Fehlersuche in Lösungen mathematischer Gleichungen

Wolfgang Kippels

25. Dezember 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Als Lehrer sehe ich immer wieder die gleichen Fehler in der Lösung von Klassemarbeitsaufgaben. Es ist ziemlich frustrierend, wenn man die Fehler jedesmal bei jedem einzeln erläutern muss. Trotzdem werden diese Fehler immer wieder gemacht.

Daher möchte ich hiermit den Spieß umdrehen. Ich habe eine Sammlung von Fehlern zusammengestellt. Alle sind authentisch, wurden also in Klassenarbeiten und anderen Prüfungen so gemacht. Das erkennt man schon daran, dass teilweise sehr viele Fehler in wenigen Zeilen gemacht wurden. So „kreativ" kann das kein Lehrer erfinden.

Es gibt in dieser Sammlung auch ein paar Lösungsversuche, die recht umständlich vorgehen, beispielsweise Aufgabe G1. Diese umständliche Vorgehensweise allein habe ich jedoch **nicht** als Fehler bezeichnet, nur Fehler, die dabei gemacht wurden. Dabei kann es sogar vorkommen, dass am Schluss das richtige Ergebnis herauskommt.

Ich möchte darauf hinweisen, dass dieser Artikel vor Plagiaten nur so strotzt. Alle Fehler, die ich hier zitiere, habe ich nicht selbst erfunden. Eine Quellenangabe ist mir jedoch aus datenschutzrechtlichen Gründen nicht möglich. Ich sehe keine andere Möglichkeit, diesem Dilemma zu entkommen, als dass ich einfach die Plagiate zugebe.

Im ersten Teil dieser Sammlung sind die fehlerhaften Lösungen dargestellt. Man sollte sich diese Lösungen genau ansehen, um den (oder die) Fehler zu finden. Meint man, alle Fehler gefunden zu haben, dann kann man im zweiten Teil nachsehen, ob das richtig war. Dort steht die Aufgabe noch einmal, wobei der fehlerhafte Teil rot dargestellt ist. Der korrigierte Teil steht dann in grün noch einmal darunter. Es folgt eine Erläuterung des Fehlers. Wenn mehrere Fehler direkt hintereinander gemacht wurden, dann wird bei jedem einzelnen Rechenschritt dabei so getan, als ob die Vorzeile richtig wäre.

Ich hoffe, dass die Fehlersuche Spaß macht und vielleicht hilft, den einen oder anderen typischen Fehler in Zukunft zu vermeiden. Über Rückmeldungen würde ich mich freuen.

2 Fehlerhafte Lösungssequenzen

2.1 Umstellen von Termen

2.1.1 Aufgabe A1

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -3 \cdot \frac{(x-0) \cdot \left(x - \frac{5}{3}\right) \cdot (x+1)}{(x-3) \cdot (x+1)} \\
f(x) &= \frac{(-3x-0) \cdot (-3x+5) \cdot (-3x-3)}{(-3x+9) \cdot (-3x-3)} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.1.2 Aufgabe A2

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -3 \cdot \frac{x^2 - \frac{5}{3}x}{x-3} \\
f(x) &= \frac{-3x^2 + 5x}{-3x+9} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.1.3 Aufgabe A3

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(6x-5) \cdot (x-3) - (3x^2 - 5x) \cdot 1}{(x-3)^2} \\
f'(x) &= \frac{6x^2 - 18x - 5x + 15 - 3x^2 + 5x}{x^2 - 9} \\
f'(x) &= \frac{3x^2 - 18x + 15}{x^2 - 9}
\end{aligned}
$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.1.4 Aufgabe A4

$$
\begin{aligned}
f(x) &= k \cdot \frac{(x+1)(x-0)\left(x-\frac{5}{3}\right)}{(x+1)(x-3)} \\
&= k \cdot \frac{x^2+1x\left(x-\frac{5}{3}\right)}{x^2-3x+x-3} \\
&= k \cdot \frac{x^3-\frac{5}{3}x^2+x^2-\frac{5}{3}x}{x^2-2x-3} \\
&= k \cdot \frac{x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x}{x^2-2x-3}
\end{aligned}
$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.1.5 Aufgabe A5

$$P_1(-3|5) \qquad P_2(5|-7)$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-7-5}{5-(-3)} = \frac{-12}{-8} = -1{,}5$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.1.6 Aufgabe A6

In diesem Lösungsversuch stecken **zwei** Fehler, ein sehr heftiger und ein kleiner.

$$
\begin{aligned}
V &= (60\,\mathrm{cm}-2x)\cdot(90\,\mathrm{cm}-3x)\cdot x\cdot\frac{1}{2} \\
V &= \frac{1}{2}\cdot 5\,400\,\mathrm{cm}^2 - 180\,\mathrm{cm}x + 60\,\mathrm{cm}x - 180\,\mathrm{cm}x + 6x^2 - 2x^2 + 90\,\mathrm{cm}x - 3x^2 \\
V &= \frac{1}{2}\cdot 5\,400\,\mathrm{cm}^2 - 210\,\mathrm{cm}x + x^2 \\
V &= \frac{1}{2}\cdot x^2 + 5\,400\,\mathrm{cm}^2 - 210\,\mathrm{cm}x
\end{aligned}
$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.1.7 Aufgabe A7

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 2\cdot 6\cdot(2x-4)^5 \\
f'(x) &= 2\cdot 6\cdot(32x^5-1024)
\end{aligned}
$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.1.8 Aufgabe A8

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6 \cdot (2x-4)^5 \cdot 2x^0 \\ &= 6 \cdot (10x^5 - 20) \cdot 2x \end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.2 Rechnen mit Einheiten

2.2.1 Aufgabe B1

$$\begin{aligned} A &= (2500\,\mathrm{m}^2 - 3750\,\mathrm{m}^2 + 2500\,\mathrm{m}^2) - (156{,}25\,\mathrm{m}^2 - 937{,}5\,\mathrm{m}^2 + 1250\,\mathrm{m}^2) \\ A &= 1250\,\mathrm{m}^2 - 468{,}75\,\mathrm{m}^2 \\ A &= 781{,}25\,\mathrm{m}^2 \cdot 0{,}8\,\mathrm{m} \\ V &= 625\,\mathrm{m}^3 \end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.2.2 Aufgabe B2

$$\begin{aligned} V &= 12{,}08\,\mathrm{m}^2 \cdot 80\,\mathrm{cm} \\ &= 12{,}08\,\mathrm{m}^2 \cdot 0{,}08\,\mathrm{m} \\ &= 0{,}9664\,\mathrm{m}^3 \end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.2.3 Aufgabe B3

In diesem Lösungsversuch stecken **vier** Fehler.

$$\begin{aligned} 0 &= 40\,\mathrm{cm} + 32\,\mathrm{dm}^3 \cdot (-2t^{-2}) \\ &= 40\,\mathrm{cm} + 32\,\mathrm{dm}^3 \cdot \frac{-2}{2t} && | \cdot 2t \\ 2t &= 40\,\mathrm{cm} + 32\,\mathrm{dm}^3 \cdot (-2t) && | : 2 \\ t &= 20\,\mathrm{cm} + 16\,\mathrm{dm}^3 \cdot (-1) \\ t &= 20\,\mathrm{cm} + 16\,000\,\mathrm{cm}^3 \cdot (-1) \\ t &= 20\,\mathrm{cm} + 25{,}5\,\mathrm{cm} \cdot (-1) \\ t &= -45{,}2\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.2.4 Aufgabe B4

In diesem Lösungsversuch stecken **zwei** Fehler.

$$\begin{array}{rcl} V & = & (30\,\text{cm} - 2h) \cdot (60\,\text{cm} - 4h) \cdot (h) \\ V & = & 1\,800\,\text{cm} - 120h + 30h - 120h + 8h^2 - 2h^2 + 60h - 4h^2 \\ V & = & 1\,800\,\text{cm} - 150h + 8h^2 \end{array}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.3 Lineare Gleichungen

2.3.1 Aufgabe C1

$$\begin{array}{rcl} -40x - 3y - 27y & = & 0 \\ -40x - 30y & = & 0 \quad | + 40x \\ -30y & = & 40x \quad | : (-30) \\ y & = & -\frac{4}{3} \end{array}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.3.2 Aufgabe C2

$$\begin{array}{rcl} 75a + 10 \cdot 0 + 0 & = & 1{,}2 \\ 75a & = & 1{,}2 \quad | : 75 \\ a & = & 62{,}5 \end{array}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.3.3 Aufgabe C3

$$\begin{array}{rcl} 6 & = & m \cdot 5 + 0 \quad | \, 5 \\ \frac{5}{6} & = & m \end{array}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.3.4 Aufgabe C4

$$\begin{aligned} \frac{4}{25} + 2b &= 0 \quad \Big| - \frac{4}{25} \\ 2b &= -\frac{4}{25} \quad \Big| : 2 \\ b &= \frac{2}{25} \end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.3.5 Aufgabe C5

$$\begin{aligned} 1 &= k \cdot \frac{(1-0) \cdot \left(1 - \frac{5}{3}\right)}{1-3} \\ 1 &= k \cdot \frac{1 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)}{2} \quad | \cdot 2 \\ 2 &= k \cdot 1 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \\ 2 &= k \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \\ 2 &= -\frac{2k}{3} \quad | \cdot 3 \\ 6 &= -2k \quad | : (-2) \\ -3 &= k \end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.3.6 Aufgabe C6

$$\begin{aligned} 5 &= -\frac{3}{2} \cdot (-3) + b \\ 5 &= \frac{9}{2} + b \quad \Big| : \frac{9}{2} \\ \frac{5}{\frac{9}{2}} &= b \\ \frac{10}{9} &= b \end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.3.7 Aufgabe C7

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-2) + b &= 0 \\ -4b &= 0 \quad | +4 \\ b &= 4 \end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.3.8 Aufgabe C8

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} \cdot (-5) + b &= 2 \quad | + \frac{1}{3} \cdot (-5) \\ b &= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-5) \\ b &= 2 \cdot \frac{-5}{15} \\ b &= \frac{30}{15} + \frac{-10}{15} \\ b &= \frac{20}{15} \end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.3.9 Aufgabe C9

In diesem Lösungsversuch steckt **ein** Fehler.

$$\begin{aligned} 6a + 2 \cdot 9 &= 0 \quad | - 6a \\ 18 &= 6a \quad | : 6 \\ a &= 3 \end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.3.10 Aufgabe C10

In diesem Lösungsversuch steckt **ein** Fehler.

$$\begin{aligned} -3 + 18 + c &= 9 \quad | - 15 \\ c &= 6 \end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.3.11 Aufgabe C11

In diesem Lösungsversuch stecken **zwei** Fehler.

$$\begin{aligned}
18a + 6(9 - 7a) &= 0 \\
18a + 54 - 42a &= 0 \\
-24a + 54 &= 0 \qquad | : -24 \\
a + 54 &= 0 \qquad | - 54 \\
a &= -54
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.3.12 Aufgabe C12

In diesem Lösungsversuch steckt **ein** Fehler.

$$\begin{aligned}
-4 \cdot (-84{,}9) - 2z &= 342 \\
339{,}6 - 2z &= 342 \\
-2z &= 2{,}4 \\
z &= 0{,}4
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.3.13 Aufgabe C13

In diesem Lösungsversuch stecken **zwei** Fehler.

$$\begin{aligned}
6 \cdot \left(\frac{2z + 246}{228}\right) + 12z + 12 &= 0 \\
\frac{12z + 1\,476}{1\,368} + 12z + 12 &= 0 \\
12z + 1\,476 + 12z + 12 &= 0 \\
24z + 1\,488 &= 0 \\
24z &= -1\,488 \\
z &= -62
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.3.14 Aufgabe C14

In diesem Lösungsversuch steckt **ein** Fehler.

$$\begin{aligned}
(-8) \cdot (-4) + (-57) \cdot 6 + (-2) \cdot z &= 0 \\
32 + (-342) - 2z &= 0 \qquad | - 32 + (-342) \\
-2z &= -374 \quad | : (-2) \\
z &= 187
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.3.15 Aufgabe C15

In diesem Lösungsversuch steckt **ein** Fehler.

$$\begin{aligned} -1\tfrac{7}{8}+6\tfrac{1}{2}+c &= -2 \quad |+4\tfrac{5}{8} \\ c &= 2\tfrac{5}{8} \end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.3.16 Aufgabe C16

In diesem Lösungsversuch steckt **ein** Fehler.

$$\begin{aligned} -\tfrac{5}{8}+3\tfrac{1}{4}+2\tfrac{5}{8}+d &= -2 \quad |+5\tfrac{1}{4} \\ d &= 3\tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.4 Bruchgleichungen

2.4.1 Aufgabe D1

$$\begin{aligned} 2x-\frac{2x+3}{3-x}-11 &= 2x \quad |-2x \\ -\frac{2x+3}{3-x}-11 &= 0 \quad |\cdot(3-x) \\ -2x+3-11\cdot(3-x) &= 0 \\ -2x+3-33+11x &= 0 \\ 9x-30 &= 0 \quad |+30 \\ 9x &= 30 \quad |:9 \\ x &= \frac{10}{3} \\ L &= \left\{\frac{10}{3}\right\} \end{aligned}$$

Die Lösung ist hier zu finden.

2.4.2 Aufgabe D2

$$\begin{aligned} \frac{2x-5}{x+5}-7 &= 0 \quad |\cdot(x+5) \\ 2x-5-7 &= 0 \\ 2x-12 &= 0 \quad |+12 \\ 2x &= 12 \quad |:2 \\ x &= 6 \\ L &= \{6\} \end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.4.3 Aufgabe D3

$$\begin{aligned}
\frac{3x+3}{x-2} - \frac{x-5}{x-2} &= 0 \quad | \cdot (x-2) \\
3x+3-x+5 &= x-2 \\
2x+8 &= x-2 \quad | -x-8 \\
x &= -10 \\
L &= \{-10\}
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.4.4 Aufgabe D4

$$\begin{aligned}
\frac{(3x-14)\cdot(2x+12)}{6\cdot(x^2-36)} - \frac{2x-18}{6x^2-108} &= \frac{(2x-9)\cdot(3x+18)}{6x^2-108} && | \cdot (6x^2-108) \\
6x^2+36x-28x-168-2x-18 &= 6x^2+36x-27x-162 \\
6x^2+6x-186 &= 6x^2+9x-162 && | -6x^2+162 \\
6x-24 &= 9x && | -6x \\
-24 &= 3x && | : 3 \\
x &= 8 \\
L &= \{8\}
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.4.5 Aufgabe D5

$$\begin{aligned}
\frac{3x-14}{36x-216} - \frac{x-9}{36x-216} &= \frac{2x-9}{36x-216} && | \cdot 36x-216 \\
3x-14-x-9 &= 2x-9 && | +9 \\
3x-5-x &= 2x \\
3x-14-x &= 2x \\
2x-14 &= 2x && | -2x \\
14 &= 0
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.4.6 Aufgabe D6

$$\begin{aligned}
\frac{6x-34-6x+33}{6x-42} &= \frac{x-11}{3x^2-49} && | \cdot (6x-42)\cdot(3x^2-49) \\
6x-34-6x+3(3x^2-49) &= x-11(6x-42) \\
6x-34-6x+3+3x^2+49 &= x-11+6x+42 \\
18+3x^2 &= 7x+31 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.4.7 Aufgabe D7

In diesem Lösungsversuch stecken **zwei** Fehler.

$$\begin{aligned}
\frac{3x+3}{x-7}-2 &= \frac{5x-7}{x-7} && |\cdot(x-7)\\
(3x+3)(-2) &= 5x-7\\
-6x-6 &= 5x-7 && |+6x+7\\
1 &= 11x && |:11\\
11 &= x
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.4.8 Aufgabe D8

Gesucht ist die Lösungsmenge der Bruchgleichung.

$$\begin{aligned}
\frac{3x+3}{x-7}-2 &= \frac{5x-7}{x-7} && |\cdot \mathrm{HN}\\
(3x+3)-2 &= (5x-7)(x-7)\\
-6x-6 &= 5x^2-35x-7x+49\\
-6x-6 &= 5x^2-42x+49 && |+6x+6\\
& 5x^2-36x+43 && |:5\\
& x^2-7{,}2x+8{,}5
\end{aligned}$$

Hier endet der Lösungsversuch.

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.5 Ungleichungen

2.5.1 Aufgabe E1

$$\begin{aligned}
2n-9 &\geq -21+4n && |-2n+21\\
30 &\geq 2n && |:2\\
15 &\geq n
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.5.2 Aufgabe E2

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &\geq a_n\\
4(n+1)^2-12(n+1)-3 &\geq 4n^2-12n-3\\
4(n^2+2n+1)-12n+12-3 &\geq 4n^2-12n-3\\
4n^2+8n+4-12n+12-3 &\geq 4n^2-12n-3\\
4n^2-4n+13 &\geq 4n^2-12n-3 && |-4n^2\\
4n+13 &\geq -12n-3 && |+12n-13\\
16n &\geq -16 && |:16\\
n &\geq -1
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.5.3 Aufgabe E3

$$\begin{aligned}
-4-\frac{8n-9}{9-2n} &< \varepsilon \\
-\frac{4}{1}-\frac{8n-9}{9-2n} &< \varepsilon \\
-\frac{4(9-2n)-8n-9}{9-2n} &< \varepsilon \\
\frac{-36+8n-8n-9}{9-2n} &< \varepsilon \\
\frac{-45}{9-2n} &< \varepsilon
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.6 Quadratische Gleichungen

2.6.1 Aufgabe F1

$$\begin{aligned}
3x^2-12x &= 0 \quad |:3 \\
x^2-4x &= 0 \quad |:x \\
x-4 &= 0 \quad |+4 \\
x &= 4
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.6.2 Aufgabe F2

Nullstellenbestimmung einer Funktion:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 3x^2-18x+15 \quad |:3 \\
f(x) &= x^2-6x+5 \\
0 &= x_0^2-6x_0+5 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.6.3 Aufgabe F3

$$\begin{aligned}
0 &= 3x^2 - 18x + 15 \quad |:3 \\
0 &= x^2 - 6x + 5 \\
x_{1/2} &= 3 \pm \sqrt{9-5} \\
&= 3 \pm 4 \\
x_1 = 7 & \quad\quad x_2 = -1
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.6.4 Aufgabe F4

$$\begin{aligned}
4b^2 - 25 &= 0 \quad |:4 \\
b^2 - 6{,}25 &= 0 \quad |+6{,}25 \\
b^2 &= 6{,}25 \\
b &= 2{,}5
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.6.5 Aufgabe F5

$$\begin{aligned}
-16x^2 &= -42x + 207 && |+42x \\
26x^2 &= 207 && |:26 \\
x^2 &= 7{,}96 && |\sqrt{\ } \\
x &= \sqrt{7{,}96} \\
x &= 2{,}82
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.6.6 Aufgabe F6

In diesem Lösungsversuch stecken **drei** Fehler.

$$\begin{aligned}
0 &= x^2 - 11x + 34 \\
x_{1/2} &= \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{-11^2}{2} - 34} \\
x_{1/2} &= 5{,}5 \pm \sqrt{30{,}25 - 34} \\
x_{1/2} &= 5{,}5 \pm -3{,}75 \\
x_1 = 1{,}75 & \quad\quad x_2 = 9{,}25
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.6.7 Aufgabe F7

In diesem Lösungsversuch steckt **ein** Fehler.

