Dann sieht der Ansatz folgendermaßen aus:

$$f''(3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 12a \cdot 3^2 + 6b \cdot 3 + 2c = 0$$

Achtung! Ist der Wendepunkt mit **beiden Koordinaten** bekannt, dann erfolgt **zusätzlich** die Behandlung als allgemeiner Punkt wie weiter oben beschrieben.

Ein Sattelpunkt ist bekannt: Der Sattelpunkt liege bei $x = x_S$. In einem Sattelpunkt ist bekanntlich sowohl die erste als auch die zweite Ableitung Null. Daraus erhalten wir also gleich **zwei** Bedingungen mit den zugehörigen Ansätzen:

$$\begin{aligned} f'(x_S) &= 0 \\ f''(x_S) &= 0 \end{aligned}$$

Im Beispiel liege der Sattelpunkt bei $x_S = 3$. Dann sehen die Ansätze folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{rcrcrcl} f'(3) & = & 0 & \Rightarrow & 4a \cdot 3^3 + 3b \cdot 3^2 + 2c \cdot 3 + d & = & 0 \\ f''(3) & = & 0 & \Rightarrow & 12a \cdot 3^2 + 6b \cdot 3 + 2c & = & 0 \end{array}$$

Achtung! Ist der Sattelpunkt mit **beiden Koordinaten** bekannt, dann erfolgt **zusätzlich** die Behandlung als allgemeiner Punkt wie weiter oben beschrieben.

Ein Flachpunkt ist bekannt: Der Flachpunkt liege bei $x = x_F$. In einem Flachpunkt ist bekanntlich sowohl die zweite als auch die dritte Ableitung Null. Daraus erhalten wir aiso gleich **zwei** Bedingungen mit den zugehörigen Ansätzen:

$$\begin{aligned} f''(x_F) &= 0 \\ f'''(x_F) &= 0 \end{aligned}$$

Im Beispiel liege der Flachpunkt bei $x_F = 3$. Dann sehen die Ansätze folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{rcrcrcl} f''(3) & = & 0 & \Rightarrow & 12a \cdot 3^2 + 6b \cdot 3 + 2c & = & 0 \\ f'''(3) & = & 0 & \Rightarrow & 24a \cdot 3 + 6b & = & 0 \end{array}$$

Achtung! Ist der Flachpunkt mit **beiden Koordinaten** bekannt, dann erfolgt **zusätzlich** die Behandlung als allgemeiner Punkt wie weiter oben beschrieben.

Eine Tangentengleichung ist bekannt: Eine Tangente erfüllt bekanntlich zwei Bedingungen:

- Tangente und Kurve verlaufen im Berührpunkt beide durch einen gemeinsamen Punkt. Die Funktionswerte sind also gleich.
- Tangente und Kurve verlaufen beide im Berührpunkt parallel, also mit der gleichen Steigung. Die Ableitungen sind daher gleich.

Daraus kann man zwei Bedingungen mit zwei Gleichungen ableiten. Wenn die Tangentengleichung $f_1(x)$ heißt und der Berührpunkt bei $x = x_B$ liegt, lauten diese:

$$\begin{aligned} f(x_B) &= f_1(x_B) \\ f'(x_B) &= f_1'(x_B) \end{aligned}$$

In unserem Beispiel laute die Tangentengleichung $f_1(x) = 2x + 4$. Der Berührpunkt liege bei $x_B = 3$. Dann sehen die Ansätze folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{rcrcrcl} f(3) & = & f_1(3) & \Rightarrow & a \cdot 3^4 + b \cdot 3^3 + c \cdot 3^2 + d \cdot 3 + e & = & 2 \cdot 3 + 4 \\ f'(3) & = & f_1'(3) & \Rightarrow & 4a \cdot 3^3 + 3b \cdot 3^2 + 2c \cdot 3 + d & = & 2 \end{array}$$

Die Funktion ist spiegelsymmetrisch zur y-Achse: Spiegelsymmetrie zur y-Achse bedeutet: $f(x) = f(-x)$. Ist die Funktion ein Polynom, dann bedeutet das, dass alle Potenzen von x mit einem **ungeraden** Exponenten wegfallen. Man kann auch sagen: Die zugehörigen Koeffizienten sind Null. Unsere Beispielfunktion sieht dann so aus:

$$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$$

Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung: Punktsymmetrie bedeutet: $f(x) = -f(-x)$. Ist die Funktion ein Polynom, dann bedeutet das, dass alle Potenzen von x mit einem **geraden** Exponenten wegfallen. Man kann auch sagen: Die zugehörigen Koeffizienten sind Null. Unsere Beispielfunktion sieht dann so aus:

$$f(x) = bx^3 + dx$$

Anmerkung: Diese Funktion wäre dann allerdings kein Polynom vierten, sondern nur noch dritten Grades. Ein echtes Polynom vierten Grades kann nicht punktsymmetrisch sein.

Mit dieser Anleitung sollte es eigentlich möglich sein, die nachfolgenden Übungsaufgaben zu lösen.

2 Übungsaufgaben

Im nächsten Kapitel stehen die zugehörigen Ergebnisse. Durchgerechnete Lösungen mit Lösungsweg sind im übernächsten Kapitel zu finden.

2.1 Aufgabe 1

Ein Polynom 3. Grades hat eine Nullstelle bei $x_0 = 1$ und einen Wendepunkt bei $x_w = -1$. Die Gleichung der Wendetangente lautet $f_2(x) = -9x + 1$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms $f_1(x)$!

2.2 Aufgabe 2

Ein Polynom 3. Grades hat einen Tiefpunkt bei $T(5|-12,5)$ und einen Hochpunkt bei $H(1|3,5)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms $f(x)$!

2.3 Aufgabe 3

Ein Polynom 3. Grades hat einen Hochpunkt bei $H(-1|8)$. Bei $x = 1$ lässt sich die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = -4x + 4$ als Tangente an den Graphen der gesuchten Funktion $f_1(x)$ legen. Bestimmen Sie diese Funktionsgleichung!

2.4 Aufgabe 4

Ein Polynom 3. Grades berührt bei $x_1 = -2$ die Tangente mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = -8x - 15$. Der Funktionsgraph schneidet die y-Achse bei $y_0 = 1$. Dort beträgt die Steigung $m = 16$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$!

2.5 Aufgabe 5

Ein Polynom 4. Grades ist spiegelsymmetrisch zur y-Achse. Bei $x_w = -1$ hat sie eine Wendetangente mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 8x + 6$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$!