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 - 18x + 24 \\ x_{1/2} &= 9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 24} \\ x_{1/2} &= 9 \pm \sqrt{57} \\ x_{1/2} &= 9 \pm 7{,}55 \end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.6.8 Aufgabe F8

In diesem Lösungsversuch stecken **zwei** Fehler.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12x + 9 &= 0 && \mid :3 \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ x_{1/2} &= -\tfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q} \\ x_{1/2} &= -\tfrac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{-4}{2}\right)^2 - 3} \\ x_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{\left(\tfrac{-4}{2}\right)^2 - 3} \\ x_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{-2^2 - 3} \\ x_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{4 - 3} \\ x_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{1} \\ x_{1/2} &= 2 \pm 1 \\ x_1 = 3 & \quad x_2 = 1 \end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.6.9 Aufgabe F9

In diesem Lösungsversuch steckt **ein** Fehler.

$$\begin{aligned} 0{,}072x^2 - 0{,}6 &= 0 && \mid : 0{,}072 \\ x^2 - 8\tfrac{1}{3} &= 0 && \mid + 8\tfrac{1}{3} \\ x^2 &= 8\tfrac{1}{3} && \mid \sqrt{\ } \\ x &= 2{,}89 \end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.6.10 Aufgabe F10

In diesem Lösungsversuch stecken **zwei** Fehler an der selben Stelle.

$$\begin{aligned} 0{,}072x^2 - 0{,}6 &= 0 && \mid + 0{,}6 \\ 0{,}072x^2 &= 0{,}6 && \mid \sqrt{\ } \\ 0{,}072x &= 0{,}77 && \mid : 0{,}072 \\ x &= 10{,}69 \end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.6.11 Aufgabe F11

In diesem Lösungsversuch stecken **zwei** Fehler.

$$\begin{aligned}
0{,}072x^2 - 0{,}6 &= 0 \\
0{,}072x^2 + 0x - 0{,}6 &= 0 && | \cdot 13{,}\overline{88} \\
x^2 + 0x - 8{,}\overline{88} &= 0 \\
x_{1/2} &= 0 \pm \sqrt{0 - (-8{,}\overline{88})^2} \\
&= 0 \pm \sqrt{-69{,}\overline{44}} \\
&= 0 \pm 8{,}\overline{33} \\
x_1 &= 8{,}\overline{33} \\
x_2 &= -8{,}\overline{33}
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.6.12 Aufgabe F12

In diesem Lösungsversuch stecken **zwei** Fehler.

$$\begin{aligned}
0{,}006x^4 - 0{,}3x^2 + 5 &= 0 \\
\text{setze } x^2 &= k \\
0{,}006k^2 - 0{,}3k + 5 &= 0 && | : (0{,}006) \\
k^2 - 50k + 833{,}33 & \\
k_{1/2} &= \frac{50}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{50}{2}\right)^2 - 833{,}33} \\
k_{1/2} &= 25 \pm \sqrt{625 - 833{,}33} \\
k_{1/2} &= 25 \pm \sqrt{-208{,}33} \\
k_{1/2} &= 25 \\
x_{1/2}^2 &= k_1 \\
x_{1/2}^2 &= 25 \\
x_1 &= 5 \\
x_2 &= -5
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.6.13 Aufgabe F13

In diesem Lösungsversuch stecken **zwei** Fehler.

$$\begin{aligned}
0{,}072x^2 - 0{,}6 &= 0 && | + 0{,}6 \\
0{,}072x^2 &= 0{,}06 && | - 0{,}072 \\
x^2 &= 0{,}528 && | \sqrt{\ } \\
x &= 0{,}73
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.6.14 Aufgabe F14

Eine Quadratische Gleichung soll gelöst werden.

$$\begin{aligned}
36x^2 - 720x + 5400 &= 0 && | : 36 \\
x^2 - 20x + 150 &= 0 && | \ p\text{-}q\text{-Formel} \\
x_{1/2} &= \frac{20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2 - 150} \\
&= 10 \pm \sqrt{-50} \\
x &= 10
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.7 Wurzelgleichungen

2.7.1 Aufgabe G1

$$\begin{aligned}
41 \cdot \sqrt{x^2 + 10} \cdot 0 &= -40x + (-9) + 9 \\
41 \cdot \sqrt{x^2 + 10} \cdot 0 &= -40x \quad |(\ )^2 \\
1681 \cdot (x^2 + 10) \cdot 0 &= 1600x^2 \\
1681x^2 + 16810 \cdot 0 &= 1600x^2 \quad | - 1600x^2 \\
81x^2 + 16810 \cdot 0 &= 0 \quad | : 81 \\
x^2 + 207{,}53 \cdot 0 &= 0 \\
x^2 &= 0 \quad |\sqrt{\ } \\
0 &= x^2 \quad |\sqrt{\ } \\
x &= 0
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.7.2 Aufgabe G2

$$\begin{aligned}
12 \cdot \sqrt{x^2 + 10} \cdot 0 &= -40x \quad | \ (\ )^2 \\
144 \cdot (x^2 + 10) \cdot 0 &= 1600x^2 \\
144x^2 + 1440 \cdot 0 &= 1600x^2 \quad | - 1600x^2 \\
1456x^2 + 1440 \cdot 0 &= 0 \quad | : 1456 \\
x^2 + \frac{1440}{1456} \cdot 0 &= 0 \\
x^2 &= 0 \\
x &= 0
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.8 Polynome höheren Grades

2.8.1 Aufgabe H1

$$\begin{aligned}
\frac{2}{125}x^3+4 &= \frac{6}{5}x \quad \left| :\frac{6}{5}\right. \\
\frac{1}{75}x^3+3\frac{1}{3} &= x \quad \left| -3\frac{1}{3}\right. \\
\frac{1}{75}x^3 &= x-3\frac{1}{3} \quad |:x \\
\frac{1}{75}x^2 &= -3\frac{1}{3x} \quad \left| +3\frac{1}{3}x\right. \\
\frac{1}{75}x^2+3\frac{1}{3}x &= 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.8.2 Aufgabe H2

$$\begin{aligned}
(3x-17)\cdot(x-7)\cdot(x+7)-(x-11)\cdot 3 &= (2x-11)\cdot 3\cdot(x+7) \\
(3x-17)\cdot(x^2-49)-3x-33 &= (6x-33)\cdot(x+7) \\
3x^2-147x-17x^2+833-3x-33 &= (6x^2+42x-33x-231 \\
-14x^2+800-144x &= 6x^2+9x-231 && |+14x^2 \\
800-144x &= 20x^2+9x-231 && |+144x+231 \\
1031 &= 20x^2+153x && |\sqrt{\ } \\
33{,}11 &= 4{,}47x+12{,}37x \\
33{,}11 &= 16{,}84x && |:16{,}84 \\
1{,}97 &= x
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.8.3 Aufgabe H3

In diesem Lösungsversuch stecken **zwei** Fehler.

$$\begin{aligned}
-0{,}1x^4+0{,}4x^3 &= 0 \\
x^2(-0{,}1x^2+0{,}4x) &= 0 \\
-0{,}1x^2+0{,}4x &= 0 && |:(-0{,}1) \\
x^2-0{,}4x &= 0 \\
x_{1/2} &= 0{,}2\pm\sqrt{0{,}04} \\
&= 0{,}2\pm 0{,}2 \\
x_1=0 \quad & \quad x_2=0{,}4
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.8.4 Aufgabe H4

In diesem Lösungsversuch stecken (je nach Zählweise) **mindestens drei** Fehler.

$$
\begin{array}{rcll}
-0{,}1x^4 + 0{,}4x^3 & = & -10x - 2 & \quad | + 10x + 2 \\
-0{,}1x^4 + 0{,}4x^3 + 10x + 2 & = & 0 & \quad | : x^2 \\
-0{,}1x^2 + 0{,}4x + 10 + 2 & = & 0 & \\
-0{,}1x^2 + 0{,}4x + 12 & = & 0 & \\
x_{1/2} & = & -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} & \\
x_{1/2} & = & -0{,}2 \pm \sqrt{0{,}2^2 - 12} & \\
x_{1/2} & = & -0{,}2 \pm \sqrt{-11{,}96} & \\
x & = & -0{,}2 &
\end{array}
$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.8.5 Aufgabe H5

In diesem Lösungsversuch stecken **drei** Fehler.

$$
\begin{array}{rcll}
5x^4 - 45x^2 + 2700 & = & 0 & \quad |k = x^2 \\
5k^2 - 45k + 2700 & = & 0 & \\
x^2_{1/2} & = & \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 45} & \\
x_1^2 & = & 9{,}66 & \\
x_2^2 & = & -4{,}66 & \\
x_1 & = & \sqrt{9{,}66} & \\
x_1 & = & 3{,}10 & \\
x_2 & = & \sqrt{4{,}66} & \\
x_2 & = & 2{,}15 &
\end{array}
$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.9 Lineargleichungssysteme

2.9.1 Aufgabe I1

$$
\begin{array}{crrcrl}
(1) & 5x & -12y & = & -9 & \\
(2) & -7x & +4y & = & -13 & | \cdot 3 \\
\hline
(1) & 5x & -12y & = & -9 & | \\
(2) & -21x & +12y & = & -39 & |+ \\
\hline
(3) & -16x & & = & -48 & | : (-16) \\
 & y & & = & 3 &
\end{array}
$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.9.2 Aufgabe I2

In diesem Lösungsversuch steckt eigentlich nur **ein** Fehler, der aber mehrfach gemacht wurde.

$$\begin{array}{lrrrrcl}
(1) & 3a\cdot 0^2 & +2b\cdot 0 & +c & & = & 0\\
(2) & 6a\cdot 1 & +2b & & & = & 0\\
(3) & a\cdot 0^3 & +b\cdot 0^2 & +c\cdot 0 & +d & = & -4\\
(4) & a\cdot 1^3 & +b\cdot 1^1 & +c\cdot 1 & +d & = & 2\\
\hline
(1) & 3a & +2b & +c & & = & 0\\
(2) & 6a & +2b & & & = & 0\\
(3) & a & +b & +c & +d & = & -4\\
(4) & a & +b & +c & +d & = & 2\\
\hline
\end{array}$$

(Hier wurde abgebrochen, weil Gleichung (3) und Gleichung (4) offensichtlich im Widerspruch zueinander stehen.)

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.9.3 Aufgabe I3

In diesem Lösungsversuch stecken **zwei** Fehler.

$$\begin{array}{rcl}
0 & = & 4a\cdot 3^3+3b\cdot 3^3 \quad = \quad 108a+27b\\
108a & = & 27b\\
4a & = & b
\end{array}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.9.4 Aufgabe I4

In diesem Lösungsversuch stecken **zwei** Fehler.

$$\begin{array}{rcll}
a\cdot 3^4+b\cdot 3^3 & = & 2{,}7 & \\
a\cdot 3^4 & = & 2{,}7-b\cdot 3^3 & |:3^3\\
a\cdot 3 & = & \dfrac{2{,}7}{3}-b & |:3\\
a & = & 0{,}3\cdot b &
\end{array}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.9.5 Aufgabe I5

In diesem Lösungsversuch steckt **ein** Fehler.

$$\begin{array}{lrrcll}
(1) & 10a & +2b & = & -8 & |\\
(2) & 18a & +2b & = & 0 & |-\\
\hline
 & -8a & & = & -8 & |:(-8)\\
 & a & & = & -1 &
\end{array}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.9.6 Aufgabe I6

Dies ist ein Ausschnitt aus einer Aufgabe, bei der ein Lineargleichungssystem gelöst werden musste. In diesem Lösungsversuch stecken **zwei** Fehler.

$$
\begin{array}{rrcll}
(1) & 0 & = & -12 + 6b + 2c & \\
\hline
(2) & 3 & = & -1 + b + c - 8 & | \cdot 6 \\
 & 18 & = & -6 + 6b + 12c & \\
(1) & 0 & = & -12 + 6b + 2c & \\
\hline
(2) - (1) & 18 & = & -18 + 10c & | + 18 \\
 & 36 & = & 10c & | : 10 \\
 & 3{,}6 & = & c &
\end{array}
$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.10 Komplexe Rechnung

2.10.1 Aufgabe J1

$$
\begin{aligned}
\underline{Z}_1 &= \frac{10\,\Omega \cdot jX_L}{10\,\Omega + jX_L} \\
\underline{Z} &= -jX_C + \underline{Z}_1 \\
\underline{Z} &= \frac{-jX_C + 10\,\Omega \cdot jX_L}{10\,\Omega + jX_L} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.10.2 Aufgabe J2

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\underline{z} &= -3 \\
\mathrm{Im}\underline{z} &= 4 \\
|\underline{z}|^2 &= (\mathrm{Re}\underline{z})^2 + (\mathrm{Im}\underline{z})^2 \\
|\underline{z}|^2 &= -3^2 + 4^2 \\
|\underline{z}| &= \sqrt{9 + 16} \\
|\underline{z}| &= \sqrt{25} \\
|\underline{z}| &= 5
\end{aligned}
$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.10.3 Aufgabe J3

$$\begin{aligned} 15(4\underline{x}+j) &= 0 && \mid -15 \\ 4\underline{x}+j &= -15 && \mid -j \\ 4\underline{x} &= -j15 && \mid :4 \\ \underline{x} &= -j3{,}75 \end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.10.4 Aufgabe J4

$$\begin{aligned} 15(4\underline{x}+j) &= 0 && \mid :15 \\ 4\underline{x}+j &= 0 && \mid -4\underline{x} \\ j &= -4\underline{x} && \mid \cdot(-4) \\ -j4 &= \underline{x} \end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.10.5 Aufgabe J5

$$\begin{aligned} 10(3\underline{x}-j) &= 0 && \mid :10 \\ 3\underline{x}-j &= 0 && |3 \\ \underline{x}-j &= 0 && \mid +j \\ \underline{x} &= j \end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.10.6 Aufgabe J6

In diesem Lösungsversuch stecken **zwei** Fehler.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\underline{Z}_1} &= \frac{1}{\underline{R}_2}+\frac{1}{\underline{X}_C} && \mid \cdot \underline{Z}_1 \cdot \underline{R}_2 \cdot \underline{X}_C \\ \underline{R}_2 \cdot \underline{X}_C &= \underline{Z}_1 \cdot \underline{X}_C + \underline{Z}_1 + \underline{R}_2 \\ \underline{R}_2 \cdot \underline{X}_C &= \underline{Z}_1 \cdot (\underline{X}_C + \underline{R}_2) \end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.11 Vektorrechnung

2.11.1 Aufgabe K1

$$\begin{aligned}
a_1 &= -30 \\
a_2 &= 40 \\
a_3 &= -120 \\
|\vec{a}| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \\
&= \sqrt{-30^2 + 40^2 - 120^2} \\
&= \sqrt{16900} \\
&= 130
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.11.2 Aufgabe K2

$$\begin{aligned}
|\vec{a}| &= \sqrt{(-40)^2 + (-3)^2 + (9)^2} \\
|\vec{a}| &= 1690 \\
|\vec{a}| &\approx 41{,}11
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.12 Integralrechnung

2.12.1 Aufgabe L1

In diesem Lösungsversuch steckt **ein** Fehler.

$$\begin{aligned}
A &= \int\limits_{-2}^{0} x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \; dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{6}{3}x^3 + \frac{12}{2}x^2 + 8x\right]_{-2}^{0} \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 8x\right]_{-2}^{0} \\
&= \left(\frac{1}{4} \cdot 0^4 + 2 \cdot 0^3 + 2 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot (-2)^4 + 2 \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2)\right) \\
&= 20\,\mathrm{FE}
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

2.12.2 Aufgabe L2

Es gibt hier zwei Fehler. Der erste ist sicher ganz einfach zu finden.

$$\begin{aligned}
A &= \int\limits_{-5}^{5} 0{,}006x^4 - 0{,}3x^2 + 5\,dx \\
&= \left[0{,}006x^4 - 0{,}3x^2 + 5x\right]_{-5}^{5} \\
&= (0{,}006 \cdot 5^4 - 0{,}3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5) - (0{,}006 \cdot (-5)^4 - 0{,}3 \cdot (-5)^2 + 5 \cdot (-5)) \\
&= 21{,}25 - (-28{,}75) \\
&= 50\,\mathrm{m}^2
\end{aligned}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

3 Fehler in Lösungen kompletter Aufgaben

3.1 Aufgabe 1 (Lösen einer Bruchgleichung)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge dieser Gleichung:

$$\frac{2x+3}{x-4} - 2 = \frac{3x-4}{x-4}$$

Die Lösung des Schülers:

$$\begin{array}{rcll}
\frac{2x+3}{x-4} - 2 & = & \frac{3c-4}{x-4} & \mid \cdot (x-4) \\
(2x+3) - (2) \cdot (x-4) & = & (3x-4) & \\
2x+3-(2x-8) & = & 3x-4 & \\
2x+3-2x+8 & = & 3x-4 & \\
x+11 & = & 3x-4 & \mid -3x-11 \\
-2x & = & -15 & \mid : (-2) \\
x & = & \frac{15}{2} & \\
L & = & \{\frac{15}{2}\} &
\end{array}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

3.2 Aufgabe 2 (Lösen einer Bruchgleichung)

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge dieser Gleichung:

$$\frac{3x-7}{2x-8} - \frac{8-x}{3x-12} + \frac{3x-23}{16-4x} = \frac{5x-7}{6x-24}$$

Lösung des Schülers:

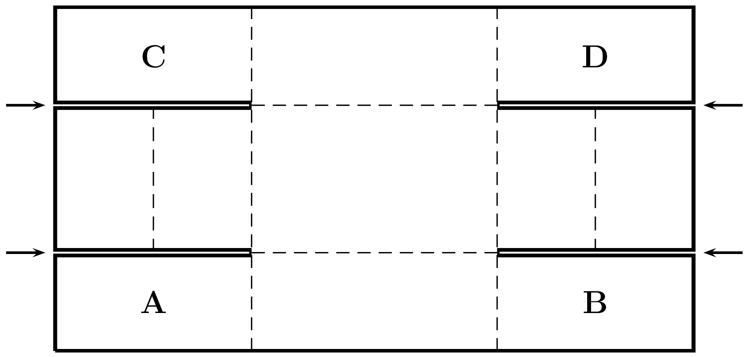
Nenneranalyse:

$$\begin{array}{rcl|l}
2x-8 & = & 2\cdot(x-2^2) & \text{EF} = 3\cdot(-4)\cdot 6 = -76 \\
3x-12 & = & 3\cdot(x-2^2) & \text{EF} = 2\cdot(-4)\cdot 6 = -48 \\
-4x+16 & = & (-4)\cdot(+x-2^2) & \text{EF} = 2\cdot 3\cdot 6 = 36 \\
6x-24 & = & 6\cdot(x-2^2) & \text{EF} = 2\cdot 3\cdot(-4) = -24 \\
\hline
\text{HN} & = & 2\cdot 3\cdot(-4)\cdot 6\cdot(x-2^2) & D = \mathbb{R}\setminus\{4\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
\frac{3x-7}{2x-8} - \frac{8-x}{3x-12} + \frac{3x-23}{16-4x} & = & \frac{5x-7}{6x-24} & |\cdot\text{HN} \\
(3x-7)\cdot(-76) - (8-x)(-48) + (3x-23)\cdot 36 & = & (5x-7)\cdot(-24) & \\
-228x + 532 + 384 - 48x + 108x - 828 & = & -120x + 168 & \\
-168x + 88 & = & -120 + 168 & | + 120x - 88 \\
-48x & = & 80 & | : (-48) \\
x & = & \frac{48}{80} & \\
x & = & \frac{3}{5} & \\
L & = & \{\frac{3}{5}\} &
\end{array}$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

3.3 Aufgabe 3 (Extremwertaufgabe)



Aus einem rechteckigen Stück Pappe mit den Abmessungen 30 mal 60 Zentimeter soll ein oben offener quaderförmiger Karton hergestellt werden. Dazu wird die Pappe an den vier mit Pfeil gekennzeichneten Stellen eingeschnitten. Danach werden die vier dabei entstandenden Laschen **A**, **B**, **C** und **D** rechtwinklig nach oben hochgebogen. Anschließend wird die Pappe entlang der gestrichelten Linien in der Verlängerung der Einschnitte rechtwinklig hochgebogen. Dadurch kommt Lasche **A** auf Lasche **C** und Lasche **B** auf Lasche **D** zu liegen. Falls die Laschen zu lang sind, werden sie zuvor noch ein Stück gekürzt, dass es passt. Zum Schluss werden noch die Seitenteile rechts und links hochgebogen und um die Laschen **A/C** bzw. **B/D** zur Innenseite des dabei entstehenden Kartons herumgefaltet. Das jeweilige Seitenteil bedeckt dadurch die beiden zugehörigen Eck-Laschen sowohl von außen als auch von innen genau ganz ohne irgendwo „überzustehen“ oder eine Lücke zu lassen. Die Seitenteile sind also genau doppelt so lang, wie die Breite der Eck-Laschen.