2.6 Aufgabe 6

Ein Polynom 5. Grades ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Der Graph der Funktion hat einen Hochpunkt bei $H(2|48)$ und schneidet die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 5x + 19$ an der Stelle $x_s = 1$. Wie lautet die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der gesuchten Funktion?

2.7 Aufgabe 7

Ein Polynom 4. Grades hat einen Sattelpunkt bei $S(0|4)$. Bei $x_b = 2$ berührt sie die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 4x - 8$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der gesuchten Funktion!

2.8 Aufgabe 8

Ein Polynom 2. Grades (eine Parabel) berührt die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = -2x + 4$ in ihrem Schnittpunkt mit der y-Achse. Eine andere Parabel mit der Funktionsgleichung $f_3(x) = 2x^2 + 3x - 1$ schneidet die gesuchte Parabel bei $x_s = 2$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der gesuchten Parabel!

2.9 Aufgabe 9

Ein Polynom 3. Grades mit der Funktionsgleichung $f_1(x)$ schneidet die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = x^2 + 4x - 4$ bei $x_1 = -1$, bei $x_2 = 2$ und bei $x_3 = 5$. Außerdem hat der Graph der gesuchten Funktion einen Hochpunkt bei $x_h = 1$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der gesuchten Funktion!

2.10 Aufgabe 10

Ein Polynom 3. Grades hat eine Nullstelle bei $x_0 = 0$ und einen Wendepunkt bei $x_w = 1$. Die Gleichung der Wendetangente lautet $f_2(x) = -9x + 1$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms $f_1(x)$!

2.11 Aufgabe 11

Ein Polynom 4. Grades hat einen Sattelpunkt bei $S(0|1)$ und einen Wendepunkt bei $W(2|-15)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ der gesuchten Funktion!

2.12 Aufgabe 12

Ein Polynom 4. Grades hat einen Tiefpunkt bei $x_E = 0{,}5$ und einen Sattelpunkt bei $S(2|0)$. Außerdem ist noch bekannt, dass der Funktionsgraph durch den Punkt $P(3|3)$ verläuft. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ der gesuchten Funktion!

3 Ergebnisse

(Die erforderlichen Lösungsansätze mit komplettem Lösungsweg finden Sie bei Bedarf auf den nächsten Seiten.)

3.1 Aufgabe 1

$f_1(x) = x^3 + 3x^2 - 6x + 2$

3.2 Aufgabe 2

$f(x) = 0,5x^3 - 4,5x^2 + 7,5x$

3.3 Aufgabe 3

$f_1(x) = x^3 - x^2 - 5x + 5$

3.4 Aufgabe 4

$f_1(x) = 2x^3 + 12x^2 + 16x + 1$

3.5 Aufgabe 5

$f_1(x) = x^4 - 6x^2 + 3$

3.6 Aufgabe 6

$f_1(x) = -x^5 + 5x^3 + 20x$

3.7 Aufgabe 7

$f_1(x) = 1,25x^4 - 3x^3 + 4$

3.8 Aufgabe 8

$f_1(x) = 3,25x^2 - 2x + 4$

3.9 Aufgabe 9

$f_1(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + 6$

3.10 Aufgabe 10

$f_1(x) = x^3 - 3x^2 - 6x$

3.11 Aufgabe 11

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$

3.12 Aufgabe 12

$f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$

4 Lösungsansätze mit durchgerechneten Lösungen

4.1 Aufgabe 1

Ein Polynom 3. Grades hat eine Nullstelle bei $x_0 = 1$ und einen Wendepunkt bei $x_w = -1$. Die Gleichung der Wendetangente lautet $f_2(x) = -9x + 1$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms $f_1(x)$!

$$\begin{aligned} f_1(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f_1'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f_1''(x) &= 6ax + 2b \end{aligned}$$

Nullstelle bei $x_0 = 1$:	$f_1(1) = 0$	$\Rightarrow a + b + c + d = 0$
Wendep. bei $x_w = -1$:	$f_1''(-1) = 0$	$\Rightarrow -6a + 2b = 0$
Steig. am Wendep. $x_w = -1$:	$f_1'(-1) = f_2'(-1) = -9$	$\Rightarrow 3a - 2b + c = -9$
Funktionsw. am Wendep. $x_w = -1$:	$f_1(-1) = f_2(-1) = 10$	$\Rightarrow -a + b - c + d = 10$

Zusammengefasst sieht unser Gleichungssystem so aus:

$$\boxed{\begin{array}{lrrrrcr} (1) & a & +b & +c & +d & = & 0 \\ (2) & -6a & +2b & & & = & 0 \\ (3) & 3a & -2b & +c & & = & -9 \\ (4) & -a & +b & -c & +d & = & 10 \end{array}}$$

Der Parameter d kommt nur in den Gleichungen (1) und (4) vor. Ich subtrahiere Gleichung (4) von Gleichung (1), damit d wegfällt. Die neue Gleichung nenne ich (5).

$$\begin{array}{lrrrrcrl} (1) & a & +b & +c & +d & = & 0 & | \\ (4) & -a & +b & -c & +d & = & 10 & |- \\ \hline (5) & 2a & & +2c & & = & -10 & \end{array}$$

Zusammen mit den Gleichungen (2) und (3) bleibt jetzt ein Gleichungssystem 3. Ordnung übrig.

$$\boxed{\begin{array}{lrrrcr} (5) & 2a & & +2c & = & -10 \\ (2) & -6a & +2b & & = & 0 \\ (3) & 3a & -2b & +c & = & -9 \end{array}}$$

Als nächstes möchte ich den Parameter c eleminieren. Das bietet sich an, da er nur zweimal vorkommt. Dazu halbiere ich Gleichung (5) und subtrahiere davon Gleichung (3).

$$\begin{array}{lrrrcrl} (5) & 2a & & +2c & = & -10 & |:2 \\ (3) & 3a & -2b & +c & = & -9 & \\ \hline (5) & a & & +c & = & -5 & | \\ (3) & 3a & -2b & +c & = & -9 & |- \\ \hline (6) & -2a & +2b & & = & 4 & \end{array}$$

Jetzt habe ich noch die Gleichungen (6) und (2) übrig behalten.

$$\boxed{\begin{array}{rrrrr} (2) & -6a & +2b & = & 0 \\ (6) & -2a & +2b & = & 4 \end{array}}$$

Ich subtrahiere Gleichung (2) von (6), damit b wegfällt.

$$\begin{array}{rrrrrl} (2) & -6a & +2b & = & 0 & |- \\ (6) & -2a & +2b & = & 4 & | \\ \hline & 4a & & = & 4 & |:4 \\ & a & & = & 1 & \end{array}$$

Damit ist der erste Parameter bekannt. Mit dem Ergebnis und Gleichung (2) bestimme ich b.

$$\begin{array}{rcll} -6a+2b & = & 0 & \\ -6\cdot 1+2b & = & 0 & \\ -6+2b & = & 0 & |+6 \\ 2b & = & 6 & |:2 \\ b & = & 3 & \end{array}$$

Der Parameter c kann nun mit Gleichung (3) bestimmt werden.

$$\begin{array}{rcll} 3a-2b+c & = & -9 & \\ 3\cdot 1-2\cdot 3+c & = & -9 & \\ -3+c & = & -9 & |+3 \\ c & = & -6 & \end{array}$$

Zum Schluss muss noch d bestimmt werden. Dafür verwende ich Gleichung (1).

$$\begin{array}{rcll} a+b+c+d & = & 0 & \\ 1+3-6+d & = & 0 & \\ -2+d & = & 0 & |+2 \\ d & = & 2 & \end{array}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $\boxed{f_1(x)=x^3+3x^2-6x+2}$

4.2 Aufgabe 2

Ein Polynom 3. Grades hat einen Tiefpunkt bei $T(5|-12,5)$ und einen Hochpunkt bei $H(1|3,5)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms $f(x)$!

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \end{aligned}$$

Tiefpunkt bei $x_t = 5$: $f'(5) = 0 \Rightarrow 75a + 10b + c = 0$
Funktionswert am Tiefpunkt $x_t = 5$: $f(5) = -12,5 \Rightarrow 125a + 25b + 5c + d = -12,5$
Hochpunkt bei $x_h = 1$: $f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$
Funktionswert am Hochpunkt $x_h = 1$: $f(1) = 3,5 \Rightarrow a + b + c + d = 3,5$

Wir haben ein Lineargleichungssystem 4. Ordnung erhalten.

$$\boxed{\begin{array}{lrrrrcl} (1) & 75a & +10b & +c & & = & 0 \\ (2) & 125a & +25b & +5c & +d & = & -12,5 \\ (3) & 3a & +2b & +c & & = & 0 \\ (4) & a & +b & +c & +d & = & 3,5 \end{array}}$$

Man erkennt sofort, dass der Parameter d nur in zwei Gleichungen – (2) und (4) – vorkommt. Da jeweils d allein auftritt, können die Gleichungen sofort voneinander subtrahiert werden.

$$\begin{array}{lrrrrcll} (2) & 125a & +25b & +5c & +d & = & -12,5 & | \\ (4) & a & +b & +c & +d & = & 3,5 & | \ - \\ \hline (5) & 124a & +24b & +4c & & = & -16 & \end{array}$$

Mit dieser Gleichung (5) anstelle von (2) und (4) bleibt ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung übrig.

$$\boxed{\begin{array}{lrrrcl} (1) & 75a & +10b & +c & = & 0 \\ (3) & 3a & +2b & +c & = & 0 \\ (5) & 124a & +24b & +4c & = & -16 \end{array}}$$

Zur Vereinfachung kann Gleichung (5) noch durch 4 dividiert werden.

$$\boxed{\begin{array}{lrrrcl} (1) & 75a & +10b & +c & = & 0 \\ (3) & 3a & +2b & +c & = & 0 \\ (5) & 31a & +6b & +c & = & -4 \end{array}}$$

Jetzt sind alle Koeffizienten von c gleich. Daher bietet sich das Additions-/Subtraktionsverfahren an. Zunächst subtrahiere ich Gleichung (3) von Gleichung (1).

$$\begin{array}{lrrrcll} (1) & 75a & +10b & +c & = & 0 & | \\ (3) & 3a & +2b & +c & = & 0 & | \ - \\ \hline (6) & 72a & +8b & & = & 0 & \end{array}$$

Dann subtrahiere ich Gleichung (5) von Gleichung (1).

$$\begin{array}{llllll|l} (1) & 75a & +10b & +c & = & 0 & \\ (5) & 31a & +6b & +c & = & -4 & - \\ \hline (7) & 44a & +4b & & = & 4 & \end{array}$$

Gleichung (6) und (7) stellen nun ein Lineargleichungssystem 4. Ordnung dar.

$$\boxed{\begin{array}{lllll} (6) & 72a & +8b & = & 0 \\ (7) & 44a & +4b & = & 4 \end{array}}$$

Beide Gleichungen können noch etwas vereinfacht werden. Gleichung (6) lässt sich durch 8 dividieren und Gleichung (7) durch 4.

$$\boxed{\begin{array}{lrlll} (6) & 9a & +b & = & 0 \\ (7) & 11a & +b & = & 1 \end{array}}$$

In dieser Form lassen sich die Gleichungen voneinander subtrahieren, so dass b wegfällt.

$$\begin{array}{lrllll|l} (6) & 9a & +b & = & 0 & & - \\ (7) & 11a & +b & = & 1 & & \\ \hline & 2a & & = & 1 & & :2 \\ & a & & = & 0,5 & & \end{array}$$

Dieses Ergebnis setze ich in Gleichung (6) ein.

$$\begin{aligned} 9a + b &= 0 \\ 9 \cdot 0,5 + b &= 0 \quad | -4,5 \\ b &= -4,5 \end{aligned}$$

Diese Ergebnisse setze ich in Gleichung (3) ein.

$$\begin{aligned} 3a + 2b + c &= 0 \\ 3 \cdot 0,5 + 2 \cdot (-4,5) + c &= 0 \\ -7,5 + c &= 0 \quad | +7,5 \\ c &= 7,5 \end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $\boxed{f(x) = 0,5x^3 - 4,5x^2 + 7,5x}$

4.3 Aufgabe 3

Ein Polynom 3. Grades hat einen Hochpunkt bei $H(-1|8)$. Bei $x = 1$ lässt sich die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = -4x + 4$ als Tangente an den Graphen der gesuchten Funktion $f_1(x)$ legen. Bestimmen Sie diese Funktionsgleichung!

$$\begin{aligned} f_1(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f_1'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \end{aligned}$$