Wie tief müssen die Einschnitte gemacht werden, damit ein Behälter mit **möglichst großem Volumen** entsteht? Geben Sie auch die **Abmessungen** des Behälters (Länge, Breite und Höhe) sowie sein **Volumen** an! Müssen die Laschen **A** bis **D** tatsächlich gekürzt werden?

Die Lösung des Schülers:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{HB:} & V & = & a \cdot b \cdot h \\
\hline
\text{NB1:} & a + 4h & = & 60\,\text{cm} \\
\text{NB2:} & b + 8h & = & 30\,\text{cm} \\
\hline
 & a & = & \dfrac{60\,\text{cm}}{4h} \\
 & b & = & \dfrac{30\,\text{cm}}{8h} \\
\hline
 & V(h) & = & \dfrac{60\,\text{cm}}{4h} \cdot \dfrac{30\,\text{cm}}{8h} \cdot h \\
 & V(h) & = & 60\,\text{cm} \cdot 4h^{-1} \cdot 30\,\text{cm} \cdot 8h^{-1} \cdot h \\
 & V'(h) & = & -60\,\text{cm} \cdot 4h^{-2} \cdot (-30\,\text{cm}) \cdot 8h^{-2}
\end{array}$$

Nun wird durch Nullsetzen der Ableitung ein Extremwert gesucht.

$$
\begin{aligned}
V'(h_E) &= 0 \\
-60\,\mathrm{cm} \cdot 4h_E^{-2} \cdot (-30\,\mathrm{cm}) \cdot 8h_E^{-2} &= 0 \\
-30\,\mathrm{cm} \cdot 8h_E^{-2} &= 60\,\mathrm{cm} \cdot 4h_E^{-2} \\
\frac{-30\,\mathrm{cm} \cdot 8h_E^{-2}}{4h_E^{-2}} &= 60\,\mathrm{cm} \\
\frac{-30\,\mathrm{cm} \cdot 8h_E}{4h_E} &= 60\,\mathrm{cm} \\
4h_E &= \frac{60\,\mathrm{cm}}{30\,\mathrm{cm} \cdot 8h_E} \\
4h_E \cdot 8h_E &= \frac{60\,\mathrm{cm}}{30\,\mathrm{cm}} \\
32h_E &= 2\,\mathrm{cm} \\
h_E &= 0{,}0625
\end{aligned}
$$

Die Auflösung ist hier zu finden.

3.4 Aufgabe 4 (Komplexe Rechnung)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Komplexen Gleichung!

$$(2\underline{x} + j3) \cdot (3\underline{x} - 4) - 9 - j11 = (3\underline{x} + j2) \cdot (2\underline{x} - 5) + 2 + j16$$

Lösung des Schülers:

$$\begin{aligned}
(2\underline{x} + j3) \cdot (3\underline{x} - 4) - 9 - j11 &= (3\underline{x} + j2) \cdot (2\underline{x} - 5) + 2 + j16 \\
(2\underline{x} + j3) \cdot (3\underline{x} - 4) - 11 &= (3\underline{x} + j2) \cdot (2\underline{x} - 5) + j27 \\
(6\underline{x}^2 - 8\underline{x} + j8\underline{x} - j12) - 11 &= (6\underline{x}^2 - 15\underline{x} + j10 + j4\underline{x}) + j27 \\
(-66\underline{x}^2 + 88\underline{x} - j\underline{x}99 + j152) &= (162j\underline{x}^2 - 405j\underline{x} + j270 + j^2 108\underline{x})
\end{aligned}$$

(Der Lösungsversuch wurde hier abgebrochen.)

Die Auflösung ist hier zu finden.

3.5 Aufgabe 5 (Komplexe Rechnung)

Aufgabe zur Komplexen Rechnung:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Komplexen Gleichung!

$$\frac{4\underline{x} - 17 - j6}{6\underline{x} - 12} = \frac{2\underline{x} - 2 - j3}{3\underline{x} - j5}$$

Lösung des Schülers:

$$\begin{aligned}
\frac{4\underline{x} - 17 - j6}{6\underline{x} - 12} &= \frac{2\underline{x} - 2 - j3}{3\underline{x} - j5} \quad \Big| - \left(\frac{2\underline{x} - 2 - j3}{3\underline{x} - j5}\right) \\
\frac{4\underline{x} - 17 - j6 - 2\underline{x} + 2 + j3}{6\underline{x} - 12 - 3\underline{x} + j5} &= 0 \\
\frac{2\underline{x} - 15 - j3}{3\underline{x} - 12 + j5} &= 0
\end{aligned}$$

(Der Lösungsversuch wurde hier abgebrochen.)

Die Auflösung ist hier zu finden.

4 Analyse der Fehler in fehlerhaften Lösungssequenzen

4.1 Umstellen von Termen

4.1.1 Aufgabe A1

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -3 \cdot \frac{(x-0)\cdot\left(x-\frac{5}{3}\right)\cdot(x+1)}{(x-3)\cdot(x+1)} \\
f(x) &= \frac{(-3x-0)\cdot(-3x+5)\cdot(-3x-3)}{(-3x+9)\cdot(-3x-3)} \\
f(x) &= \frac{-3x\cdot\left(x-\frac{5}{3}\right)\cdot(x+1)}{(x-3)\cdot(x+1)} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Dieses Beispiel ist wirklich kurios! Obwohl hier gleich mehrere schlimme Fehler gemacht wurden, ist das Ergebnis sogar zufällig richtig! Worum geht es?

- Eine Bruchrechenregel besagt: *Ein Bruch wird mit einer Zahl multipliziert, indem man die Zahl mit dem **Zähler** multipliziert.* Hier wurde **sowohl der Zähler, als auch der Nenner** mit (-3) multipliziert.

- Sowohl im Zähler als auch im Nenner wurde falsch multipliziert. In der Algebra gilt die Regel: *Ein **Produkt** wird mit einer Zahl multipliziert, indem die Zahl mit **einem der Faktoren** multipliziert wird.* Hier wurde **jeder Faktor** mit (-3) multipliziert. Dadurch wurde der Zähler mit $(-3)^3$ und der Nenner mit $(-3)^2$ multipliziert. Kürzt man nun mit $(-3)^2$, dann bleibt der Faktor (-3) im Zähler übrig, und erstaunlicherweise ist wieder alles richtig!

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.1.2 Aufgabe A2

$$\begin{aligned}
f(x) &= -3 \cdot \frac{x^2 - \frac{5}{3}x}{x-3} \\
f(x) &= \frac{-3x^2 + 5x}{-3x + 9} \quad \text{(falsch)} \\
f(x) &= \frac{-3x^2 + 5x}{x - 3} \quad \text{(korrigiert)} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Die entsprechende Bruchrechenregel lautet: *Ein Bruch wird mit einer Zahl multipliziert, indem man die Zahl mit dem **Zähler** multipliziert.* Hier wurde **sowohl der Zähler, als auch der Nenner** mit (-3) multipliziert.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.1.3 Aufgabe A3

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(6x-5)\cdot(x-3)-(3x^2-5x)\cdot 1}{(x-3)^2} \\
f'(x) &= \frac{6x^2-18x-5x+15-3x^2+5x}{\color{red}{x^2-9}} && \text{(falsch)} \\
f'(x) &= \frac{6x^2-18x-5x+15-3x^2+5x}{\color{green}{x^2-6x+9}} && \text{(korrigiert)} \\
f'(x) &= \frac{3x^2-18x+15}{x^2-6x+9}
\end{aligned}$$

Hier wurde gegen die **zweite Binomische Formel** verstoßen.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.1.4 Aufgabe A4

$$
\begin{aligned}
f(x) &= k \cdot \frac{(x+1)(x-0)\left(x-\frac{5}{3}\right)}{(x+1)(x-3)} \\
&= k \cdot \frac{x^2+1x\left(x-\frac{5}{3}\right)}{x^2-3x+x-3} \quad \text{(falsch)} \\
&= k \cdot \frac{(x^2+x)\left(x-\frac{5}{3}\right)}{x^2-3x+x-3} \quad \text{(korrigiert)} \\
&= k \cdot \frac{x^3-\frac{5}{3}x^2+x^2-\frac{5}{3}x}{x^2-2x-3} \\
&= k \cdot \frac{x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x}{x^2-2x-3}
\end{aligned}
$$

Auch, wenn es kleinlich erscheint – hier wurden die Klammern vergessen. Daher ist auch der nächste Schritt **falsch**! Hier wurde nämlich so gerechnet, als ob doch die Klammern gesetzt wären.

Die 1, die vor dem x steht, ist überflüssig. Deshalb lasse ich sie weg, auch wenn es kein Fehler ist, wenn man sie einsetzt.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.1.5 Aufgabe A5

$$P_1(-3|5) \qquad P_2(5|-7)$$

$$\begin{aligned}
m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
m &= \frac{-7-5}{5-(-3)} \\
m &= \frac{-12}{-8} \quad \text{(falsch)} \\
m &= \frac{-12}{8} \quad \text{(korrigiert)} \\
m &= -1,5
\end{aligned}$$

Falsches Rechnen mit Minuszeichen war der Fehler. In der nächsten Zeile steht aber schon der nächste Fehler! Wäre $\frac{-12}{-8}$ richtig gewesen, dann hätte es in der letzten Zeile $+1,5$ und nicht $-1,5$ heißen müssen. Der zweite Fehler hebt den ersten wieder auf!

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.1.6 Aufgabe A6

$$
\begin{aligned}
V &= (60\,\text{cm} - 2x) \cdot (90\,\text{cm} - 3x) \cdot x \cdot \frac{1}{2} \\
V &= \frac{1}{2} \cdot 5\,400\,\text{cm}^2 - 180\,\text{cm}x + 60\,\text{cm}x - 180\,\text{cm}x + 6x^2 - 2x^2 + 90\,\text{cm}x - 3x^2
\end{aligned}
$$

Das ist völlig falsch. Hier wurden offensichtlich zu viele Schritte auf einmal versucht. Sinnvollerweise multipliziert man im ersten Schritt die beiden Klammern aus, fasst anschließend in der Klammer zusammen und multipliziert im nachfolgenden Schritt den Klammerausdruck mit dem letztem Faktor $\frac{x}{2}$.

$$
\begin{aligned}
V &= (60\,\text{cm} - 2x) \cdot (90\,\text{cm} - 3x) \cdot x \cdot \frac{1}{2} \\
V &= (5\,400\,\text{cm}^2 - 180\,\text{cm} \cdot x - 180\,\text{cm} \cdot x + 6x^2) \cdot \frac{x}{2} \\
V &= (5\,400\,\text{cm}^2 - 360\,\text{cm} \cdot x + 6x^2) \cdot \frac{x}{2} \\
V &= 2\,700\,\text{cm}^2 \cdot x - 180\,\text{cm} \cdot x^2 + 3x^3
\end{aligned}
$$

Gehen wir nun davon aus, dass der erste Schritt richtig gewesen wäre. Dann kommt schon bald der nächste Fehler.

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2} \cdot 5\,400\,\text{cm}^2 - 180\,\text{cm}x + 60\,\text{cm}x - 180\,\text{cm}x + 6x^2 - 2x^2 + 90\,\text{cm}x - 3x^2 \\
V &= \frac{1}{2} \cdot 5\,400\,\text{cm}^2 - 210\,\text{cm}x + x^2 \\
V &= \frac{1}{2} \cdot x^2 + 5\,400\,\text{cm}^2 - 210\,\text{cm}x \qquad \text{(falsch)} \\
V &= x^2 + 2\,700\,\text{cm}^2 - 210\,\text{cm}x \qquad \text{(korrigiert)}
\end{aligned}
$$

Scheinbar wurde hier nur der dritte Term nach vorne geholt. Das wäre aber nur richtig, wenn hinter $\frac{1}{2}$ eine Klammer geöffnet worden wären, die am Zeilenende wieder geschlossen würde.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.1.7 Aufgabe A7

$$\begin{array}{rcll} f'(x) & = & 2 \cdot 6 \cdot (2x-4)^5 & \\ f'(x) & = & 2 \cdot 6 \cdot (32x^5 - 1024) & \text{(falsch)} \\ f'(x) & = & 2 \cdot 6 \cdot (32x^5 - 320x^4 + 1280x^3 - 2560x^2 + 2560x - 1024) & \text{(korrigiert)} \end{array}$$

Hier wurde eine Potenzregel unterstellt, die es nicht gibt. Weil ja schon gilt:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

und nicht:

$$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$$

gilt Entsprechendes erst recht allgemein:

$$(a+b)^n \neq a^n + b^n$$

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.1.8 Aufgabe A8

$$\begin{array}{rcll} f'(x) & = & 6 \cdot (2x-4)^5 \cdot 2x^0 & \\ & = & 6 \cdot (10x^5 - 20) \cdot 2x & \text{(falsch)} \\ & = & 6 \cdot (32x^5 - 320x^4 + 1280x^3 - 2560x^2 + 2560x - 1024) \cdot 2 & \text{(korrigiert)} \end{array}$$

Die fünfte Potenz des Summenterms wurde falsch umgeformt. Es ist fast der gleiche Fehler wie bei Aufgabe 40, jedoch wurde hier zusätzlich noch Potenzieren mit Multiplizieren verwechselt. Besser wäre es, man multipliziert die Klammer nicht aus. Außerdem ist $x^0 = 1$ und nicht x.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.2 Rechnen mit Einheiten

4.2.1 Aufgabe B1

$$\begin{aligned}
A &= (2500\,\mathrm{m}^2 - 3750\,\mathrm{m}^2 + 2500\,\mathrm{m}^2) - (156{,}25\,\mathrm{m}^2 - 937{,}5\,\mathrm{m}^2 + 1250\,\mathrm{m}^2)\\
A &= 1250\,\mathrm{m}^2 - 468{,}75\,\mathrm{m}^2\\
A &= 781{,}25\,\mathrm{m}^2 \cdot 0{,}8\,\mathrm{m} \quad \text{(falsch)}\\
A &= 781{,}25\,\mathrm{m}^2 \quad \text{(korrigiert)}\\
V &= 781{,}25\,\mathrm{m}^2 \cdot 0{,}8\,\mathrm{m}\\
V &= 625\,\mathrm{m}^3
\end{aligned}$$

Hier wurde das Gleichheitszeichen missbraucht! Zunächst wurde eine Fläche A berechnet, die anschließend mit $0,8\,\mathrm{m}$ multipliziert werden soll, um das zugehörige Volumen V zu berechnen. Das geht nicht durch einfaches Anhängen des Faktors, denn es steht ja noch A vor dem Gleichheitszeichen und nicht V.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.2.2 Aufgabe B2

$$\begin{aligned}
V &= 12{,}08\,\mathrm{m}^2 \cdot 80\,\mathrm{cm}\\
&= 12{,}08\,\mathrm{m}^2 \cdot 0{,}08\,\mathrm{m}\\
&= 12{,}08\,\mathrm{m}^2 \cdot 0{,}8\,\mathrm{m}\\
&= 9{,}664\,\mathrm{m}^3
\end{aligned}$$

Die Einheitenumrechnung hatte nicht geklappt. 80 cm sind 0,8 m und nicht 0,08 m.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.2.3 Aufgabe B3

$$\begin{aligned} 0 &= 40\,\text{cm} + 32\,\text{dm}^3 \cdot (-2t^{-2}) \\ &= 40\,\text{cm} + 32\,\text{dm}^3 \cdot \frac{-2}{2t} && \text{(fehlerhaft)} \\ &= 40\,\text{cm} + 32\,\text{dm}^3 \cdot \frac{-2}{t^2} && \text{(korrigiert)} \end{aligned}$$

Angenommen, der Schritt wäre richtig, folgt der nächste Fehler sofort:

$$\begin{aligned} 0 &= 40\,\text{cm} + 32\,\text{dm}^3 \cdot \frac{-2}{2t} && |\cdot 2t \\ 2t &= 40\,\text{cm} + 32\,\text{dm}^3 \cdot (-2t) && |:2 \quad \text{(fehlerhaft)} \\ 0 &= 40\,\text{cm} + 32\,\text{dm}^3 \cdot (-2t) && |:2 \quad \text{(korrigiert)} \end{aligned}$$

Vermutlich weil die Null auf der linken Seite des Gleichheitszeichens nicht hingeschrieben worden war, hat der Schüler nicht bemerkt, dass der Term $(-2t)$ links mit Null multipliziert werden musste.

Der nächste Fehler folgt schnell. Wir nehmen wieder an, der vorangegangene Schritt sei richtig gewesen.

$$\begin{aligned} 2t &= 40\,\text{cm} + 32\,\text{dm}^3 \cdot (-2t) && |:2 \\ t &= 20\,\text{cm} + 16\,\text{dm}^3 \cdot (-1) && \text{(fehlerhaft)} \\ t &= 20\,\text{cm} + 32\,\text{dm}^3 \cdot (-t) && \text{(korrigiert)} \end{aligned}$$

Hier wurden gleich zwei Fehler gleichzeitig gemacht:

- Im rechten Produkt wurden **beide Faktoren** halbiert.
- Im rechten Produkt wurde auch durch t dividiert.

Schaun wir uns den nächsten Schritt an:

$$\begin{aligned} t &= 20\,\text{cm} + 16\,\text{dm}^3 \cdot (-1) \\ t &= 20\,\text{cm} + 16\,000\,\text{cm}^3 \cdot (-1) \\ t &= 20\,\text{cm} + 25{,}5\,\text{cm} \cdot (-1) && \text{(fehlerhaft, nicht korrigierbar!)} \end{aligned}$$

Da die Einheiten aufgrund einiger Fehler zuvor nicht mehr zusammenpassen, wurden hier kurzerhand Kubikzentimeter durch Ziehen der dritten Wurzel in Zentimeter „umgerechnet“, also ein Volumen in eine Länge verwandelt!!

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.2.4 Aufgabe B4

$$\begin{array}{rcll} V &=& (30\,\text{cm} - 2h) \cdot (60\,\text{cm} - 4h) \cdot (h) & \\ V &=& 1\,800\,\text{cm} - 120h + 30h - 120h + 8h^2 - 2h^2 + 60h - 4h^2 & \text{(fehlerhaft)} \\ V &=& 1\,800\,\text{cm}^2 \cdot h - 240\,\text{cm} \cdot h^2 + 8h^3 & \text{(korrigiert)} \end{array}$$

Anmerkung: Die Klammern um das einzelne (h) am Zeilenende waren eine Idee des Schülers. Sie sind natürlich überflüssig, wenn auch nicht falsch.