Hochpunkt bei $x_h = -1$:	$f_1'(-1) = 0$	$\Rightarrow 3a - 2b + c = 0$
Funktionswert am Hochpunkt $x_h = -1$:	$f_1(-1) = 8$	$\Rightarrow -a + b - c + d = 8$
Steigung bei $x_1 = 1$:	$f_1'(1) = f_2'(1) = -4$	$\Rightarrow 3a + 2b + c = -4$
Funktionswert bei $x_1 = 1$:	$f_1(1) = f_2(1) = 0$	$\Rightarrow a + b + c + d = 0$

Damit haben wir folgendes Gleichungssystem erhalten:

$$\boxed{\begin{array}{lrrrrcr} (1) & 3a & -2b & +c & & = & 0 \\ (2) & -a & +b & -c & +d & = & 8 \\ (3) & 3a & +2b & +c & & = & -4 \\ (4) & a & +b & +c & +d & = & 0 \end{array}}$$

Es fällt auf, dass der Parameter d nur in Gleichung (2) und (4) enthalten ist. Daher ist es sinnvoll, diese beiden Gleichungen so miteinander zu kombinieren, dass d wegfällt. Das geht ab besten durch Subtrahieren. Die neue Gleichung bekommt die Nummer (5).

$$\begin{array}{lrrrrcrl} (2) & -a & +b & -c & +d & = & 8 & \mid - \\ (4) & a & +b & +c & +d & = & 0 & \mid \\ \hline (5) = (4) - (2) & 2a & & +2c & & = & -8 & \end{array}$$

Zufälligerweise ist dabei auch b weggefallen. Auf jeden Fall haben wir jetzt nur noch 3 Gleichungen mit 3 Variablen.

$$\boxed{\begin{array}{llrrcr} (5) & 2a & & +2c & = & -8 \\ (1) & 3a & -2b & +c & = & 0 \\ (3) & 3a & +2b & +c & = & -4 \end{array}}$$

Addiert man Gleichung (1) und (3), dann fällt b weg und es bleiben nur noch zwei Gleichungen mit zwei Variablen übrig.

$$\begin{array}{llrrcrl} (1) & 3a & -2b & +c & = & 0 & \mid \\ (3) & 3a & +2b & +c & = & -4 & \mid + \\ \hline (6) & 6a & & +2c & = & -4 & \end{array}$$

Das wiederum vereinfachte Gleichungssystem sieht folgendermaßen aus:

$$\boxed{\begin{array}{lllcr} (5) & 2a & +2c & = & -8 \\ (6) & 6a & +2c & = & -4 \end{array}}$$

In diesem Gleichungssystem kann bequem c eliminiert werden, wenn man die Gleichungen voneinander subtrahiert.

$$\begin{array}{llllll} (5) & 2a & +2c & = & -8 & | \quad - \\ (6) & 6a & +2c & = & -4 & | \\ \hline & 4a & & = & 4 & | \quad :4 \\ & a & & = & 1 & \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in Gleichung (5) ein.

$$\begin{aligned} 2a + 2c &= -8 \\ 2 \cdot 1 + 2c &= -8 \quad | - 2 \\ 2c &= -10 \quad | : 2 \\ c &= -5 \end{aligned}$$

Beide Ergebnisse setze ich in Gleichung (1) ein.

$$\begin{aligned} 3a - 2b + c &= 0 \\ 3 \cdot 1 - 2b - 5 &= 0 \\ -2b - 2 &= 0 \quad | + 2 \\ -2b &= 2 \quad | : (-2) \\ b &= -1 \end{aligned}$$

Jetzt fehlt nur noch d. Dazu verwende ich Gleichung (4).

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 0 \\ 1 - 1 - 5 + d &= 0 \quad | + 5 \\ d &= 5 \end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $\boxed{f_1(x) = x^3 - x^2 - 5x + 5}$

4.4 Aufgabe 4

Ein Polynom 3. Grades berührt bei $x_1 = -2$ die Tangente mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = -8x - 15$. Der Funktionsgraph schneidet die y-Achse bei $y_0 = 1$. Dort beträgt die Steigung $m = 16$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$!

$$\begin{aligned} f_1(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f_1'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \end{aligned}$$

Steigung bei $x_1 = -2$:	$f_1'(-2) = f_2'(-2) = -8$	$\Rightarrow 12a - 4b + c = -8$
Funktionswert bei $x_1 = -2$:	$f_1(-2) = f_2(-2) = 1$	$\Rightarrow -8a + 4b - 2c + d = 1$
Funktionswert bei $x_2 = 0$:	$f_1(0) = 1$	$\Rightarrow 0 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + d = 1$
Steigung bei $x_2 = 0$:	$f_1'(0) = 16$	$\Rightarrow 0 \cdot a + 0 \cdot b + c = 16$

Bekannt sind aus den beiden letzten Gleichungen sofort $c = 16$ und $d = 1$. Setzen wir das in die beiden ersten Gleichungen ein, erhalten wir:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 12a - 4b + c & = & -8 \\ (2) & -8a + 4b - 2c + d & = & 1 \\ \hline (1) & 12a - 4b + 16 & = & -8 \\ (2) & -8a + 4b - 2 \cdot 16 + 1 & = & 1 \\ \hline (1) & 12a - 4b & = & -24 \\ (2) & -8a + 4b & = & 32 \\ \hline \end{array}$$

Es bietet sich an, die beiden Gleichungen zu addieren, damit b wegfällt.

$$\begin{array}{lrrcll} (1) & 12a & -4b & = & -24 & | \\ (2) & -8a & +4b & = & 32 & | \; + \\ \hline & 4a & & = & 8 & | \; : 4 \\ & a & & = & 2 & \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in Gleichung (2) ein.

$$\begin{aligned} -8a + 4b &= 32 \\ -8 \cdot 2 + 4b &= 32 \quad | + 16 \\ 4b &= 48 \quad | : 4 \\ b &= 12 \end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $\boxed{f_1(x) = 2x^3 + 12x^2 + 16x + 1}$

4.5 Aufgabe 5

Ein Polynom 4. Grades ist spiegelsymmetrisch zur y-Achse. Bei $x_w = -1$ hat sie eine Wendetangente mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 8x + 6$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$!

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \text{ Wegen Spiegelsymmetrie: } \Rightarrow b = d = 0 \text{ also:} \\
f_1(x) &= ax^4 + cx^2 + e \\
f_1'(x) &= 4ax^3 + 2cx \\
f_1''(x) &= 12ax^2 + 2c
\end{aligned}$$

Wendepunkt bei $x_w = -1$: $f_1''(-1) = 0 \quad \Rightarrow 12a + 2c = 0$
Steigung bei $x_w = -1$: $f_1'(-1) = f_2'(-1) = 8 \quad \Rightarrow -4a - 2c = 8$
Funktionswert bei $x_w = -1$: $f_1(-1) = f_2(-1) = -2 \Rightarrow a + c + e = -2$

Wir haben ein Gleichungssystem 3. Ordnung erhalten.

$$\boxed{\begin{array}{lrrrcr}
(1) & 12a & +2c & & = & 0 \\
(2) & -4a & -2c & & = & 8 \\
(3) & a & +c & +e & = & -2
\end{array}}$$

Es fällt auf, dass die Koeffizienten von c in Gleichung (1) und (2) bis auf das Vorzeichen identisch sind. Addiert man diese Gleichungen, dann bleibt nur a übrig und kann aus dieser einen Gleichung berechnet werden.

$$\begin{array}{lrrcrl}
(1) & 12a & +2c & = & 0 & | \\
(2) & -4a & -2c & = & 8 & | \quad + \\
\hline
 & 8a & & = & 8 & | \quad :8 \\
 & a & & = & 1 &
\end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in Gleichung (1) ein.

$$\begin{aligned}
12a + 2c &= 0 \\
12 \cdot 1 + 2c &= 0 \\
12 + 2c &= 0 \quad | - 12 \\
2c &= -12 \quad | : 2 \\
c &= -6
\end{aligned}$$

Beide Ergebnisse werden in Gleichung (3) eingesetzt, um e zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
a + c + e &= -2 \\
1 - 6 + e &= -2 \\
-5 + e &= -2 \quad | + 5 \\
e &= 3
\end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $\boxed{f_1(x) = x^4 - 6x^2 + 3}$

4.6 Aufgabe 6

Ein Polynom 5. Grades ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Der Graph der Funktion hat einen Hochpunkt bei $H(2|48)$ und schneidet die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 5x + 19$ an der Stelle $x_s = 1$. Wie lautet die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der gesuchten Funktion?

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f \text{ Wegen Punktsymmetrie: } \Rightarrow b = d = f = 0 \text{ also:}\\
f_1(x) &= ax^5 + cx^3 + ex\\
f_1'(x) &= 5ax^4 + 3cx^2 + e
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{Hochpunkt bei } x_h = 2: & f_1'(2) = 0 & \Rightarrow 80a + 12c + e = 0\\
\text{Funktionswert bei } x_h = 2: & f_1(2) = 48 & \Rightarrow 32a + 8c + 2e = 48\\
\text{Funktionswert bei } x_s = 1: & f_1(1) = f_2(1) = 24 & \Rightarrow a + c + e = 24
\end{array}$$

Wir haben ein Gleichungssystem 3. Ordnung erhalten.

$$\boxed{\begin{array}{lrrrcr}
(1) & 80a & +12c & +e & = & 0\\
(2) & 32a & +8c & +2e & = & 48\\
(3) & a & +c & +e & = & 24
\end{array}}$$

Da das Gleichungssystem keine Besonderheiten aufweist, die ein bestimmtes Vorgehen als besonders günstig erscheinen lassen, wähle ich zur Lösung die Cramersche Regel.

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 12 & 1 & 0 & 12\\ 48 & 8 & 2 & 48 & 8\\ 24 & 1 & 1 & 24 & 1 \end{array}\right.}{\left|\begin{array}{ccc|cc} 80 & 12 & 1 & 80 & 12\\ 32 & 8 & 2 & 32 & 8\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right.}\\
&= \frac{0 + 576 + 48 - 0 - 192 - 576}{640 + 24 + 32 - 8 - 160 - 384}\\
&= \frac{-144}{144}\\
a &= -1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{\begin{vmatrix} 80 & 0 & 1 \\ 32 & 48 & 2 \\ 1 & 24 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 80 & 0 \\ 32 & 48 \\ 1 & 24 \end{matrix}}{144} \\
&= \frac{3840 + 0 + 768 - 48 - 3840 - 0}{144} \\
&= \frac{720}{144} \\
b &= 5
\end{aligned}
$$

Zur Bestimmung von c setze ich diese Werte in Gleichung (3) ein.

$$
\begin{aligned}
a + c + e &= 24 \\
-1 + 5 + e &= 24 \quad | - 4 \\
e &= 20
\end{aligned}
$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $\boxed{f_1(x) = -x^5 + 5x^3 + 20x}$

4.7 Aufgabe 7

Ein Polynom 4. Grades hat einen Sattelpunkt bei $S(0|4)$. Bei $x_b = 2$ berührt sie die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 4x - 8$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der gesuchten Funktion!

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\
f_1'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \\
f_1''(x) &= 12ax^2 + 6bx + 2c
\end{aligned}$$

Sattelpunkt bei $x_s = 0$:	$f_1'(0) = 0$	$\Rightarrow 0 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + d = 0$
Sattelpunkt $\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_s = 0$:	$f_1''(0) = 0$	$\Rightarrow 0 \cdot a + 0 \cdot b + c = 0$
Funktionswert bei $x_s = 0$:	$f_1(0) = 4$	$\Rightarrow 0 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + 0 \cdot d + e = 4$
Steigung bei $x_b = 2$:	$f_1'(2) = f_2'(2) = 4$	$\Rightarrow 32a + 12b + 4c + d = 4$
Funktionswert bei $x_b = 2$:	$f_1(2) = f_2(2) = 0$	$\Rightarrow 16a + 8b + 4c + 2d + e = 0$

Aus den ersten drei Gleichungen ergeben sich sofort die Parameter $d = 0$, $c = 0$ und $e = 4$. Diese Ergebnisse setze ich in die letzten beiden Gleichungen ein.