Hier war der Schüler beim Auflösen des Produktes mit **drei Faktoren** offenbar hoffnungslos überfordert. Es ist kaum nachvollziehbar, wie er zu diesen Termen gekommen ist.

Besser (oder einfacher) ist es immer, schrittweise vorzugehen. Man kann beispielsweise zuerst die ersten beiden Faktoren miteinander multiplizieren und erst danach das Ergebnis im nächsten Schritt mit den dritten Faktor multiplizieren. Das sähe dann etwa so aus:

$$\begin{array}{rcl} V &=& (30\,\text{cm} - 2h) \cdot (60\,\text{cm} - 4h) \cdot (h) \\ &=& (1\,800\,\text{cm}^2 - 120\,\text{cm} \cdot h - 120\,\text{cm} \cdot h + 8h^2) \cdot h \\ &=& (1\,800\,\text{cm}^2 - 240\,\text{cm} \cdot h + 8h^2) \cdot h \\ V &=& 1\,800\,\text{cm}^2 \cdot h - 240\,\text{cm} \cdot h^2 + 8h^3 \end{array}$$

Alternativ hätte man auch zuerst die zweite und dritte Klammer zusammenfassen können. Das sähe dann etwa so aus:

$$\begin{array}{rcl} V &=& (30\,\text{cm} - 2h) \cdot (60\,\text{cm} - 4h) \cdot (h) \\ &=& (30\,\text{cm} - 2h) \cdot (60\,\text{cm} \cdot h - 4h^2) \\ &=& 1\,800\,\text{cm}^2 \cdot h - 120\,\text{cm} \cdot h^2 - 120\,\text{cm} \cdot h^2 + 8h^3 \\ V &=& 1\,800\,\text{cm}^2 \cdot h - 240\,\text{cm} \cdot h^2 + 8h^3 \end{array}$$

Kümmern wir uns nun aber wieder um die ursprüngliche Lösung. Nehmen wir an, der erste Schritt sei richtig gewesen. Ein weiterer Fehler folgt:

$$\begin{array}{rcll} V &=& 1\,800\,\text{cm} - 120h + 30h - 120h + 8h^2 - 2h^2 + 60h - 4h^2 & \\ V &=& 1\,800\,\text{cm} - 150h + 8h^2 & \text{(fehlerhaft)} \\ V &=& 1\,800\,\text{cm} - 150h + 2h^2 & \text{(korrigiert)} \end{array}$$

Ein einfacher Fehler, hier wurde nur falsch addiert.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.3 Lineare Gleichungen

4.3.1 Aufgabe C1

$$\begin{aligned} -40x - 3y - 27y &= 0 \\ -40x - 30y &= 0 \quad + 40x \\ -30y &= 40x \quad \mid : (-30) \\ y &= {\color{red}-\frac{4}{3}} \quad \text{(falsch)} \\ y &= {\color{green}-\frac{4}{3}x} \quad \text{(korrigiert)} \end{aligned}$$

Beim Dividieren wurde hier einfach vergessen, dass das x ja auch noch übrig bleibt.
Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.3.2 Aufgabe C2

$$\begin{aligned} 75a + 10 \cdot 0 + 0 &= 1{,}2 \\ 75a &= 1{,}2 \quad \mid : 75 \\ a &= {\color{red}62{,}5} \quad \text{(falsch)} \\ a &= {\color{green}0{,}016} \quad \text{(korrigiert)} \end{aligned}$$

Hier wurde rechts versehentlich $\frac{75}{1{,}2}$ anstelle von $\frac{1{,}2}{75}$ gerechnet.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.3.3 Aufgabe C3

$$\begin{aligned} 6 &= m \cdot 5 + 0 \quad \mid {\color{green}:}5 \\ {\color{red}\frac{5}{6}} &= m \quad \text{(falsch)} \\ {\color{green}\frac{6}{5}} &= m \quad \text{(korrigiert)} \end{aligned}$$

Das war einfach. Im Kommentar fehlte das Divisionszeichen, daher wurde vermutlich im Ergebnis der Kehrwert eingesetzt.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.3.4 Aufgabe C4

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{25} + 2b &= 0 \quad \Big| -\frac{4}{25} \\
2b &= -\frac{4}{25} \quad \Big| : 2 \\
b &= \frac{2}{25} \quad \text{(falsch)} \\
b &= -\frac{2}{25} \quad \text{(korrigiert)}
\end{aligned}
$$

Ganz einfach: Beim Dividieren wurde das Minuszeichen übersehen.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.3.5 Aufgabe C5

$$
\begin{aligned}
1 &= k \cdot \frac{(1-0)\cdot\left(1-\frac{5}{3}\right)}{1-3} \\
1 &= k \cdot \frac{1\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{2} \quad \Big| \cdot 2 \quad \text{(falsch)} \\
1 &= k \cdot \frac{1\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{-2} \quad \Big| \cdot (-2) \quad \text{(korrigiert)} \\
-2 &= -\frac{2}{3}k \quad \Big| \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \\
3 &= k
\end{aligned}
$$

Es handelt sich nur um einen Rechenfehler im Nenner. Abgesehen davon sollte man etwas zielstrebiger vorgehen, wie hier dargestellt.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.3.6 Aufgabe C6

$$\begin{aligned}
5 &= -\frac{3}{2} \cdot (-3) + b \\
5 &= \frac{9}{2} + b \quad | : \frac{9}{2} \quad \text{(falsch)} \\
5 &= \frac{9}{2} + b \quad | -\frac{9}{2} \quad \text{(korrigiert)} \\
5 - \frac{9}{2} &= b \\
\frac{1}{2} &= b
\end{aligned}$$

Der Bruch ist mit dem b durch ein Pluszeichen verbunden. Das Gegenteil vom Addieren ist nicht das Dividieren!

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.3.7 Aufgabe C7

$$\begin{aligned}
2 \cdot (-2) + b &= 0 \\
-4b &= 0 \quad |+4 \\
b &= 4
\end{aligned}$$

Hier sind wieder 2 Fehler gemacht worden, sie sich gegenseitig aufheben. Zunächst ist $-4 + b \neq -4b$. Dann kann man nicht 4 addieren, um die -4 aus $-4b$ zu entfernen, da Addieren nicht das Gegenteil vom Multiplizieren ist. Richtig wäre:

$$\begin{aligned}
2 \cdot (-2) + b &= 0 \\
-4+b &= 0 \quad | + 4 \\
b &= 4
\end{aligned}$$

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.3.8 Aufgabe C8

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{3}\cdot(-5)+b &= 2 \quad \left|+\frac{1}{3}\cdot(-5)\right. \\
b &= 2\cdot\frac{1}{3}\cdot(-5) \\
b &= 2\cdot\frac{-5}{15} \\
b &= \frac{30}{15}+\frac{-10}{15} \\
b &= \frac{20}{15}
\end{aligned}$$

Hier ist wieder schrecklich viel falsch, so dass ich keine einfachen Korrekturen eintragen kann. Der erste Fehler liegt in Zeile 2. Hier wurde Addition mit Multiplikation verwechselt. Richtig wäre dieser Schritt so:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{3}\cdot(-5)+b &= 2 \quad \left|+\frac{1}{3}\cdot(-5)\right. \\
b &= 2+\frac{1}{3}\cdot(-5) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Unter der Annahme, Zeile 2 wäre richtig, ist der nächste schwere Fehler in Zeile 3 gemacht worden. Beim Ausmultiplizieren des Bruches mit -5 wurde offenbar der Nenner mit 5 multipliziert. Richtig wäre es so:

$$\begin{aligned}
&\vdots \\
b &= 2\cdot\frac{1}{3}\cdot(-5) \\
b &= 2\cdot\frac{-5}{3} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Auch in der vorletzten Zeile ist ein sonderbarer Fehler. Woher plötzlich der Bruch $\frac{30}{15}$ kommt, ist unklar. Er ist schlichtweg zuviel und muss ersatzlos gestrichen werden.

$$\begin{aligned}
&\vdots \\
b &= 2\cdot\frac{-5}{15} \\
b &= \frac{-10}{15} \\
b &= -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.3.9 Aufgabe C9

$$\begin{array}{rcll} 6a+2\cdot 9 &=& 0 & \mid -6a \\ 18 &=& 6a & \mid :6 \quad \text{(fehlerhaft)} \\ 18 &=& -6a & \mid :(-6) \quad \text{(korrigiert)} \\ a &=& -3 & \end{array}$$

Das war einfach. Nur das Minuszeichen wurde vergessen.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.3.10 Aufgabe C10

$$\begin{array}{rcll} -3+18+c &=& 9 & \mid -15 \\ c &=& 6 & \text{(fehlerhaft)} \\ c &=& -6 & \text{(korrigiert)} \end{array}$$

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.3.11 Aufgabe C11

$$\begin{array}{rcll} 18a+6(9-7a) &=& 0 & \\ 18a+54-42a &=& 0 & \\ -24a+54 &=& 0 \quad \mid : -24 & \text{(fehlerhaft)} \\ -24a+54 &=& 0 \quad \mid : (-24) & \text{(korrigiert)} \\ a+54 &=& 0 & \text{(fehlerhaft)} \\ a-2{,}25 &=& 0 & \text{(korrigiert)} \end{array}$$

Erster Fehler: Auch im Kommentar dürfen keine zwei Rechenzeichen ohne Klammern aufeinandertreffen.
Zweiter Fehler: Die vorgesehene Division muss auf **jeden** Summanden angewendet werden.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.3.12 Aufgabe C12

$$\begin{array}{rcll} -4\cdot(-84{,}9)-2z &=& 342 & \\ 339{,}6-2z &=& 342 & \\ -2z &=& 2{,}4 & \\ z &=& 0{,}4 & \text{(fehlerhaft)} \\ z &=& -1{,}2 & \text{(korrigiert)} \end{array}$$

Vielleicht hätte sich der Schüler nicht verrechnet, wenn er $\mid : (-2)$ als Kommentar dazugeschrieben hätte. Er hat nämlich rechts einfach nur 2 subtrahiert.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.3.13 Aufgabe C13

$$
\begin{aligned}
6 \cdot \left(\frac{2z + 246}{228} \right) + 12z + 12 &= 0 \\
\frac{12z + 1\,476}{1\,368} + 12z + 12 &= 0 \quad \text{(fehlerhaft)} \\
\frac{12z + 1\,476}{228} + 12z + 12 &= 0 \quad \text{(korrigiert)}
\end{aligned}
$$

Hier hat wieder ein Schüler neue Bruchrechenregeln erfunden.[1] Er multipliziert nicht nur den Zähler mit der Zahl 6, sondern auch den Nenner!

Tun wir so, als wäre es richtig, denn der nächste Fehler wartet schon auf uns.

$$
\begin{aligned}
\frac{12z + 1\,476}{1\,368} + 12z + 12 &= 0 \\
12z + 1\,476 + 12z + 12 &= 0 \quad \text{(fehlerhaft)} \\
12z + 1\,476 + 16\,416z + 16\,416 &= 0 \quad \text{(korrigiert)}
\end{aligned}
$$

Was genau hier falsch ist, ist nicht eindeutig, da ein Kommentar fehlt. Möglicherweise hat der Schüler nur vergessen, den Nenner mit hinzuschreiben. Wahrscheinlicher ist jedoch, dass er die Gleichung mit dem Nenner 1 368 multiplizieren wollte und nicht daran gedacht hat, **jeden** Term damit zu multiplizieren.

Der Rest der Lösung war in sich richtig.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

[1] Infos und Übungen zu den Bruchrechenregeln siehe auch hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/bruch.pdf

4.3.14 Aufgabe C14

$$\begin{array}{rcllr}
(-8)\cdot(-4)+(-57)\cdot 6+(-2)\cdot z & = & 0 & & \\
32+(-342)-2z & = & 0 & \mid -32{\color{red}+(-342)} & \text{(fehlerhaft)} \\
32+(-342)-2z & = & 0 & \mid -32{\color{green}+342} & \text{(korrigiert)} \\
-2z & = & {\color{red}-374} & & \text{(fehlerhaft)} \\
-2z & = & {\color{green}310} & & \text{(korrigiert)}
\end{array}$$

Hier hat sich der Schüler selbst ein Bein gestellt. Das doppelte Vorzeichen (Plus vor der Klammer und Minus in der Klammer bei der Zahl 342) hat alles sehr unübersichtlich gemacht. Sofort **alle** Klammern auflösen hätte mehr Klarheit und weniger Fehleranfälligkeit gebracht. Damit sähe die Lösung so aus:

$$\begin{array}{rcll}
(-8)\cdot(-4)+(-57)\cdot 6+(-2)\cdot z & = & 0 & \\
32-342-2z & = & 0 & \mid -32+342 \\
-2z & = & 310 & \mid :(-2) \\
z & = & -105 &
\end{array}$$

Aus meiner Sicht **noch übersichtlicher** wäre es allerdings, vor dem zweiten Schritt noch eine Zusammenfassung der Zahlen 32 und 342 zu machen. Damit sieht die Lösung so aus:

$$\begin{array}{rcll}
(-8)\cdot(-4)+(-57)\cdot 6+(-2)\cdot z & = & 0 & \\
32-342-2z & = & 0 & \\
-310-2z & = & 0 & \mid -310 \\
-2z & = & 310 & \mid :(-2) \\
z & = & -105 &
\end{array}$$

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.3.15 Aufgabe C15

$$\begin{array}{rcll}
-1\frac{7}{8}+6\frac{1}{2}+c &=& -2 & |+4\frac{5}{8} \quad \text{(fehlerhaft)}\\
-1\frac{7}{8}+6\frac{1}{2}+c &=& -2 & |-4\frac{5}{8} \quad \text{(korrigiert)}\\
c &=& 2\frac{5}{8} & \quad\quad\quad \text{(fehlerhaft)}\\
c &=& -6\frac{5}{8} & \quad\quad\quad \text{(korrigiert)}
\end{array}$$

Auch hier hat der Schüler sich das Leben selbst erschwert. Im Grunde hat er lediglich das Addieren mit dem Subtrahieren verwechselt. Weil hier einerseits mit gemischten Zahlen gerechnt wird, andererseits noch keine Zusammenfassung erfolgt war, wird die Sache unübersichtlich. (Zudem scheint der Schüler einen Taschenrechner zu besitzen, der das Verständnis für Brüche verhindert, indem er klaglos gemischte Zahlen verarbeitet.)

Wie lässt sich ein solcher Fehler verhindern? Durch Beachtung dieser Grundregel zum Auflösen von Gleichungen:

> ***Immer zuerst gleichartige Terme zusammenfassen, dann erst die Gleichung umstellen.***

Mit Beachtung dieser Regel sähe die Lösung etwa wie folgt aus:

$$\begin{array}{rcll}
-1\frac{7}{8}+6\frac{1}{2}+c &=& -2 & \\
4\frac{5}{8}+c &=& -2 & |-4\frac{5}{8}\\
c &=& -6\frac{5}{8} &
\end{array}$$

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.3.16 Aufgabe C16

$$\begin{array}{rcll}
-\frac{5}{8}+3\frac{1}{4}+2\frac{5}{8}+d &=& -2 & |+5\frac{1}{4} \quad \text{(fehlerhaft)}\\
-\frac{5}{8}+3\frac{1}{4}+2\frac{5}{8}+d &=& -2 & |-5\frac{1}{4} \quad \text{(korrigiert)}\\
d &=& 3\frac{1}{4} & \quad\quad\quad \text{(fehlerhaft)}\\
d &=& -7\frac{1}{4} & \quad\quad\quad \text{(korrigiert)}
\end{array}$$

Zu dieser Aufgabe gilt exakt das gleiche, wie zur vorangegangenen Aufgabe. Eine zweckmäßigere weniger fehleranfällige Lösung sähe so aus:

$$\begin{array}{rcll}
-\frac{5}{8}+3\frac{1}{4}+2\frac{5}{8}+d &=& -2 & \\
5\frac{1}{4}+d &=& -2 & |-5\frac{1}{4}\\
d &=& -7\frac{1}{4} &
\end{array}$$

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.4 Bruchgleichungen

4.4.1 Aufgabe D1

$$
\begin{aligned}
2x - \frac{2x+3}{3-x} - 11 &= 2x \quad |-2x \\
-\frac{2x+3}{3-x} - 11 &= 0 \quad |\cdot(3-x) \\
{\color{red}-2x+3} - 11\cdot(3-x) &= 0 \quad \text{(falsch)} \\
{\color{green}-2x-3} - 11\cdot(3-x) &= 0 \quad \text{(korrigiert)} \\
-2x-3-33+11x &= 0 \\
9x-36 &= 0 \quad |+36 \\
9x &= 36 \quad |:9 \\
x &= 4 \\
L &= \{4\}
\end{aligned}
$$

Steht ein Minuszeichen vor einer Klammer, dann ändern sich in der Klammer **alle** Vorzeichen. Ein Bruchstrich kann eine Klammer ersetzen.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.4.2 Aufgabe D2

$$\begin{aligned}
\frac{2x-5}{x+5} - 7 &= 0 \quad |\cdot(x+5) \\
2x-5-7 &= 0 \quad \text{(falsch)} \\
2x-5-7\cdot(x+5) &= 0 \quad \text{(korrigiert)} \\
2x-5-7x-35 &= 0 \\
-5x-40 &= 0 \quad |+40 \\
-5x &= 40 \quad |:(-5) \\
x &= -8 \\
L &= \{-8\}
\end{aligned}$$

Wird eine Gleichung mit einem Faktor multipliert, so muss **jeder Summand** damit multipliziert werden.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.4.3 Aufgabe D3

$$
\begin{aligned}
\frac{3x+3}{x-2} - \frac{x-5}{x-2} &= 0 \quad | \cdot (x-2) \\
3x+3-x+5 &= x-2 \quad \text{(falsch)} \\
3x+3-x+5 &= 0 \quad \text{(korrigiert)} \\
2x+8 &= 0 \quad | -8 \\
2x &= -8 \quad | : 2 \\
x &= -4 \\
L &= \{-4\}
\end{aligned}
$$

Wenn die Zahl 0 mit einem beliebigen Faktor multipliziert wird, ist das Ergebnis **immer 0**.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.4.4 Aufgabe D4

$$
\begin{aligned}
\frac{(3x-14)\cdot(2x+12)}{6\cdot(x^2-36)} - \frac{2x-18}{6x^2-108} &= \frac{(2x-9)\cdot(3x+18)}{6x^2-108} && | \cdot (6x^2-108) \\
6x^2+18x-28x-168-2x-18 &= 6x^2+36x-27x-162 && \text{(falsch)} \\
6x^2+18x-28x-168-2x+18 &= 6x^2+36x-27x-162 && \text{(korrigiert)} \\
&\vdots \\
-24 &= 3x && | : 3 \\
x &= 8 && \text{(falsch)} \\
x &= -8 && \text{(korrigiert)}
\end{aligned}
$$

Fehler 1: Der erste Nenner ist nicht identisch mit den beiden anderen Nennern. Daher können so nicht alle Brüche aufgelöst werden. **Eine Korrektur dazu habe ich *nicht* angegeben.**

Fehler 2: Zur Erinnerung: Der Bruchstrich ersetzt eine Klammer (hier: um den zweiten Zähler). Fällt er weg, so muss gerechnet werden, wie wenn eine Klammer aufgelöst wird.

Fehler 3: Beim Umdrehen der Gleichung bei gleichzeitiger Division durch 3 wurde das Minuszeichen „geschlabbert“.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.4.5 Aufgabe D5

Hier sind eine ganze Menge Fehler gemacht worden.

$$
\begin{array}{rcll}
\frac{3x-14}{36x-216}-\frac{x-9}{36x-216} & = & \frac{2x-9}{36x-216} & \mid \cdot\, 36x-216 \quad \text{(falsch)} \\
\frac{3x-14}{36x-216}-\frac{x-9}{36x-216} & = & \frac{2x-9}{36x-216} & \mid \cdot\, (36x-216) \quad \text{(korrigiert)} \\
3x-14-x-9 & = & 2x-9 & \mid +9 \quad \text{(falsch)} \\
3x-14-x+9 & = & 2x-9 & \mid +9 \quad \text{(korrigiert)} \\
3x-5-x & = & 2x & \quad \text{(falsch)} \\
3x-14-x & = & 2x & \quad \text{(korrigiert)} \\
3x-14-x & = & 2x & \quad \text{(falsch)} \\
3x-5-x & = & 2x & \quad \text{(korrigiert)} \\
2x-14 & = & 2x & \mid -2x \\
14 & = & 0 & \quad \text{(falsch)} \\
-14 & = & 0 & \quad \text{(korrigiert)}
\end{array}
$$

Fehler 1: Auch im Kommentar geht Punktrechnung vor Strichrechnung. Soll das aufgehoben werden (wie hier), dann muss eine Klammer gesetzt werden. Hier soll ja nicht die Gleichung zunächst mit $36x$ multipliziert werden, um anschließend auf beiden Seiten 216 zu subtrahieren, sondern es soll mit dem Term $(36x - 216)$ multipliziert werden.

Fehler 2: Der Bruchstrich ersetzt eine Klammer. Fällt er weg, so muss gerechnet werden, wie wenn eine Klammer aufgelöst wird. Da vor dem Bruchstrich ein Minuszeichen steht, kehren sich also alle Vorzeichen um.

Fehler 3: Hier wurde offenbar die -9 hinter dem x auf der linken Gleichungsseite beim Zusammenfassen übersehen.

Fehler 4: Der vierte Fehler hebt den dritten wieder auf. Wieso dem Schüler jetzt plötzlich auffällt, dass die -9 übersehen wurde, ist mir nicht ganz klar. Vielleicht stand es so beim Nachbarn. . .

Fehler 5: Auch hier ist vermutlich Schlamperei die Ursache für den Fehler. Das Minuszeichen vor der 14 wurde wohl einfach vergessen.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.4.6 Aufgabe D6

$$\begin{array}{rcll}
\dfrac{6x-34-6x+33}{6x-42} & = & \dfrac{x-11}{3x^2-49} & |\cdot(6x-42)\cdot(3x^2-49) \\
6x-34-6x+3(3x^2-49) & = & x-11(6x-42) & \text{(falsch)} \\
(6x-34-6x+33)(3x^2-49) & = & (x-11)(6x-42) & \text{(korrigiert)} \\
6x-34-6x+3+3x^2+49 & = & x-11+6x+42 & \text{(falsch)} \\
6x-34-6x+9x^2-147 & = & x-66x+462 & \text{(korrigiert)} \\
18+3x^2 & = & 7x+31 & \\
& \vdots & &
\end{array}$$

Ohne zunächst auf die Fehler einzugehen, möchte ich sagen, dass es – vorsichtig formuliert – taktisch unklug ist, nicht vor dem ersten Rechenschritt den Zähler des ersten Bruches zusammenzufassen.

Fehler 1: Die Klammern um den jeweiligen ehemaligen Zähler wurden vergessen. Zudem mutierte die 33 im ersten Zähler zu einer einfachen 3.

Fehler 2: Jetzt hätte das Produkt $3\cdot(3x^2-49)$ ausgerechnet werden müssen. Offenbar wurde das Multiplizieren in ein Addieren umgewandelt. Außerdem veränderte sich -49 in $+49$. Sinngemäß wurden die gleichen Fehler auch auf der anderen Gleichungsseite gemacht. Immerhin stimmt hier wenigstens das Vorzeichen vor dem absoluten Glied.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.4.7 Aufgabe D7

$$\begin{array}{rcll}
\dfrac{3x+3}{x-7}-2 & = & \dfrac{5x-7}{x-7} & |\cdot(x-7) \\
(3x+3)(-2) & = & 5x-7 & \text{(fehlerhaft)} \\
3x+3-2 & = & 5x-7 & \text{(korrigiert)}
\end{array}$$

Durch zwei Klammern um die (-7) wird plötzlich aus einer Summe ein Produkt. Die Klammern um den Term $(3x+3)$ sind zwar überflüssig, stören aber nicht.

Es gibt noch einen weiteren Fehler. Tun wir also so, als ob der erste Schritt richtig gewesen wäre.

$$\begin{array}{rcll}
(3x+3)(-2) & = & 5x-7 & \\
-6x-6 & = & 5x-7 & |+6x+7 \\
1 & = & 11x & |:11 \\
11 & = & x & \text{(fehlerhaft)} \\
\dfrac{1}{11} & = & x & \text{(korrigiert)}
\end{array}$$

Wenn man die Gleichung durch 11 dividieren möchte, muss man das auf **beiden** Seiten machen und nicht auf einer Seite mit 11 **multiplizieren**.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.4.8 Aufgabe D8

$$\begin{aligned} \frac{3x+3}{x-7} - 2 &= \frac{5x-7}{x-7} && | \cdot \text{HN} \\ (3x+3) - 2 &= (5x-7)(x-7) \\ (3x+3) - 2 \cdot (x-7) &= (5x-7) \end{aligned}$$

Im ersten Bruch wurde korrekt mit $(x-7)$ multipliziert. Dabei kürzt sich dieser Term gegen den Nener weg.

Bei der 2 wurde vergessen, damit zu multiplizieren.

Auf der rechten Seite wurde noch ein zweites mal mit diesem Term multipliziert. Beim ersten mal kürzte er sich ja gegen den Nenner weg.

Tun wir nun so, als sei das richtig. Sehen wir uns den weiteren Teil an.

$$\begin{aligned} (3x+3) - 2 &= (5x-7) \\ -6x - 6 &= 5x^2 - 35x - 7x + 49 \\ 3x + 1 &= 5x^2 - 35x - 7x + 49 \end{aligned}$$

Und schon ist der nächste Fehler passiert. Hier wurde mit (-2) **multipliziert**, anstatt 2 zu **subtrahieren**, wie es da steht.

Es geht weiter:

$$\begin{aligned} -6x - 6 &= 5x^2 - 35x - 7x + 49 \\ -6x - 6 &= 5x^2 - 42x + 49 && | + 6x + 6 \\ 0 &= 5x^2 - 36x + 43 && | : 5 \\ 0 &= x^2 - 7{,}2x + 8{,}5 \end{aligned}$$

Plötzlich fehlt die linke Seite der Gleichung, wir haben also garkeine Gleichung mehr, die mal lösen könnte. Und diese nicht vorhandene Gleichung kann man natürlich auch nicht durch 5 dividieren.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.5 Ungleichungen

4.5.1 Aufgabe E1

$$\begin{aligned} 2n - 9 &\geq -21 + 4n && | - 2n + 21 \\ 30 &\geq 2n && | : 2 && \text{(falsch)} \\ 12 &\geq 2n && | : 2 && \text{(korrigiert)} \\ 6 &\geq n \end{aligned}$$

Die -9 wurde fälschlicherweise als $+9$ gerechnet.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.5.2 Aufgabe E2

$$\begin{array}{rcll}
a_{n+1} & \geq & a_n & \\
4(n+1)^2 - 12(n+1) - 3 & \geq & 4n^2 - 12n - 3 & \\
4(n^2+2n+1) - 12n + 12 - 3 & \geq & 4n^2 - 12n - 3 & \quad \text{(falsch)} \\
4(n^2+2n+1) - 12n - 12 - 3 & \geq & 4n^2 - 12n - 3 & \quad \text{(korrigiert)} \\
4n^2 + 8n + 4 - 12n + 12 - 3 & \geq & 4n^2 - 12n - 3 & \\
4n^2 - 4n + 13 & \geq & 4n^2 - 12n - 3 & |-4n^2 \\
4n + 13 & \geq & -12n - 3 & |+12n - 13 \quad \text{(falsch)} \\
-4n + 13 & \geq & -12n - 3 & |+12n - 13 \quad \text{(korrigiert)} \\
16n & \geq & -16 & |:16 \\
n & \geq & -1 &
\end{array}$$

In der Lösung sind zwei Fehler enthalten.
Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.5.3 Aufgabe E3

$$\begin{array}{rcll}
-4 - \dfrac{8n-9}{9-2n} & < & \varepsilon & \\
-\dfrac{4}{1} - \dfrac{8n-9}{9-2n} & < & \varepsilon & \\
-\dfrac{4(9-2n) - 8n - 9}{9-2n} & < & \varepsilon & \text{(falsch)} \\
-\dfrac{4(9-2n) + 8n - 9}{9-2n} & < & \varepsilon & \text{(korrigiert)} \\
\dfrac{-36 + 8n - 8n - 9}{9-2n} & < & \varepsilon & \text{(falsch)} \\
\dfrac{-36 + 8n + 8n + 9}{9-2n} & < & \varepsilon & \text{(korrigiert)} \\
\dfrac{-45}{9-2n} & < & \varepsilon &
\end{array}$$

In der Lösung sind zwei Fehler enthalten. Bei der Darstellung des zweiten wurde davon ausgegangen, dass die Vorzeile (mit dem ersten Fehler) richtig wäre.

Fehler 1: Beide Brüche wurden auf den gemeinsamen Nenner zusammengefasst. Dabei wurde das Minuszeichen ausgeklammert. Dadurch wird der zweite Zähler positiv. Taktisch klüger wäre es gewesen, man hätte dieses Minuszeichen mit in den ersten Zähler genommen. Allerdings wäre dann die -9 am Ende des zweiten Zählers eine $+9$ geworden.

Fehler 2: Das Minuszeichen vor dem Bruch wurde nun in den Bruch hineinmultipliziert. Dadurch ändern sich **alle** Vorzeichen, nicht nur die beiden ersten.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.6 Quadratische Gleichungen

4.6.1 Aufgabe F1

$$\begin{aligned}
3x^2 - 12x &= 0 \quad | : 3 \\
x^2 - 4x &= 0 \quad | : x \quad \text{(falsch)} \\
x^2 - 4x &= 0 \quad | \; x \text{ ausklammern} \quad \text{(korrigiert)} \\
x \cdot (x - 4) &= 0 \\
x_1 &= 0 \\
x_2 - 4 &= 0 \quad | + 4 \\
x_2 &= 4
\end{aligned}$$

Man darf nicht hemmungslos durch eine Variable dividieren, es sei denn, man ist sicher, dass die keinesfalls Null ist. Durch Null dividieren ist ja verboten. Deshalb geht bei dem Lösungsweg die Lösung $x_1 = 0$ verloren.

Klammert man x nur aus, dann hilft der Lehrsatz weiter: ***Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist.*** Man kann dann jeden Faktor einzeln untersuchen und erhält (hier) zwei Lösungen.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.6.2 Aufgabe F2

Nullstellenbestimmung einer Funktion:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 3x^2 - 18x + 15 \quad | :3 \\
f(x) &= x^2 - 6x + 5 \quad \text{(falsch)} \\
\frac{1}{3}f(x) &= x^2 - 6x + 5 \quad \text{(korrigiert)} \\
0 &= x_0^2 - 6x_0 + 5 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Wenn man die Funktionsgleichung durch eine Zahl dividiert, hat man nicht mehr $f(x)$. Daher wäre folgende Vorgehensweise besser und sinnvoller:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 3x^2 - 18x + 15 \\
0 &= 3x_0^2 - 18x_0 + 15 \quad | :3 \\
0 &= x_0^2 - 6x_0 + 5 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.6.3 Aufgabe F3

$$\begin{aligned}
0 &= 3x^2 - 18x + 15 \quad | :3 \\
0 &= x^2 - 6x + 5 \\
x_{1/2} &= 3 \pm \sqrt{9-5} \\
&= 3 \pm 4 \quad \text{(falsch)} \\
&= 3 \pm 2 \quad \text{(korrigiert)} \\
x_1 = 5 & \qquad x_2 = 1
\end{aligned}$$

Das war (vermutlich) einfach zu finden. Hier liegt nur ein Rechenfehler vor, die Wurzel aus $(9-5)$ wurde nicht gezogen.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.6.4 Aufgabe F4

$$\begin{aligned} 4b^2 - 25 &= 0 \quad | : 4 \\ b^2 - 6{,}25 &= 0 \quad | + 6{,}25 \\ b^2 &= 6{,}25 \\ b &= 2{,}5 \quad \text{(falsch)} \\ b &= \pm 2{,}5 \quad \text{(korrigiert)} \end{aligned}$$

Wenn man eine Wurzel zieht, dann kommt immer auch die **negative Wurzel** als Ergebnis in Betracht. Auch $(-2{,}5)^2$ ergibt $+6{,}25$.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.6.5 Aufgabe F5

$$\begin{array}{rcll} -16x^2 & = & -42x+207 & \mid +42x \\ 26x^2 & = & 207 & \mid :26 \\ x^2 & = & 7,96 & \mid \sqrt{\ } \\ x & = & +\sqrt{7,96} & \\ x & = & 2,82 & \end{array}$$

Hier sind gleich 4 Fehler zu finden! Bei der Auflösung wollen wir an jeder Stelle so tun, als ob die vorangehende Zeile richtig wäre. Fangen wir vorn an.

Der erste Fehler ist gleich der heftigste:

$$\begin{array}{rclll} -16x^2 & = & -42x+207 & \mid +42x & \\ 26x^2 & = & 207 & & \text{(falsch)} \\ 42x-16x^2 & = & 207 & & \text{(korrigiert)} \end{array}$$

Auch wenn es nicht gefällt: x lässt sich mit x^2 nicht zusammenfassen!

Der Fehler in Zeile 3 ist das Gleichheitszeichen. Da 207 : 26 nur **ungefähr** 2,82 ist, muss auch das Ungefährzeichen anstelle des Gleichheitszeichens verwendet werden.

$$\begin{array}{rclll} 26x^2 & = & 207 & \mid :26 & \\ x^2 & = & 7{,}96 & & \text{(falsch)} \\ x^2 & \approx & 7{,}96 & & \text{(korrigiert)} \end{array}$$

Der nächste Fehler:

$$\begin{array}{rclll} x^2 & = & 7{,}96 & \mid \sqrt{\ } & \\ x & = & +\sqrt{7{,}96} & & \text{(falsch)} \\ x & = & \pm\sqrt{7{,}96} & & \text{(korrigiert)} \end{array}$$

Beim Wurzelziehen kommt immer die positive **und** die negative Wurzel in Betracht.

Der letzte Fehler entspricht dem zweiten:

$$\begin{array}{rcll} x & = & \sqrt{7{,}96} & \\ x & = & 2{,}82 & \text{(falsch)} \\ x & \approx & 2{,}82 & \text{(korrigiert)} \end{array}$$

Die Wurzel ist nur näherungsweise 2,82, daher darf hier kein Gleichheitszeichen verwendet werden.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.6.6 Aufgabe F6

$$
\begin{array}{rcll}
0 & = & x^2 - 11x + 34 & \\
x_{1/2} & = & \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{-11^2}{2} - 34} & \text{(fehlerhaft)} \\
x_{1/2} & = & \frac{11}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-11}{2}\right)^2 - 34} & \text{(korrigiert)} \\
 & \vdots & & \\
x_{1/2} & = & \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{-11^2}{2} - 34} & \\
x_{1/2} & = & 5{,}5 \pm \sqrt{30{,}25 - 34} & \text{(fehlerhaft)} \\
x_{1/2} & = & 5{,}5 \pm \sqrt{-60{,}5 - 34} & \text{(korrigiert)} \\
 & \vdots & & \\
x_{1/2} & = & 5{,}5 \pm \sqrt{30{,}25 - 34} & \\
x_{1/2} & = & 5{,}5 \pm -3{,}75 &
\end{array}
$$

Aus einer negativen Zahl kann keine (reelle) Wurzel gezogen werden!

In der Lösung waren mindestens drei Fehler enthalten.

1. In Zeile 2 muss das Minuszeichen vor der 11 mitquadriert werden, die (-11) muss also eingeklammert sein. Auch die 2 im Nenner muss mitquadriert werden.

2. In der nächsten Zeile wurde so gerechnet, als ob die Klammern $\left(\frac{-11}{2}\right)$ gesetzt worden wären.

3. In der darauffolgenden Zeile fehlt die Wurzel, so, als ob die Wurzel gezogen worden wäre. Tatsächlich steht nur der Radikand noch da, es existiert auch kein (reelles) Ergebnis für eine Wurzel aus einer negativen Zahl. Darüber hinaus ist ein Minuszeichen unmittelbar nach dem $\pm$ nicht zulässig.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.6.7 Aufgabe F7

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 - 18x + 24 \\ x_{1/2} &= 9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 24} \quad \text{(fehlerhaft)} \end{aligned}$$

Bevor man die p-q-Formel anwenden kann, muss die Gleichung in **Normalform** gebracht werden, die 3 vor x^2 muss also verschwinden. (Alternativ kann auch die „Mitternachtsformel“[2] angewendet werden.)

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 - 18x + 24 \qquad | : 3 \\ 0 &= x^2 - 6x + 8 \\ x_{1/2} &= 3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 8} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tatsächlich wird dieser Fehler sehr häufig gemacht. Das ist aus meiner Sicht tatsächlich ein Grund, der gegen die Anwendung der p-q-Formel spricht. Mit der Mitternachtsformel sähe der Lösungsweg so aus:

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 - 18x + 24 \\ x_{1/2} &= \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 3 \cdot 24}}{2 \cdot 3} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

[2]Einzelheiten dazu siehe hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/quad.pdf

4.6.8 Aufgabe F8

$$\begin{array}{rcll} 3x^2-12x+9 & = & 0 & \mid :3 \\ x^2-4x+3 & = & 0 & \\ x_{1/2} & = & -\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} & \\ x_{1/2} & = & -\frac{-4}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2-3} & \\ x_{1/2} & = & 2\pm\sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2-3} & \\ x_{1/2} & = & 2\pm\sqrt{-2^2-3} & \text{(fehlerhaft)} \\ x_{1/2} & = & 2\pm\sqrt{(-2)^2-3} & \text{(korrigiert)} \end{array}$$

Der Umgang mit Klammern macht immer wieder Schwierigkeiten.

Der nächste Fehler hebt den ersten wieder auf:

$$\begin{array}{rcll} x_{1/2} & = & 2\pm\sqrt{-2^2-3} & \\ x_{1/2} & = & 2\pm\sqrt{4-3} & \text{(fehlerhaft)} \\ x_{1/2} & = & 2\pm\sqrt{-4-3} & \text{(korrigiert)} \end{array}$$

Es wurde so gerechnet, als ob eine Klammer um die -2 gestanden hätte. Die gibt es aber nicht, auch wenn sie dort hätte stehen müssen.

Der Rest der Lösung ist korrekt.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.6.9 Aufgabe F9

$$\begin{array}{rcll} 0{,}072x^2-0{,}6 & = & 0 & \mid :0{,}072 \\ x^2-8\frac{1}{3} & = & 0 & \mid +8\frac{1}{3} \\ x^2 & = & 8\frac{1}{3} & \mid\sqrt{\ } \\ x & = & 2{,}89 & \text{(fehlerhaft)} \\ x & = & \pm 2{,}89 & \text{(korrigiert)} \end{array}$$

Hier wurde vergessen, dass beim Wurzelziehen ja beide Vorzeichen als Lösung möglich sind.