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & 32a + 12b + 4c + d & = & 4 \\
(2) & 16a + 8b + 4c + 2d + e & = & 0 \\
\hline
(1) & 32a + 12b & = & 4 \\
(2) & 16a + 8b + 4 & = & 0 \\
\hline
(1) & 32a + 12b & = & 4 \\
(2) & 16a + 8b & = & -4 \\
\hline
\end{array}$$

Dividiert man die erste Gleichung durch 2, dann kann man die Gleichungen voneinander subtrahieren, um b zu erhalten.

$$\begin{array}{llrcl|l}
(1) & 32a & +12b & = & 4 & :2 \\
(2) & 16a & +8b & = & -4 & \\
\hline
(1) & 16a & +6b & = & 2 & - \\
(2) & 16a & +8b & = & -4 & \\
\hline
 & & 2b & = & -6 & :2 \\
 & & b & = & -3 &
\end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in Gleichung (2) ein.

$$\begin{aligned}
16a + 8b &= -4 \\
16a + 8 \cdot (-3) &= -4 \quad | + 24 \\
16a &= 20 \quad | : 16 \\
a &= 1,25
\end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $\boxed{f_1(x) = 1,25x^4 - 3x^3 + 4}$

4.8 Aufgabe 8

Ein Polynom 2. Grades (eine Parabel) berührt die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = -2x + 4$ in ihrem Schnittpunkt mit der y-Achse. Eine andere Parabel mit der Funktionsgleichung $f_3(x) = 2x^2 + 3x - 1$ schneidet die gesuchte Parabel bei $x_s = 2$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der gesuchten Parabel!

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= ax^2 + bx + c \\
f_1'(x) &= 2ax + b
\end{aligned}$$

Steigung bei $x_b = 0$: $f_1'(0) = f_2'(0) = -2 \Rightarrow 0 \cdot a + b = -2$
Funktionswert bei $x_b = 0$: $f_1(0) = f_2(0) = 4 \quad \Rightarrow 0 \cdot a + 0 \cdot b + c = 4$
Funktionswert bei $x_s = 2$: $f_1(2) = f_3(2) = 13 \Rightarrow 4a + 2b + c = 13$

Die weitere Lösung ist sehr simpel. Aus den ersten beiden Gleichungen ergibt sich direkt $b = -2$ und $c = 4$. Diese Werte müssen nur noch in die dritte Gleichung eingesetzt werden.

$$\begin{aligned}
4a + 2b + c &= 13 \\
4a + 2 \cdot (-2) + 4 &= 13 \\
4a &= 13 \quad |:4 \\
a &= 3,25
\end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $\boxed{f_1(x) = 3,25x^2 - 2x + 4}$

4.9 Aufgabe 9

Ein Polynom 3. Grades mit der Funktionsgleichung $f_1(x)$ schneidet die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = x^2 + 4x - 4$ bei $x_1 = -1$, bei $x_2 = 2$ und bei $x_3 = 5$. Außerdem hat der Graph der gesuchten Funktion einen Hochpunkt bei $x_h = 1$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der gesuchten Funktion!

$$\begin{aligned} f_1(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f_1'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \end{aligned}$$

Funktionswert bei $x_1 = -1$: $f_1(-1) = f_2(-1) = -7 \Rightarrow -a + b - c + d = -7$
Funktionswert bei $x_1 = 2$: $f_1(2) = f_2(2) = 8 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 8$
Funktionswert bei $x_1 = 5$: $f_1(5) = f_2(5) = 41 \Rightarrow 125a + 25b + 5c + d = 41$
Hochpunkt bei $x_h = 1$: $f_1'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$

Wir haben ein Lineargleichungssystem 4. Ordnung erhalten.

$$\boxed{\begin{array}{lrrrrcl} (1) & -a & +b & -c & +d & = & -7 \\ (2) & 8a & +4b & +2c & +d & = & 8 \\ (3) & 125a & +25b & +5c & +d & = & 41 \\ (4) & 3a & +2b & +c & & = & 0 \end{array}}$$

Es fällt auf, dass der Parameter d in Gleichung (4) nicht vorkommt und in den anderen Gleichungen jeweils nur einfach. Daher bietet es sich an, zunächst d zu eliminieren. Dazu subtrahiere ich Gleichung (1) von Gleichung (2) und erhalte Gleichung (5).

$$\begin{array}{lrrrrcll} (1) & -a & +b & -c & +d & = & -7 & | \; - \\ (2) & 8a & +4b & +2c & +d & = & 8 & | \\ \hline (5) & 9a & +3b & +3c & & = & 15 & \end{array}$$

Dann subtrahiere ich Gleichung (2) von Gleichung (3) und erhalte Gleichung (6).

$$\begin{array}{lrrrrcll} \hline (2) & 8a & +4b & +2c & +d & = & 8 & | \; - \\ (3) & 125a & +25b & +5c & +d & = & 41 & | \\ \hline (6) & 117a & +21b & +3c & & = & 33 & \end{array}$$

Übrig bleibt ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung.

$$\boxed{\begin{array}{lrrrcl} (4) & 3a & +2b & +c & = & 0 \\ (5) & 9a & +3b & +3c & = & 15 \\ (6) & 117a & +21b & +3c & = & 33 \end{array}}$$

Das Gleichungssystem lässt sich etwas vereinfachen, wenn man sowohl Gleichung (5) als auch Gleichung (6) durch 3 dividiert.

$$\boxed{\begin{array}{lrrrcl} (4) & 3a & +2b & +c & = & 0 \\ (5) & 3a & +b & +c & = & 5 \\ (6) & 39a & +7b & +c & = & 11 \end{array}}$$

Es fällt auf, dass in Gleichung (4) und (5) die Koeffizienten von a und c übereinstimmen. Das kann man ausnutzen, indem man die beiden Gleichungen voneinander subtrahiert. Dann fallen beide gleichzeitig weg!

$$\begin{array}{lcccccl} (4) & 3a & +2b & +c & = & 0 & | \\ (5) & 3a & +b & +c & = & 5 & | \; - \\ \hline (7) & & b & & = & -5 & \end{array}$$

Das Ergebnis wird nun in Gleichung (6) und entweder in Gleichung (4) oder Gleichung (5) eingesetzt. Ich wähle willkürlich Gleichung (5) aus. Dann bleibt ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung übrig.

$$\boxed{\begin{array}{lccccc} (5) & 3a & -5 & +c & = & 5 \\ (6) & 39a & +7\cdot(-5) & +c & = & 11 \end{array}}$$

Aufgelöst in Normalform sieht das System so aus:

$$\boxed{\begin{array}{lcccc} (5) & 3a & +c & = & 10 \\ (6) & 39a & +c & = & 46 \end{array}}$$

Da jeweils c allein vorkommt, können die Gleichungen sofort voneinander subtrahiert werden.

$$\begin{array}{lccccl} (5) & 3a & +c & = & 10 & | \; - \\ (6) & 39a & +c & = & 46 & | \\ \hline & 36a & & = & 36 & | \; :36 \\ & a & & = & 1 & \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in Gleichung (5) ein.

$$\begin{aligned} 3a + c &= 10 \\ 3 \cdot 1 + c &= 10 \quad | - 3 \\ c &= 7 \end{aligned}$$

Alle Ergebnisse setze ich in Gleichung (1) ein, um d zu bestimmen.

$$\begin{aligned} -a + b - c + d &= -7 \\ -1 - 5 - 7 + d &= -7 \quad | + 13 \\ d &= 6 \end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $\boxed{f_1(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + 6}$

4.10 Aufgabe 10

Ein Polynom 3. Grades hat eine Nullstelle bei $x_0 = 0$ und einen Wendepunkt bei $x_w = 1$. Die Gleichung der Wendetangente lautet $f_2(x) = -9x + 1$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms $f_1(x)$!

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\
f_1'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\
f_1''(x) &= 6ax + 2b
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{Nullstelle bei } x_0 = 0: & f_1(0) = 0 & \Rightarrow 0 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + d = 0 \\
\text{Wendepunkt bei } x_w = 1: & f_1''(1) = 0 & \Rightarrow 6a + 2b = 0 \\
\text{Steigung am Wendepunkt } x_w = 1: & f_1'(1) = f_2'(1) = -9 & \Rightarrow 3a + 2b + c = -9 \\
\text{Funktionswert am Wendepunkt } x_w = 1: & f_1(1) = f_2(1) = -8 & \Rightarrow a + b + c + d = -8
\end{array}$$

Aus der ersten Gleichung erhält man sofort den Parameter $d = 0$. Eingesetzt in die anderen Gleichungen erhält man ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung.

$$\boxed{\begin{array}{rrrrcr}
(1) & 6a & +2b & & = & 0 \\
(2) & 3a & +2b & +c & = & -9 \\
(3) & a & +b & +c & = & -8
\end{array}}$$

Nur in Gleichung (2) und (3) ist der Parameter c enthalten. Da der Parameter dort mit gleichem Koeffizienten[3] vorkommt, können die Gleichungen direkt voneinander subtrahiert werden.

$$\begin{array}{rrrrcrl}
(2) & 3a & +2b & +c & = & -9 & | \\
(3) & a & +b & +c & = & -8 & | \; - \\
\hline
(4) & 2a & +b & & = & -1 &
\end{array}$$

Damit bleibt ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung übrig.

$$\boxed{\begin{array}{rrrcr}
(1) & 6a & +2b & = & 0 \\
(4) & 2a & +b & = & -1
\end{array}}$$

Ich löse Gleichung (4) nach b auf und setze das Ergebnis in Gleichung (1) ein.

$$\begin{aligned}
2a + b &= -1 \quad |-2a \\
b &= -1 - 2a
\end{aligned}$$

Eingesetzt in (1):

$$\begin{aligned}
6a + 2b &= 0 \\
6a + 2 \cdot (-1 - 2a) &= 0 \\
6a - 2 - 4a &= 0 \quad |+2 \\
2a &= 2 \quad |:2 \\
a &= 1
\end{aligned}$$

[3] Der Koeffizient wird auch *Vorzahl* genannt. Das ist die Zahl, die vor einer Variablen steht.

Mit der umgestellten Gleichung (1) bestimme ich b.

$$b = -1 - 2a = -1 - 2 \cdot 1 = -3$$

Beide Ergebnisse setze ich in Gleichung (3) ein, um c zu bestimmen.

$$\begin{aligned} a + b + c &= -8 \\ 1 - 3 + c &= -8 \quad | + 2 \\ c &= -6 \end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $\boxed{f_1(x) = x^3 - 3x^2 - 6x}$

4.11 Aufgabe 11

Ein Polynom 4. Grades hat einen Sattelpunkt bei $S(0|1)$ und einen Wendepunkt bei $W(2|-15)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ der gesuchten Funktion!

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\
f_1'(x) &= 4x^3 + 3bx^2 + 2cx + d \\
f_1''(x) &= 12ax^2 + 6bx + 2c
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lrcll rcl}
(1) & f(0) & = & 1 & \Rightarrow & a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e & = & 1 \\
(2) & f'(0) & = & 0 & \Rightarrow & 4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d & = & 0 \\
(3) & f''(0) & = & 0 & \Rightarrow & 12a \cdot 0^2 + 6b \cdot 0 + 2c & = & 0 \\
(4) & f(2) & = & -15 & \Rightarrow & a \cdot 2^4 + b \cdot 2^3 + c \cdot 2^2 + d \cdot 2 + e & = & -15 \\
(5) & f'' & = & 0 & \Rightarrow & 12a \cdot 2^2 + 6b \cdot 2 + 2c & = & 0
\end{array}$$

Aus (1) erhält man: $e = 1$
Aus (2) erhält man: $d = 0$
Aus (3) erhält man: $c = 0$

Diese Werte werden in (4) und (5) eingesetzt.

$$\begin{array}{lrcrl}
(4) & a \cdot 16 + b \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 & = & -15 & |-1 \\
(4) & a \cdot 16 + b \cdot 8 & = & -16 & \\
(5) & 12a \cdot 4 + 6b \cdot 2 + 2 \cdot 0 & = & 0 &
\end{array}$$

Zusammengefasst bleibt ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung übrig.

$$\boxed{\begin{array}{llrcr}
(4) & 16a & +8b & = & -16 \\
(5) & 48a & +12b & = & 0
\end{array}}$$

Dieses Gleichungssystem kann mit jedem beliebigen Lösungsverfahren gelöst werden. Willkürlich wähle ich das **Einsetzungsverfahren**. Dazu löse ich Gleichung (5) nach b auf.

$$\begin{array}{rcrl}
48a + 12b & = & 0 & |-48a \\
12b & = & -48a & |:12 \\
b & = & -4a &
\end{array}$$

Dieses Ergebnis wird in (4) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcrl}
16a + 8b & = & -16 & \\
16a + 8 \cdot (-4a) & = & -16 & \\
16a - 32a & = & -16 & \\
-16a & = & -16 & |:(-16) \\
a & = & 1 &
\end{array}$$

Eingesetzt in die umgestellte Gleichung (4) erhält man b.

$$b = -4a = -4 \cdot 1 = -4$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $\boxed{f(x) = x^4 - 4x^3 + 1}$