Eigentlich müsste man jetzt auch anstelle des Gleichheitszeichen $=$ das Ungefährzeichen $\approx$ verwenden, weil wir ja nur dezimale Näherungen haben.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.6.10 Aufgabe F10

Es ist die selbe Aufgabe wie zuvor, jedoch ein anderer Lösungsweg.

$$\begin{array}{rcll}
0{,}072x^2 - 0{,}6 & = & 0 & \mid +0{,}6 \\
0{,}072x^2 & = & 0{,}6 & \mid \sqrt{\ } \\
0{,}072x & = & 0{,}77 & \mid :0{,}072 \quad \text{(fehlerhaft)} \\
\sqrt{0{,}072}x & = & \pm 0{,}77 & \mid :0{,}072 \quad \text{(korrigiert)} \\
& \vdots & &
\end{array}$$

Hier wurden gleich **zwei Fehler auf einmal** gemacht. Beim ersten Fehler wurde auf der linken Seite vergessen, beim Wurzelziehen auch die Zahl vor dem x mit zu berücksichtigen. Außerdem kommen beim Ziehen einer Wurzel **beide** Vorzeichen in Betracht (was wir ja auch aus der p-q-Formel kennen).

Darüber hinaus ist die hier verwendete Vorgehensweise zur Lösung zwar möglich, aber nicht empfehlenswert. Sinnvoller wäre es gewesen, nach dem ersten Schritt – die 0,6 auf die andere Seite zu bringen – zucächst durch 0,07 zu dividieren, um x^2 **allein** auf der linken Seite zu haben, bevor die Wurzel gezogen wird. Dadurch wäre sicher der erste Fehler nicht passiert.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.6.11 Aufgabe F11

Auch dies ist die selbe Aufgabe wie zuvor, diesmal aber mit wieder anderen Fehlern.

$$\begin{array}{rcll} 0{,}072x^2 - 0{,}6 &=& 0 & \\ 0{,}072x^2 + 0x - 0{,}6 &=& 0 & \mid \cdot 13{,}\overline{88} \\ x^2 + 0x - 8{,}\overline{88} &=& 0 & \\ x_{1/2} &=& 0 \pm \sqrt{0 - {\color{red}(-8{,}\overline{88})^2}} & \text{(fehlerhaft)} \\ x_{1/2} &=& 0 \pm \sqrt{0 - {\color{green}(-8{,}\overline{88})}} & \text{(korrigiert)} \\ & \vdots & & \end{array}$$

Hier wurde die p-q-Formel falsch angewendet. Sie lautet nicht:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - {\color{red}q^2}} \text{ sondern: } x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - {\color{green}q}}$$

Nebenbei bemerkt war der krampfhafte Versuch, die Aufgabe unbedingt mit dieser Formel lösen zu wollen, obwohl es keinen Wert p gab, etwas unsinnig. Natürlich kann man die Formel mit $p = 0$ anwenden, so wie es hier gemacht wurde, aber einfacher wäre es gewesen, nur die $8{,}\overline{88}$ auf die andere Seite zu bringen und dann die Wurzel zu ziehen.

Es geht weiter zum nächsten Fehler.

$$\begin{array}{rcll} x_{1/2} &=& 0 \pm \sqrt{0 - (-8{,}\overline{88})^2} & \\ &=& 0 \pm \sqrt{-69{,}\overline{44}} & \\ &=& 0 \pm {\color{red}8{,}\overline{33}} & \text{(fehlerhaft)} \\ &=& 0 \pm {\color{green}8{,}\overline{33}i} & \text{(korrigiert)} \end{array}$$

Für die Wurzel aus einer **negativen** Zahl gibt es **keine reele** Lösung. Will man trotzdem eine Lösung haben, muss man mit **komplexen Zahlen** rechnen. Tut man das, taucht hierdurch das ominöse i auf.[3]

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

[3]Einzelheiten dazu siehe hier: `https://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/komplgl.pdf`

4.6.12 Aufgabe F12

$$\begin{aligned}
0{,}006x^4 - 0{,}3x^2 + 5 &= 0 \\
\text{setze } x^2 &= k \\
0{,}006k^2 - 0{,}3k + 5 &= 0 && |:(0{,}006) \\
k^2 - 50k + 833{,}33 & \\
k_{1/2} &= \frac{50}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{50}{2}\right)^2 - 833{,}33} \\
k_{1/2} &= 25 \pm \sqrt{625 - 833{,}33} \\
k_{1/2} &= 25 \pm \sqrt{-208{,}33} \\
k_{1/2} &= 25 && \text{(fehlerhaft)} \\
&\dots
\end{aligned}$$

Weil hier aus einer **negativen** Zahl die Wurzel gezogen werden sollte, hat der Schüler „der Einfachheit halber" die sich eigentlich ergebende **Imaginäre Zahl** schlicht weggelassen.

Soll die Lösung im Bereich der **Reellen Zahlen** liegen, gibt es **keine Lösung**. Im Bereich der **Komplexen Zahlen**[4] hätten wir als Ergebnis erhalten:

$$k_{1/2} = 25 \pm 14{,}434i$$

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.6.13 Aufgabe F13

$$\begin{aligned}
0{,}072x^2 - 0{,}6 &= 0 && |+0{,}6 \\
0{,}072x^2 &= 0{,}06 && |-0{,}072 \quad \text{(nicht sinnvoll)} \\
0{,}072x^2 &= 0{,}06 && |:0{,}072 \quad \text{(besser so)} \\
x^2 &= 0{,}528 && \text{(fehlerhaft)} \\
0{,}02x^2 - 0{,}072 &= 0{,}528 && \text{(korrigiert)}
\end{aligned}$$

Hier hat der Schüler offenbar angenommen, das **Gegenteil zum Multiplizieren** sei das **Subtrahieren**. Er hat auf der linken Gleichungsseite **dividiert** und auf der rechten Seite **subtrahiert**. Hätte er tatsächlich subtrahiert, wie im Kommentar angegeben, hätte er das grün dargestellte Ergebnis erhalten. Das bringt uns aber der Lösung nicht näher.

Ein weiterer Fehler ist etwas weiter unten zu finden.

$$\begin{aligned}
x^2 &= 0{,}528 && |\sqrt{\ } \quad \text{(unvollständig)} \\
x_{1/2} &= \pm 0{,}73 && \text{(korrigiert)}
\end{aligned}$$

Hier hat er übersehen, dass es beim Wurzelziehen ja **zwei** Ergebnisse gibt.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

[4]Einzelheiten dazu siehe hier: https://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/komplgl.pdf

4.6.14 Aufgabe F14

$$\begin{aligned} 36x^2 - 720x + 5400 &= 0 && \mid : 36 \\ x^2 - 20x + 150 &= 0 && \mid p\text{-}q\text{-Formel} \\ x_{1/2} &= \frac{20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2 - 150} \\ &= 10 \pm \sqrt{-50} \\ x &= \color{red}{10} \end{aligned}$$

Man darf $\sqrt{-50}$ nicht einfach weglassen. Wenn die Lösungsmenge im Bereich der Reellen Zahlen liegen soll (das ist meist der Fall), dann gibt es **keine** Lösung!

Ist als Grundmenge der Zahlen die Menge der „**Komplexen Zahlen**“ zugelassen, erhalten wir $\underline{x}_1 = 10 + \sqrt{50}i$ und $\underline{x}_2 = 10 - \sqrt{50}i$.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.7 Wurzelgleichungen

4.7.1 Aufgabe G1

$$\begin{aligned} 41 \cdot \sqrt{x^2 + 10} \cdot 0 &= -40x + (-9) + 9 \\ 41 \cdot \sqrt{x^2 + 10} \cdot 0 &= -40x \quad |(\ )^2 \\ 1681 \cdot (x^2 + 10) \cdot 0 &= 1600x^2 \\ \color{red}{1681x^2 + 16810 \cdot 0} &= 1600x^2 \quad \text{(falsch)} \\ \color{green}{(1681x^2 + 16810) \cdot 0} &= 1600x^2 \quad \text{(korrigiert)} \\ 0 &= 1600x^2 \quad \mid : 1600 \\ 0 &= x^2 \quad |\sqrt{\ } \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Punktrechnung geht vor Strichrechnung. Daher muss bei Anwendung des Distributivgesetzes die Klammer gesetzt werden.

Viel einfacher wäre es gewesen, wenn man sofort in der ersten Zeile gesagt hätte, dass der Term links vom Gleichheitszeichen Null ist, weil jeder Term mit Null multipliziert Null ergibt. Dann hätte man sofort erhalten:

$$\begin{aligned} 0 &= -40x \quad \mid : (-40) \\ 0 &= x \end{aligned}$$

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.7.2 Aufgabe G2

$$\begin{aligned} 12 \cdot \sqrt{x^2+10} \cdot 0 &= -40x \quad |\ (\ )^2 \\ 144 \cdot (x^2+10) \cdot 0 &= 1600x^2 \\ 144x^2 + 1440 \cdot 0 &= 1600x^2 \quad \text{(falsch)} \\ 144x^2 \cdot 0 + 1440 \cdot 0 &= 1600x^2 \quad \text{(korrigiert)} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Beim Auflösen der Klammer wurde gegen das Distributivgesetz verstoßen. Die 0 muss mit **jedem** Teilterm multipliziert werden.

Zusätzlich zu diesem Fehler wurden auch noch ein weiterer Fehler gemacht. Dazu mehr weiter unten.

Abgesehen davon wurde auch reichlich dusselig vorgegangen. Schon in der ersten Zeile sollte klar sein, dass das Ergebnis auf der linken Seite 0 ergeben muss, denn wenn ein Faktor in einem Produkt 0 ist, ist auch das Ergebnis 0. Ein sinnvoller Lösungswege sähe daher so aus:

$$\begin{aligned} 12 \cdot \sqrt{x^2+10} \cdot 0 &= -40x \\ 0 &= -40x \quad |\ :(-40) \\ 0 &= x \end{aligned}$$

Sehen wir uns auch mal den anderen Fehler an. Angenommen, es sei richtig:

$$\begin{aligned} 144x^2 + 1440 \cdot 0 &= 1600x^2 \quad |-1600x^2 \\ 1456x^2 + 1440 \cdot 0 &= 0 \quad \text{(falsch)} \\ -1456x^2 + 1440 \cdot 0 &= 0 \quad \text{(korrigiert)} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Das Minuszeichen wurde übersehen.

Etwas überraschend an diesem Beispiel ist die Tatsache, dass trotz **zweier Fehler** das richtige Ergebnis herausgekommen ist. Manchmal passiert so etwas aber tatsächlich.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.8 Polynome höheren Grades

4.8.1 Aufgabe H1

$$\begin{aligned}
\frac{2}{125}x^3+4 &= \frac{6}{5}x \quad \Big| : \frac{6}{5} \\
\frac{1}{75}x^3+3\frac{1}{3} &= x \quad \Big| -3\frac{1}{3} \\
\frac{1}{75}x^3 &= x-3\frac{1}{3} \quad \Big| : x \\
\frac{1}{75}x^2 &= -3\frac{1}{3x} \quad \Big| +3\frac{1}{3}x \\
\frac{1}{75}x^2+3\frac{1}{3}x &= 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Hier ist ganz viel danebengegangen. Deswegen sind auch keine Korrekturen eingetragen. Gehen wir alles der Reihe nach durch.

1. Man darf nicht ohne weiteres durch x dividieren. Wenn $x=0$ ist, dann geht eine Lösung verloren, da man nicht durch Null dividieren kann.

2. Es ist äußerst ungeschickt, mit **gemischten Zahlen** (hier: $3\frac{1}{3}$) zu rechnen. Der Grund ist folgender. Die Schreibweise $3\frac{1}{3}$ sieht so aus, als ob das $3\cdot\frac{1}{3}$ bedeutet. Tatsächlich bedeutet diese Schreibweise aber $3+\frac{1}{3}$. Nehmen wir einmal an, die Division durch x sei zulässig, dann müsste die rechte Seite der Gleichung lauten: $1-\frac{3\frac{1}{3}}{x}$ Vergessen wurde also zunächst einmal die $1=\frac{x}{x}$. Weiterhin ist der Audruck $3\frac{1}{3x}$ falsch, denn wenn eine Variable im Nenner auftaucht, dann bedeutes das eben nicht $\frac{3}{x}+\frac{1}{3x}$, sondern $3\cdot\frac{1}{3x}$. Hätte man anstelle der gemischten Zahl $3\frac{1}{3}$ den Bruch $\frac{10}{3}$ verwendet, dann wäre dieses Problem nicht aufgetaucht. $\frac{10}{3x}$ wäre dann das Ergebnis, wenn man durch x dividiert.

3. Angenommen, die vorletzte Zeile sei richtig, wurde im nächsten Schritt ein weiterer Fehler gemacht. Das x im Nenner „wanderte“ aus dem Nenner hinter den Bruch, also quasi in den Zähler. Das ist natürlich etwas völlig anderes.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.8.2 Aufgabe H2

$$\begin{array}{rcll}
(3x-17)\cdot(x-7)\cdot(x+7)-(x-11)\cdot 3 &=& (2x-11)\cdot 3\cdot(x+7) & \\
(3x-17)\cdot(x^2-49)-3x-33 &=& (6x-33)\cdot(x+7) & \text{(falsch)}\\
(3x-17)\cdot(x^2-49)-3x+33 &=& (6x-33)\cdot(x+7) & \text{(korrigiert)}\\
3x^2-147x-17x^2+833-3x-33 &=& (6x^2+42x-33x-231 & \text{(falsch)}\\
3x^3-147x-17x^2+833-3x-33 &=& 6x^2+42x-33x-231 & \text{(korrigiert)}\\
-14x^2+800-144x &=& 6x^2+9x-231 & |+14x^2 \quad \text{(falsch)}\\
-14x^2+800-150x &=& 6x^2+9x-231 & |+14x^2 \quad \text{(korrigiert)}\\
-14x^2+800-144x &=& 6x^2+9x-231 & |+14x^2\\
800-144x &=& 20x^2+9x-231 & |+144x+231\\
1031 &=& 20x^2+153x & |\sqrt{\ }\\
33{,}11 &=& 4{,}47x+12{,}37x & \text{(falsch)}\\
33{,}11 &\approx& \sqrt{20x^2+153x} & \text{(korrigiert)}\\
33{,}11 &=& 16{,}84x & |:16{,}84\\
1{,}97 &=& x & \text{(falsch)}\\
1{,}97 &\approx& x & \text{(korrigiert)}
\end{array}$$

Hier sind insgesamt 7 Fehler eingebaut.

Fehler 1: Beim Ausmultiplizieren von $-(x-11)\cdot 3$ wurde das Minuszeichen vor der Klammer zwar für $3x$, nicht aber für -11 berücksichtigt. Minus mal Minus ergibt Plus.

Fehler 2: $3x\cdot x^2$ ergibt $3x^3$ und nicht $3x^2$.

Fehler 3: Auf der rechten Gleichungsseite wurde eine Klammer geöffnet ohne sie zu schließen. Die Klammer kann aber ganz entfallen. Anderenfalls müsste noch eine schließende Klammer gesetzt werden.

Fehler 4: $-147x-3x$ ergibt $-150x$ und nicht $-144x$.

Fehler 5: $\sqrt{1031}$ ergibt nur näherungsweise 33,11. Deshalb darf nicht das Gleichheitszeichen sondern nur das Ungefährzeichen gesetzt werden.

Fehler 6: Die Wurzel $\sqrt{20x^2+153x}$ kann nicht aufgelöst werden, schon garnicht als $4{,}47x+12{,}37x$.

Fehler 7: $\frac{33{,}11}{16{,}84}$ ergibt nur ungefähr 1,97. Deshalb darf nicht das Gleichheitszeichen sondern nur das Ungefährzeichen gesetzt werden.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.8.3 Aufgabe H3

$$\begin{aligned} -0{,}1x^4 + 0{,}4x^3 &= 0 \\ x^2(-0{,}1x^2 + 0{,}4x) &= 0 \\ \color{red}{-0{,}1x^2 + 0{,}4x} &\color{red}{=} \color{red}{0} \quad \text{(grundsätzlich falsch)} \end{aligned}$$

Hier wurde offensichtlich durch x^2 dividiert, auch wenn dazu kein Kommentar vermerkt ist. Man muss jedoch beim Dividieren **grundsätzlich immer** darauf achten, dass man **niemals** durch Null dividieren darf. Daher die Frage: Sind wir sicher, dass ganz bestimmt $x^2 \neq 0$ ist?

Nein, das sind wir nicht, denn für $x = 0$ ist auch $x^2 = 0$! Solange nicht $x = 0$ im Definitionsbereich aus irgendwelchen Gründen ausgeschlossen ist, kann dieser Fall durchaus eintreten und wir dividieren durch Null, ohne es so recht zu bemerken. Was also tun?

Es gibt zwei Möglichkeiten der Abhilfe:

1. Man führt eine **Fallunterscheidung** durch.

2. Man wendet diesen Lehrsatz an:
   Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist.

Gehen wir das der Reihe nach durch. Bei einer **Fallunterscheidung** prüft man zunächst, ob $x = 0$ als Lösung in Frage kommt. Durch Einsetzen stellt man schnell fest: $x = 0$ **ist eine Lösung** der Gleichung. Nachdem dieser Wert als erste Lösung $x_1 = 0$ notiert ist, geht man für die Suche nach **weiteren** Lösungen vom Fall $x \neq 0$ aus. Hier darf dann auch durch x oder x^2 dividiert werden.

Möglichkeit 2 – die Anwendung des Lehrsatzes – ist meines Erachtens etwas einfacher. Man betrachtet zunächst den ersten Faktor x^2. Der wird Null für $x = 0$. Wir notieren $x_1 = 0$ als **erste Lösung** und machen mit dem zweiten Faktor $(-0{,}1x^2 + 0{,}4x)$ weiter, um die **weiteren** Lösungen zu bestimmen.

<u>Anmerkung:</u> Besser wäre es gewesen, im ersten Schritt gleich die **größtmögliche** Potenz (in diesem Fall x^3) auszuklammern. Dann wäre die restliche Lösung etwas einfacher. Damit sähe der Lösungsweg etwa so aus:

$$\begin{aligned} -0{,}1x^4 + 0{,}4x^3 &= 0 \\ x^3 \cdot (-0{,}1x + 0{,}4) &= 0 && \mid \text{(Faktoren einzeln betrachten)} \\ x_1 &= 0 \\ -0{,}1x + 0{,}4 &= 0 && \mid -0{,}4 \\ -0{,}1x &= -0{,}4 && \mid : (-0{,}1) \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

In dem zu untersuchenden Lösungsversuch gibt es aber noch einen weiteren Fehler. Schauen wir uns also den weiteren Lösungsweg an:

$$\begin{aligned} -0{,}1x^2 + 0{,}4x &= 0 \quad \mid : (-0{,}1) \\ x^2 - 0{,}4x &= 0 \quad \text{(fehlerhaft)} \\ x^2 - 4x &= 0 \quad \text{(korrigiert)} \end{aligned}$$

Der Rest ist im Prinzip richtig, wurde jedoch recht umständlich mit der p-q-Formel durchgeführt:

$$\begin{aligned} x^2 - 0{,}4x &= 0 \\ x_{1/2} &= 0{,}2 \pm \sqrt{0{,}04} \\ &= 0{,}2 \pm 0{,}2 \\ x_1 = 0 \quad & \quad x_2 = 0{,}4 \end{aligned}$$

Günstiger wäre es, x auszuklammern und mit dem oben erwähnten Lehrsatz zu arbeiten:

$$\begin{aligned} x^2 - 0{,}4x &= 0 \\ x \cdot (x - 0{,}4) &= 0 \quad \mid \text{(Faktoren einzeln betrachten)} \\ x_1 &= 0 \\ x - 0{,}4 &= 0 \quad \mid + 0{,}4 \\ x_2 &= 0{,}4 \end{aligned}$$

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.8.4 Aufgabe H4

$$\begin{aligned}
-0{,}1x^4 + 0{,}4x^3 &= -10x - 2 && |+10x+2\\
-0{,}1x^4 + 0{,}4x^3 + 10x + 2 &= 0 && |:x^2\\
-0{,}1x^2 + 0{,}4x + 10 + 2 &= 0 && \text{(fehlerhaft)}\\
-0{,}1x^2 + 0{,}4x + \frac{10}{x} + \frac{2}{x^2} &= 0 && \text{(korrigiert)}
\end{aligned}$$

Hier haben ein Beispiel aus dem Gruselkabinett „Wie macht man aus einem Polynom 4. Grades ein Polynom 2. Grades?“ Damit das klappt, müssen leider grundlegende Regeln der Algebra ignoriert werden. Hier: *Wenn ein Term nicht durch x^2 teilbar ist, dann lasse ich das Dividieren an der Stelle eben weg.*

In der Tat hilft die Division durch x^2 nicht weiter.[5]

Tun wir nun so, als wäre die Lösung bis hierher richtig. Weitere Fehler warten noch auf Entdeckung.

$$\begin{aligned}
-0{,}1x^2 + 0{,}4x + 10 + 2 &= 0\\
-0{,}1x^2 + 0{,}4x + 12 &= 0\\
x_{1/2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} && \text{(hier nicht anwendbar)}\\
x_{1/2} &= -0{,}2 \pm \sqrt{0{,}2^2 - 12} && \text{(fehlerhaft)}
\end{aligned}$$

Der Fehler ist ein Klassiker. Die p-q-Formel wurde angewendet, obwohl die Bezugsgleichung **nicht in Normalform** vorliegt. Ein Zwischenschritt ist erforderlich. Damit sieht es dann etwa so aus:

$$\begin{aligned}
-0{,}1x^2 + 0{,}4x + 10 + 2 &= 0\\
-0{,}1x^2 + 0{,}4x + 12 &= 0 && |:(-0{,}1)\\
x^2 - 4x - 120 &= 0\\
x_{1/2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\\
x_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{2^2 + 120}
\end{aligned}$$

Tun wir nun so, als ob der erste Ansatz mit der p-q-Formel richtig gewesen sei. Wo liegt der nächste Fehler? Einen haben wir noch…

$$\begin{aligned}
x_{1/2} &= -0{,}2 \pm \sqrt{0{,}2^2 - 12}\\
x_{1/2} &= -0{,}2 \pm \sqrt{-11{,}96}\\
x &= -0{,}2 && \text{(fehlerhaft)}
\end{aligned}$$

[5] Wie man die Nullstellen eines Polynomes bestimmen kann, kann man beispielsweise hier nachlesen: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/nullst.pdf

Die Wurzel aus der negativen Zahl $-11{,}96$ **existiert nicht**. Man kann sie dann aber nicht einfach weglassen, so als ob die Wurzel Null ergäbe. Es gibt schlichtweg **keine (reelle) Lösung**[6]!

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.8.5 Aufgabe H5

Hier wurden ganz viele Fehler gemacht. Gehen wir daher schrittweise vor.

$$\begin{aligned}
5x^4 - 45x^2 + 2700 &= 0 && |k = x^2\\
5k^2 - 45k + 2700 &= 0 &&\\
x^2_{1/2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 45} && \text{(falsch)}
\end{aligned}$$

An dieser Stelle lässt sich die p-q-Formel nicht anwenden, weil vor k noch die Zahl 5 steht. Unmittelbar ginge es nur mit der „Mitternachtsformel". Zudem ist die p-q-Formel noch falsch angewendet. Richtig wäre diese Sequenz:

$$\begin{aligned}
5x^4 - 45x^2 + 2700 &= 0 && |k = x^2\\
5k^2 - 45k + 2700 &= 0 && |:5\\
k^2 - 9k + 540 &= 0 &&\\
x^2_{1/2} &= \frac{9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - 540} &&\\
&= 4{,}5 \pm \sqrt{-519{,}75} &&
\end{aligned}$$

Damit hat man **keine reellen** Lösungen.

Jetzt tun wir mal so, als ob die Zeile 3 richtig gewesen wären. Dann kommt schon der nächste Fehler.

$$\begin{aligned}
x^2_{1/2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 45} &&\\
x_1^2 &= 9{,}66 &&\\
x_2^2 &= -4{,}66 &&\\
x_1 &= \sqrt{9{,}66} && \text{(falsch)}\\
x_1 &= \pm\sqrt{9{,}66} && \text{(korrigiert)}
\end{aligned}$$

Hier wurde vergessen, dass beim Wurzelziehen ja **zwei** Lösungen in Frage kommen, nämlich beide möglichen Vorzeichen.

[6]Wie Lösungen mit **Komplexen Zahlen** aussehen, kann man hier nachlesen:
`https://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/komplgl.pdf`

Der nächste Fehler folgt unmittelbar. Hier die zugehörige Sequenz:

$$\begin{aligned}
x_{1/2}^2 &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 45} \\
x_1^2 &= 9{,}66 \\
x_2^2 &= -4{,}66 \\
x_1 &= \pm\sqrt{9{,}66} \\
x_1 &= \pm 3{,}10 \\
x_2 &= \sqrt{4{,}66} && \text{(falsch)} \\
x_2 &= \sqrt{-4{,}66} && \text{(korrigiert)}
\end{aligned}$$

Hier wurde übersehen, dass x_2^2 ja **negativ** war. Also müsste hier auch die Wurzel aus dieser **negativen** Zahl gezogen werden (was allerdings im Bereich der Reellen Zahlen nicht möglich ist).

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.9 Lineargleichungssysteme

4.9.1 Aufgabe I1

$$
\begin{array}{lrrcll}
(1) & 5x & -12y & = & -9 & \\
(2) & -7x & +4y & = & -13 & |\cdot 3 \\
\hline
(1) & 5x & -12y & = & -9 & | \\
(2) & -21x & +12y & = & -39 & |+ \\
\hline
(3) & -16x & & = & -48 & |:(-16) \\
 & \color{red}{y} & & = & 3 & \quad \text{(falsch)} \\
 & \color{green}{x} & & = & 3 & \quad \text{(korrigiert)}
\end{array}
$$

Das war ein sehr ungewöhnlicher Fehler. Ich habe selbst länger gebraucht, bis ich ihn fand.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.9.2 Aufgabe I2

$$
\begin{array}{lrrrrcll}
(1) & 3a\cdot 0^2 & +2b\cdot 0 & +c & & = & 0 & \\
(2) & 6a\cdot 1 & +2b & & & = & 0 & \\
(3) & a\cdot 0^3 & +b\cdot 0^2 & +c\cdot 0 & +d & = & -4 & \\
(4) & a\cdot 1^3 & +b\cdot 1^1 & +c\cdot 1 & +d & = & 2 & \\
\hline
(1) & \color{red}{3a} & \color{red}{+2b} & +c & & = & 0 & \text{(fehlerhaft)} \\
(1) & & & c & & = & 0 & \text{(korrigiert)} \\
(2) & 6a & +2b & & & = & 0 & \\
(3) & \color{red}{a} & \color{red}{+b} & \color{red}{+c} & +d & = & -4 & \text{(fehlerhaft)} \\
(3) & & & & d & = & -4 & \text{(korrigiert)} \\
(4) & a & +b & +c & +d & = & 2 & \\
\hline
\end{array}
$$

Hier trat der gleiche Fehler gleich mehrfach auf. Der Schüler hatte vergessen, dass **jede** Zahl, die mit *Null* multipliziert wird, auch *Null* ergibt.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.9.3 Aufgabe I3

$$\begin{array}{rcllll} 0 &=& 4a\cdot 3^3+3b\cdot 3^3 &=& 108a+27b & \text{(fehlerhaft)}\\ 0 &=& 4a\cdot 3^3+3b\cdot 3^3 &=& 108a+81b & \text{(korrigiert)}\\ 108a &=& 27b &&& \text{(fehlerhaft)}\\ -108a &=& 27b &&& \text{(korrigiert)} \end{array}$$

Zunächst wurde $3\cdot 3^3$ falsch berechnet. Dann ist es etwas unglücklich, die Zusammenfassung der Terme mit einem weiteren Gleichheitszeichen hinten anzuhängen, wenn auch nicht grundsätzlich falsch. Möglicherweise dadurch bedingt hat der Schüler übersehen, dass er die $108a$ **subtrahieren** muss, damit sie auf die andere Seite kommen. Der übliche Kommentar hinter dem Kommentarstrich fehlt. Weitere Fehler sind nicht vorhanden.

Übersichtlicher wäre die Lösung in der üblichen Form:

$$\begin{array}{rcll} 0 &=& 4a\cdot 3^3+3b\cdot 3^3 & \\ 0 &=& 108a+81b & \mid -108a\\ -108a &=& 81b & \mid :81\\ -\frac{4}{3}a &=& b & \end{array}$$

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.9.4 Aufgabe I4

$$\begin{array}{rcll} a\cdot 3^4+b\cdot 3^3 &=& 2{,}7 & \\ a\cdot 3^4 &=& 2{,}7-b\cdot 3^3 & \mid :3^3\\ a\cdot 3 &=& \dfrac{2{,}7}{3}-b & \text{(fehlerhaft)}\\ a\cdot 3 &=& \dfrac{2{,}7}{3^3}-b & \text{(korrigiert)} \end{array}$$

Vielleicht wäre es besser gewesen, die Dreierpotenzen vorher auszurechnen.

Tun wir so, als wäre die Lösung bis hierher richtig, dann finden wir im letzten Schritt noch einen Fehler.

$$\begin{array}{rcll} a\cdot 3 &=& \dfrac{2{,}7}{3}-b & \mid :3\\ a &=& 0{,}3\cdot b & \text{(fehlerhaft)}\\ a &=& 0{,}3-\dfrac{b}{3} & \text{(korrigiert)} \end{array}$$

Leider geht in dieser digitalen Aufbereitung die Unleserlichkeit mancher Handschrift verloren. Im Original war das Minuszeichen so kurz, dass der Schüler es im nächsten Schritt für ein Malzeichen gehalten hat. Auch so etwas passiert nicht ganz selten.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.9.5 Aufgabe I5

$$\begin{array}{llllll}
(1) & 10a & +2b & = & -8 & | \\
(2) & 18a & +2b & = & 0 & |- \\
\hline
 & -8a & & = & -8 & |:(-8) \\
 & a & & = & {\color{red}-1} & \text{(fehlerhaft)} \\
 & a & & = & {\color{green}+1} & \text{(korrigiert)}
\end{array}$$

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.9.6 Aufgabe I6

$$\begin{array}{lllll}
(1) & 0 & = & -12+6b+2c & \\
\hline
(2) & 3 & = & -1+b+c-8 & |\cdot 6 \\
 & 18 & = & -6+6b+{\color{red}12c} & \text{(falsch)} \\
 & 18 & = & -6+6b+{\color{green}6c-48} & \text{(korrigiert)}
\end{array}$$

Wieso $6 \cdot c = 12c$ sein soll, ist mir unklar. Außerdem wurde vergessen, die -8 auch mit 6 zu multiplizieren und das Ergebnis aufzuschreiben.

Tun wir im folgenden so, als ob der erste Schritt richtig gewesen wäre. Dann folgt der nächste Fehler schon bald.

$$\begin{array}{rrcl}
(2) & 18 & = & -6+6b+12c \\
(1) & 0 & = & -12+6b+2c \\
\hline
(2)-(1) & 18 & = & {\color{red}-18}+10c \\
(2)-(1) & 18 & = & {\color{green}+6}+10c
\end{array}$$

Es ist: $-6-(-12) = -6+12 = +6 \neq -18$
Im restlichen Lösungsweg sind keine weiteren Fehler.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.10 Komplexe Rechnung

4.10.1 Aufgabe J1

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_1 &= \frac{10\,\Omega \cdot jX_L}{10\,\Omega + jX_L} \\
\underline{Z} &= -jX_C + \underline{Z}_1 \\
\underline{Z} &= \frac{-jX_C + 10\,\Omega \cdot jX_L}{10\,\Omega + jX_L} \quad \text{(falsch)} \\
\underline{Z} &= -jX_C + \frac{10\,\Omega \cdot jX_L}{10\,\Omega + jX_L} \quad \text{(korrigiert)} \\
\ldots &= \ldots
\end{aligned}$$

Beim Einsetzen des Terms für $\underline{Z}_1$ ist jX_C mit in den Zähler des Bruches geraten.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.10.2 Aufgabe J2

In der Aufgabe sind gleich zwei derbe Fehler eingebaut.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\underline{z} &= -3 \\
\mathrm{Im}\underline{z} &= 4 \\
|\underline{z}|^2 &= (\mathrm{Re}\underline{z})^2 + (\mathrm{Im}\underline{z})^2 \\
|\underline{z}|^2 &= -3^2 + 4^2 \quad \text{(falsch)}
\end{aligned}$$

Das Minus-Zeichen hat an dieser Stelle nichts zu suchen. Gemeint ist offenbar folgendes:

$$|\underline{z}|^2 = (-3)^2 + 4^2 \quad \text{(korrigiert)}$$

Wer die Klammern weglassen will, kann das tun. Dann muss man aber beachten, dass beim Quadrieren einer **negativen** Zahl das Ergebnis **positiv** ist, also so:

$$|\underline{z}|^2 = +3^2 + 4^2$$

In der nächsten Zeile passiert dann der nächste Fehler, der allerdings den ersten Fehler wieder aufhebt.

$$\begin{aligned}
|\underline{z}|^2 &= -3^2 + 4^2 \\
|\underline{z}| &= \sqrt{9 + 16} \quad \text{(falsch)} \\
|\underline{z}| &= \sqrt{-9 + 16} \quad \text{(korrigiert)}
\end{aligned}$$

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.10.3 Aufgabe J3

$$\begin{aligned}
15(4\underline{x}+j) &= 0 & &|-15 \quad \text{(falsch)}\\
15(4\underline{x}+j) &= 0 & &|:15 \quad \text{(korrigiert)}\\
4\underline{x}+j &= 0 & &|-j\\
4\underline{x} &= -j & &|:4\\
\underline{x} &= -\frac{j}{4}
\end{aligned}$$

Das Gegenteil vom Multiplizieren ist nicht das Subtrahieren, sondern das Dividieren!
Es folgt der nächste Fehler:

$$\begin{aligned}
4\underline{x}+j &= -15 & &|-j\\
4\underline{x} &= -j15 & &\text{(falsch)}\\
4\underline{x} &= -15-j & &\text{(korrigiert)}
\end{aligned}$$

Subtrahieren und Multiplizieren sind **verschiedene** Rechenoperationen!
Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.10.4 Aufgabe J4

$$\begin{aligned}
15(4\underline{x}+j) &= 0 & &|:15\\
4\underline{x}+j &= 0 & &|-4\underline{x}\\
j &= -4\underline{x} & &|\cdot(-4) \quad \text{(falsch)}\\
j &= -4\underline{x} & &|:(-4) \quad \text{(korrigiert)}\\
-j4 &= \underline{x} & &\text{(falsch)}\\
-\frac{j}{4} &= \underline{x} & &\text{(korrigiert)}
\end{aligned}$$

Das Gegenteil vom Multiplizieren ist nicht das Multiplizieren, sondern das Dividieren.
Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.10.5 Aufgabe J5

$$\begin{aligned}
10(3\underline{x}-j) &= 0 & &|:10\\
3\underline{x}-j &= 0 & &|3 \quad \text{(falsch)}\\
3\underline{x}-j &= 0 & &|:3 \quad \text{(korrigiert)}\\
\underline{x}-j &= 0 & &|+j \quad \text{(falsch)}\\
\underline{x}-\frac{j}{3} &= 0 & &|+\frac{j}{3} \quad \text{(korrigiert)}\\
\underline{x} &= \frac{j}{3}
\end{aligned}$$

Soll eine Gleichung durch 3 dividiert werden, dann muss man **jeden** Term durch 3 dividieren.
Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.10.6 Aufgabe J6

$$
\begin{array}{rcll}
\frac{1}{\underline{Z}_1} & = & \frac{1}{\underline{R}_2} + \frac{1}{\underline{X}_C} & | \cdot \underline{Z}_1 \cdot \underline{R}_2 \cdot \underline{X}_C \\
\underline{R}_2 \cdot \underline{X}_C & = & \underline{Z}_1 \cdot \underline{X}_C + \underline{Z}_1 + \underline{R}_2 & \text{(fehlerhaft)} \\
\underline{R}_2 \cdot \underline{X}_C & = & \underline{Z}_1 \cdot \underline{X}_C + \underline{Z}_1 \cdot \underline{R}_2 & \text{(korrigiert)} \\
\underline{R}_2 \cdot \underline{X}_C & = & \underline{Z}_1 \cdot (\underline{X}_C + \underline{R}_2) &
\end{array}
$$

In der Lösung sind zwei Fehler enthalten. Der zweite hebt den ersten wieder auf.

1. Beim Ausmultipilzieren im Zähler des dritten Bruches wurde aus dem Mal-Zeichen ein Plus-Zeichen.

2. Das Ausklammern im nächsten Schritt ist mit dem Pluszeichen anstelle des Mal-Zeichens nicht möglich. Eine Korrektur kann daher nicht angegeben werden. Es wurde so getan, als ob tatsächlich das Mal-Zeichen anstelle des Plus-Zeichens dort gestanden hätte.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.11 Vektorrechnung

4.11.1 Aufgabe K1

$$
\begin{array}{rcll}
a_1 & = & -30 & \\
a_2 & = & 40 & \\
a_3 & = & -120 & \\
|\vec{a}| & = & \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} & \\
 & = & \sqrt{-30^2 + 40^2 - 120^2} & \text{(falsch)} \\
 & = & \sqrt{(-30)^2 + 40^2 + (-120)^2} & \text{(korrigiert)} \\
 & = & \sqrt{900 + 1600 + 14400} & \\
 & = & \sqrt{16900} & \\
 & = & 130 &
\end{array}
$$

Das Minuszeichen bei a_1 und a_3 gehört jeweils dazu und muss entsprechend auch mitquadriert werden. Um dies auszudrücken sind die Klammern erforderlich. In der nächsten Zeile wurde der Fehler übrigens wieder aufgehoben, indem so gerechnet wurde, als ob die Klammern gesetzt wären. Wäre der Ansatz richtig, müsste man jedoch wie folgt weiterrechnen:

$$
\begin{array}{rcl}
|\vec{a}| & = & \sqrt{-30^2 + 40^2 - 120^2} \\
 & = & \sqrt{-900 + 1600 - 14400} \\
 & = & \sqrt{-13700}
\end{array}
$$

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.11.2 Aufgabe K2

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}| &= \sqrt{(-40)^2 + (-3)^2 + (9)^2} \\
|\vec{a}| &= 1690 \quad \text{(falsch)} \\
|\vec{a}| &= \sqrt{1690} \quad \text{(korrigiert)} \\
|\vec{a}| &\approx 41{,}11
\end{aligned}
$$

Hier wurde vergessen, die Wurzel mitzuschreiben. Deshalb ist von Zeile 2 zu Zeile 3 noch ein weiterer Fehler gemacht worden, denn es ist: **1690** $\not\approx$ **41,11**

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.12 Integralrechnung

4.12.1 Aufgabe L1

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{0} x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \; dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{6}{3}x^3 + \frac{12}{2}x^2 + 8x \right]_{-2}^{0} \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 8x \right]_{-2}^{0} \quad \text{(fehlerhaft)} \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 8x \right]_{-2}^{0} \quad \text{(korrigiert)}
\end{aligned}
$$

(Die nachfolgenden Zeilen habe ich jetzt weggelassen.)
Auch das war wieder einfach. Es ist: $\frac{12}{2} = 6$ und nicht: $\frac{12}{2} = 2$. So etwas passiert schon mal.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

4.12.2 Aufgabe L2

$$\begin{aligned} A &= \int\limits_{-5}^{5} 0{,}006x^4 - 0{,}3x^2 + 5\,dx \\ &= \left[0{,}006x^4 - 0{,}3x^2 + 5x\right]_{-5}^{5} \\ &= \left[0{,}0012x^5 - 0{,}1x^3 + 5x\right]_{-5}^{5} \end{aligned}$$

Hier wurde die Stammfunktion nicht richtig gebildet. Die Terme um x^4 und x^2 wurden schlicht beibehalten. Immerhin stimmt die Stammfunktion zum Absoluten Gied.