4.12 Aufgabe 12

Ein Polynom 4. Grades hat einen Tiefpunkt bei $x_E = 0{,}5$ und einen Sattelpunkt bei $S(2|0)$. Außerdem ist noch bekannt, dass der Funktionsgraph durch den Punkt $P(3|3)$ verläuft. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ der gesuchten Funktion!

$$\begin{array}{rcl} f_1(x) & = & ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\ f_1'(x) & = & 4x^3 + 3bx^2 + 2cx + d \\ f_1''(x) & = & 12ax^2 + 6bx + 2c \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcccrcl} (1) & f'(0{,}5) & = & 0 & \Rightarrow & 4a \cdot 0{,}5^3 + 3b \cdot 0{,}5^2 + 2c \cdot 0{,}5 + d & = & 0 \\ (2) & f(2) & = & 0 & \Rightarrow & a \cdot 2^4 + b \cdot 2^3 + c \cdot 2^2 + d \cdot 2 + e & = & 0 \\ (3) & f'(2) & = & 0 & \Rightarrow & 4a \cdot 2^3 + 3b \cdot 2^2 + 2c \cdot 2 + d & = & 0 \\ (4) & f''(2) & = & 0 & \Rightarrow & 12a \cdot 2^2 + 6b \cdot 2 + 2c & = & 0 \\ (5) & f(3) & = & 3 & \Rightarrow & a \cdot 3^4 + b \cdot 3^3 + c \cdot 3^2 + d \cdot 3 + e & = & 3 \end{array}$$

Die Gleichungen werden zusammengefasst. Man erhält ein Lineargleichungssystem 5. Ordnung.

$$\boxed{\begin{array}{lrrrrrcl} (1) & 0{,}5a & +0{,}75b & +c & +d & & = & 0 \\ (2) & 16a & +8b & +4c & +2d & +e & = & 0 \\ (3) & 32a & +12b & +4c & +d & & = & 0 \\ (4) & 48a & +12b & +2c & & & = & 0 \\ (5) & 81a & +27b & +9c & +3d & +e & = & 3 \end{array}}$$

Man erkennt sofort, dass es nur zwei Gleichungen gibt, in denen der Parameter e vorkommt. Subtrahiert man die voneinander, dann hat man nur noch 4 Gleichungen mit 4 Variablen.

$$\begin{array}{lrrrrrcll} (5) & 81a & +27b & +9c & +3d & +e & = & 3 & | \\ (2) & 16a & +8b & +4c & +2d & +e & = & 0 & |- \\ \hline (6) & 65a & +19b & +5c & +d & & = & 3 & \end{array}$$

Das Gleichungssystem reduziert sich folgendermaßen:

$$\boxed{\begin{array}{lrrrrcl} (1) & 0{,}5a & +0{,}75b & +c & +d & = & 0 \\ (3) & 32a & +12b & +4c & +d & = & 0 \\ (4) & 48a & +12b & +2c & & = & 0 \\ (6) & 65a & +19b & +5c & +d & = & 3 \end{array}}$$

Da in drei Gleichungen der Parameter d ohne Koeffizienten auftritt, bietet sich die Subtraktionsmethode [4] an. Ich bilde (3) – (1) und (6) – (3). Zusammen mit (4) erhalte

[4] Einzelheiten zum Additions-/Subtraktionsverfahren siehe hier: http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/add.pdf

ich ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung. Beginnen wir mit (3) − (1) = (7).

$$\begin{array}{lrrrrcl}
(1) & 0{,}5a & +0{,}75b & +c & +d & = & 0 \;|- \\
(3) & 32a & +12b & +4c & +d & = & 0 \;| \\
\hline
(7) & 31{,}5a & +11{,}25b & +3c & & = & 0
\end{array}$$

Es folgt (6) − (3) = (8).

$$\begin{array}{lrrrrcl}
(3) & 32a & +12b & +4c & +d & = & 3 \;|- \\
(6) & 65a & +19b & +5c & +d & = & 3 \;| \\
\hline
(8) & 33a & +7b & +c & & = & 3
\end{array}$$

Hiermit bleibt dieses System übrig:

$$\boxed{\begin{array}{lrrrcl}
(4) & 48a & +12b & +2c & = & 0 \\
(7) & 31{,}5a & +11{,}25b & +3c & = & 0 \\
(8) & 33a & +7b & +c & = & 3
\end{array}}$$

Da sich jetzt kein Verfahren besonders anbietet, verwende ich für die weitere Lösung die Cramersche Regel [5].

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & 12 & 2 \\ 0 & 11{,}25 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 48 & 12 & 2 \\ 31{,}5 & 11{,}25 & 3 \\ 33 & 7 & 1 \end{vmatrix}} \\
&= \frac{108 - 67{,}5}{540 + 1\,188 + 441 - 742{,}5 - 1\,008 - 378} \\
&= \frac{40{,}5}{40{,}5} \\
a &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b &= \frac{\begin{vmatrix} 48 & 0 & 2 \\ 31{,}5 & 0 & 3 \\ 33 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{40{,}5} \\
&= \frac{189 - 432}{40{,}5} \\
&= \frac{-\,243}{40{,}5} \\
a &= -6
\end{aligned}$$

[5]Einzelheiten zur Cramerschen Regel siehe hier: http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/cramer.pdf

Die Ergbnisse setze ich in (8) ein, um c zu bestimmen.

$$\begin{aligned} 33a + 7b + c &= 3 \\ 33 \cdot 1 + 7 \cdot (-6) + c &= 3 \\ -9 + c &= 3 \quad | + 9 \\ c &= 12 \end{aligned}$$

Diese Ergebnisse werden in (3) eingesetzt, um d zu bestimmen.

$$\begin{aligned} 32a + 12b + 4c + d &= 0 \quad | \\ 32 \cdot 1 + 12 \cdot (-6) + 4 \cdot 12 + d &= 0 \\ 8 + d &= 0 \quad | - 8 \\ d &= -8 \end{aligned}$$

Alle bisherigen Ergebnisse werden in (2) eingesetzt, um e zu bestimmen.

$$\begin{aligned} 16a + 8b + 4c + 2d + e &= 0 \\ 16 \cdot 1 + 8 \cdot (-6) + 4 \cdot 12 + 2 \cdot (-8) + e &= 0 \\ 0 + e &= 0 \\ e &= 0 \end{aligned}$$

Damit kann man die Funktionsgleichung angeben: $\boxed{f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x}$