Es gibt aber noch einen weiteren Fehler. Nehmen wir an, der Anfang sei richtig, dann stoßen wir auf diese Sequenz.

$$\begin{aligned} A &= \ldots \\ &= (0{,}006 \cdot 5^4 - 0{,}3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5) - (0{,}006 \cdot (-5)^4 - 0{,}3 \cdot (-5)^2 + 5 \cdot (-5)) \\ &= 21{,}25 - (-28{,}75) \\ &= 50\,\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

Plötzlich taucht aus dem Nichts eine Einheit (Quadratmeter) auf! Das ist Missbrauch des Gleichheitszeichens. Wenn davor keine Einheit steht, darf danach auch keine stehen.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

5 Analyse der Fehler in kompletter Aufgaben

5.1 Aufgabe 1

$$\begin{aligned}
\frac{2x+3}{x-4} - 2 &= \frac{3x-4}{x-4} && \mid \cdot (x-4) \\
(2x+3) - (2) \cdot (x-4) &= (3x-4) \\
2x+3-(2x-8) &= 3x-4 \\
2x+3-2x+8 &= 3x-4 \\
x+11 &= 3x-4 && \text{(fehlerhaft)} \\
11 &= 3x-4 && \text{(korrigiert)} \\
15 &= 3x && \mid : 3 \\
5 &= x \\
L &= \{5\}
\end{aligned}$$

In der zweiten Zeile sind einige überflüssige Klammern – aber hier liegt nicht das Problem. Vermutet wird: $2x - 2x = x$! Ein solcher Fehler passiert immer mal wieder. Vermutlich spielt sich im Kopf des Schülers folgendes ab:

Er rechnet: $2 - 2 = 0$ (was ja richtig ist). Dann sind für ihn die Zahlen weg und übrig bleibt das x ohne Zahl. Dass das ja eigentlich $1x$ bedeutet, ist ihm nicht klar.

Die restliche Lösung ist richtig.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

5.2 Aufgabe 2

$$\frac{3x-7}{2x-8} - \frac{8-x}{3x-12} + \frac{3x-23}{16-4x} = \frac{5x-7}{6x-24}$$

Nenneranalyse:

$$\begin{array}{rcl|l}
2x-8 & = & 2\cdot(x-2^2) & \mathrm{EF} = 3\cdot(-4)\cdot 6 = {\color{red}-76} \quad \text{(fehlerhaft)} \\
3x-12 & = & 3\cdot(x-2^2) & \mathrm{EF} = 2\cdot(-4)\cdot 6 = -48 \\
-4x+16 & = & (-4)\cdot(+x-2^2) & \mathrm{EF} = 2\cdot 3\cdot 6 = 36 \\
6x-24 & = & 6\cdot(x-2^2) & \mathrm{EF} = 2\cdot 3\cdot(-4) = -24 \\
\hline
\mathrm{HN} & = & 2\cdot 3\cdot(-4)\cdot 6\cdot(x-2^2) & D = \mathbb{R}\setminus\{4\}
\end{array}$$

Die Nenneranalyse ist im Prinzip richtig durchgeführt worden, jedoch wurde der erste Erweiterungsfaktor falsch ausmultipliziert. Er muss heißen:

$$\mathrm{EF} = 3\cdot(-4)\cdot 6 = {\color{green}-72}$$

Anmerkung: Die Primfaktorzerlegung ist noch unvollständig. Man könnte die (-4) noch in (-2^2) und die 6 in $2\cdot 3$ zerlegen. Der Hauptnenner und die Zahlen in den Erweiterungsfaktoren wären dann nicht so groß geworden. Andererseits war die Zerlegung der 4 in 2^2 im Term $(x-2^2)$ nicht sinnvoll. Im Prinzip ist das aber auch in dieser Form richtig.

Es gibt noch weitere Fehler:

$$\begin{array}{rcll}
\frac{3x-7}{2x-8} - \frac{8-x}{3x-12} + \frac{3x-23}{16-4x} & = & \frac{5x-7}{6x-24} & |\cdot \mathrm{HN} \\
(3x-7)\cdot(-76) - (8-x)(-48) + (3x-23)\cdot 36 & = & (5x-7)\cdot(-24) & \\
-228x + 532 + 384 - 48x + 108x - 828 & = & -120x + 168 & \\
-168x + 88 & = & {\color{red}-120} + 168 & \text{(fehlerhaft)} \\
-168x + 88 & = & {\color{green}-120x} + 168 & \text{(korrigiert)}
\end{array}$$

Alle Klippen bei den Klammern hat der Schüler gemeistert, dann macht er einen Flüchtigkeitsfehler und vergisst ein x. Ärgerlich.

Es kommen jetzt aber noch mehr Fehler.

$$\begin{array}{rcll}
-168x + 88 & = & -120 + 168 & | + 120x - 88 \\
-48x & = & {\color{red}80} & \text{(fehlerhaft)} \\
-48x & = & {\color{green}120x - 40} & \text{(korrigiert)}
\end{array}$$

Hier hat der Schüler das x hinter der 120 noch gesehen, obwohl es nicht mehr da war! Sein Kommentar legt das nahe. Ansonsten wäre es nicht sinnvoll, $120x$ zu addieren. Dieser Fehler hebt somit den letzten Fehler wieder auf.

Einen weiteren Fehler gibt es aber noch zu entdecken:

$$\begin{aligned} -48x &= 80 \qquad | : (-48) \\ x &= \frac{48}{80} \qquad \text{(fehlerhaft)} \\ x &= -\frac{80}{48} \qquad \text{(korrigiert)} \end{aligned}$$

Der Kehrwert und das vergessene Minuszeichen sind vermutlich Flüchtigkeitsfehler.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

5.3 Aufgabe 3

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{HB:} & V & = & a \cdot b \cdot h & \\
\hline
\text{NB1:} & a + 4h & = & 60\,\text{cm} & \\
\text{NB2:} & b + 8h & = & 30\,\text{cm} & \\
\hline
 & a & = & \dfrac{60\,\text{cm}}{4h} & \text{(fehlerhaft)} \\
 & a & = & 60\,\text{cm} - 4h & \text{(korrigiert)} \\
 & b & = & \dfrac{30\,\text{cm}}{8h} & \text{(fehlerhaft)} \\
 & b & = & 30\,\text{cm} - 8h & \text{(korrigiert)}
\end{array}
$$

Das Gegenteil vom Addieren ist eben nicht das Dividieren. Warscheinlich wären diese beiden Fehler nicht passiert, wenn in der jeweiligen Vorzeile die geplante Rechnung hinter einem Kommentarstrich angegeben worden wäre.

Nehmen wir nun an, die Rechnung sei bis hierher richtig, treten jetzt weitere Fehler auf. Die beiden umgestellten Nebenbedingungen werden in die Hauptbedingung eingesetzt.

$$
\begin{array}{rcll}
V(h) & = & \dfrac{60\,\text{cm}}{4h} \cdot \dfrac{30\,\text{cm}}{8h} \cdot h & \\
V(h) & = & 60\,\text{cm} \cdot 4h^{-1} \cdot 30\,\text{cm} \cdot 8h^{-1} \cdot h & \text{(fehlerhaft)} \\
V(h) & = & 60\,\text{cm} \cdot \frac{1}{4}h^{-1} \cdot 30\,\text{cm} \cdot \frac{1}{8}h^{-1} \cdot h & \text{(korrigiert)}
\end{array}
$$

Hier hat der Schüler die Brüche als Potenz umschreiben wollen. Im Prinzip ist das machbar. Er hätte dann aber die Zahlen 4 bzw. 8 **unter** dem Bruchstrich lassen müssen. Alternativ hätte er auch Klammern setzen können, also beispielsweise $(4h)^{-1}$ statt $4h^{-1}$.

Viel zweckmäßiger wäre es jedoch gewesen, die 4 bzw. die 8 sofort mit dem Wert im Zähler zu kürzen, etwa so:

$$\frac{60\,\text{cm}}{4h} = \frac{15\,\text{cm}}{h} = 15\,\text{cm} \cdot h^{-1}$$

Es ist nebenbei bemerkt auch nicht zweckmäßig, das h im Nenner sofort als Potenz zu schreiben. Sinnvollerweise hätte man zunächst alle h in der Gleichung zusammengefasst. Ein h in einem Nenner hätte man gegen das h hinter den Brüchen kürzen können.

Tun wir jetzt wieder so, als ob die letzte Zeile richtig gewesen wäre. So geht es weiter:

$$
\begin{array}{rcll}
V(h) & = & 60\,\text{cm} \cdot 4h^{-1} \cdot 30\,\text{cm} \cdot 8h^{-1} \cdot h & \\
V'(h) & = & -60\,\text{cm} \cdot 4h^{-2} \cdot (-30\,\text{cm}) \cdot 8h^{-2} & \text{(völlig falsch)}
\end{array}
$$

Das ging grandios daneben! Will man ein **Produkt** ableiten, dann muss man die **Produktregel** anwenden. Das wird hier besonders umständlich, weil gleich drei Faktoren als Teilfunktionen vorhanden sind.

Sinnvoll wäre es gewesen, zunächst die Produkte zusammenzufassen. Das sähe dann so aus:

$$\begin{aligned} V(h) &= 60\,\mathrm{cm} \cdot 4h^{-1} \cdot 30\,\mathrm{cm} \cdot 8h^{-1} \cdot h \\ V(h) &= 57\,600\,\mathrm{cm}^2 \cdot h^{-1} \end{aligned}$$

In dieser Form wäre eine Ableitung wesentlich einfacher zu bilden.

Widmen wir uns jetzt wieder dem Lösungsversuch des Schülers. Weitere Fehler warten auf Entdeckung.

Durch Nullsetzen der Ableitung wird ein Extremwert gesucht.

$$\begin{aligned} V'(h) &= -60\,\mathrm{cm} \cdot 4h^{-2} \cdot (-30\,\mathrm{cm}) \cdot 8h^{-2} \\ V'(h_E) &= 0 \\ -60\,\mathrm{cm} \cdot 4h_E^{-2} \cdot (-30\,\mathrm{cm}) \cdot 8h_E^{-2} &= 0 \\ -30\,\mathrm{cm} \cdot 8h_E^{-2} &= 60\,\mathrm{cm} \cdot 4h_E^{-2} \qquad \text{(völlig falsch)} \end{aligned}$$

Offenbar wollte der Schüler den Term $-60\,\mathrm{cm} \cdot 4h_E^{-2}$ auf die andere Seite der Gleichung bringen (auch wenn das nicht zweckmäßig ist). Hierbei hat er warscheinlich das **Vorzeichen vor dem Faktor** für das **Rechenzeichen zwischen den Faktoren** gehalten. Addieren ist ja nicht die gegenteilige Rechenoperation zum Multiplizieren. Eventuell hätte es hier auch geholfen, in der Vorzeile einen entsprechenden Kommentar hinter einen Kommentarstrich zu setzen.

An dieser Stelle wäre es viel sinnvoller gewesen, das Produkt jetzt endlich einmal auszumultiplizieren und zusammenzufassen, bevor andere Schritte gemacht werden. (Das Zusammenfassen wird nebenbei bemerkt ziemlich oft übersehen.) Die Zusammenfassung hätte dann so ausgesehen:

$$\begin{aligned} -60\,\mathrm{cm} \cdot 4h_E^{-2} \cdot (-30\,\mathrm{cm}) \cdot 8h_E^{-2} &= 0 \\ 57\,600\,\mathrm{cm}^2 \cdot h^{-4} &= 0 \end{aligned}$$

Widmen wir uns nun wieder der weiteren Lösung.

$$\begin{aligned} -30\,\mathrm{cm} \cdot 8h_E^{-2} &= 60\,\mathrm{cm} \cdot 4h_E^{-2} \\ \frac{-\ 30\,\mathrm{cm} \cdot 8h_E^{-2}}{4h_E^{-2}} &= 60\,\mathrm{cm} \\ \frac{-\ 30\,\mathrm{cm} \cdot 8h_E}{4h_E} &= 60\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

Was hier passiert ist, ist wohl eher zufällig richtig. Über das, was sich der Schüler dabei gedacht hat, kann man nur spekulieren. Der Reihe nach:

Im ersten Schritt wurde durch $4h_E^{-2}$ dividiert. Das kann man machen. Sinnvollerweise hätte man dabei gleich auf der linken Seiten diesen Term $4h_E^{-2}$ gekürzt. Das hätte dann so ausgesehen:

$$\begin{aligned} -30\,\mathrm{cm}\cdot 8h_E^{-2} &= 60\,\mathrm{cm}\cdot 4h_E^{-2} \quad \mid :(4h_E^{-2}) \\ -60\,\mathrm{cm} &= 60\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

Das ist zwar eine falsche Aussage, aber das ergäbe sich so aus der Vorzeile.

Ok, der Schüler hat nun nicht gekürzt. Was aber macht er im nächsten Schritt? Kürzt er mit h_E^{-2} und erweitert sofort wieder mit h_E? Das, was er gemacht hat, läuft darauf hinaus. Was sich hier stellt, ist die Sinnfrage nach dieser Operation. Sie ist – wie schon gesagt – tatsächlich richtig, nur absolut sinnlos.

Schaun wir mal, was weiter passiert.

$$\begin{aligned} \frac{-\,30\,\mathrm{cm}\cdot 8h_E}{4h_E} &= 60\,\mathrm{cm} \\ h_E &= \frac{60\,\mathrm{cm}}{30\,\mathrm{cm}\cdot 8h_E} \qquad \text{(fehlerhaft)} \\ \frac{1}{4h_E} &= \frac{60\,\mathrm{cm}}{-30\,\mathrm{cm}\cdot 8h_E} \qquad \text{(korrigiert)} \end{aligned}$$

Hier wurde – wenn auch nicht zielführend – durch $(-30\,\mathrm{cm}\cdot 8h_E)$ dividiert. Dabei ging rechts das Minuszeichen verloren. Gravierender ist der Fehler auf der linken Seite. Dividiert man einen Bruch durch seinen **Zähler**, dann bleibt nicht einfach nur der Nenner übrig. Nein, der Zähler wird zu 1 und der Nenner bleibt **unter dem Bruchstrich**! Auch dies ist ein Fehler, der recht häufig gemacht wird.

Sehen wir nun, wie der Lösungsversuch weitergeht.

$$\begin{aligned} h_E &= \frac{60\,\mathrm{cm}}{30\,\mathrm{cm}\cdot 8h_E} \\ 4h_E\cdot 8h_E &= \frac{60\,\mathrm{cm}}{30\,\mathrm{cm}} \\ 32h_E &= 2\,\mathrm{cm} \qquad \text{(fehlerhaft)} \\ 32h_E^2 &= 2 \qquad \text{(korrigiert)} \end{aligned}$$

Hier wurden gleich zwei Fehler gemacht. Links wurde nicht beachtet: $h_E\cdot h_E = h_E^2$! Auf der rechten Seite wurde übersehen, dass sich Zentimeter im Zähler gegen Zentimeter im Nenner wegkürzt.

Auch wenn wir schon fast am Ende sind – ein weiterer Fehler kommt noch.

$$\begin{aligned} 32h_E &= 2\,\mathrm{cm} \\ h_E &= 0{,}0625 \qquad \text{(fehlerhaft)} \\ h_E &= 0{,}0625\,\mathrm{cm} \qquad \text{(korrigiert)} \end{aligned}$$

Hier wurde beim Dividieren durch 32 die Einheit vergessen.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

5.4 Aufgabe 4

$$\begin{array}{rcll}
(2\underline{x}+j3)\cdot(3\underline{x}-4)-9-j11 &=& (3\underline{x}+j2)\cdot(2\underline{x}-5)+2+j16 & \\
(2\underline{x}+j3)\cdot(3\underline{x}-4)-11 &=& (3\underline{x}+j2)\cdot(2\underline{x}-5)+j27 & \\
(6\underline{x}^2-8\underline{x}+j8\underline{x}-j12)-11 &=& (6\underline{x}^2-15\underline{x}+j10+j4\underline{x})+j27 & \text{(fehlerhaft)} \\
(6\underline{x}^2-8\underline{x}+j9\underline{x}-j12)-11 &=& (6\underline{x}^2-15\underline{x}-j10+j4\underline{x})+j27 & \text{(korrigirt)}
\end{array}$$

Das waren einfache Rechenfehler bzw. Vorzeichenfehler.

Der nächste Fehler ist eine ganz andere Kategorie:

$$\begin{array}{rcll}
(6\underline{x}^2-8\underline{x}+j8\underline{x}-j12)-11 &=& (6\underline{x}^2-15\underline{x}+j10+j4\underline{x})+j27 & \\
(-66\underline{x}^2+88\underline{x}-j\underline{x}99+j152) &=& (162j\underline{x}^2-405j\underline{x}+j270+j^2108\underline{x}) & \text{(völlig falsch)} \\
6\underline{x}^2-8\underline{x}+j8\underline{x}-j12-11 &=& 6\underline{x}^2-15\underline{x}+j10+j4\underline{x}+j27 & \text{(korrigiert)}
\end{array}$$

Hier wurde offenbar multipliziert, anstatt zu addieren oder zu subtrahieren. Möglicherweise haben die Klammern, die man ja einfach weglassen kann, den Schüler zu dieser Idee verleitet.

Zur nächsten Aufgabe geht es hier.

5.5 Aufgabe 5

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{4\underline{x}-17-j6}{6\underline{x}-12} &=& \dfrac{2\underline{x}-2-j3}{3\underline{x}-j5} \quad \Big|-\left(\dfrac{2\underline{x}-2-j3}{3\underline{x}-j5}\right) \\
\dfrac{4\underline{x}-17-j6-2\underline{x}+2+j3}{6\underline{x}-12-3\underline{x}+j5} &=& 0 \\
\dfrac{4\underline{x}-17-j6}{6\underline{x}-12}-\dfrac{2\underline{x}-2-j3}{3\underline{x}-j5} &=& 0
\end{array}$$

Hier hat wieder ein Schüler neue Bruchrechenregeln erfunden.[7] Er addiert bei ungleichnamigen Brüchen Zähler zu Zähler und Nenner zu Nenner.

[7] Infos und Übungen zu den Bruchrechenregeln siehe auch hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/bruch.pdf